Ueber cubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten.

(Von Herrn *L. Kronecker*.)

Das letzte *Fermat*sche Theorem enthält bekanntlich in dem einfachsten schon von *Euler* behandelten Falle den Satz, dafs die Gleichung: $r^3+s^3-1=0$ nicht anders durch rationale Werthe von r und s erfüllt werden kann, als wenn r oder s gleich Null ist. Durch die Substitution:

$$r=\frac{2a}{3b-1},\qquad s=\frac{3b+1}{3b-1}$$

erhält man:

$$(3b-1)^3(r^3+s^3-1) = 2(4a^3+27b^2+1),$$

woraus der Satz hervorgeht, dafs die Gleichung: $4a^3+27b^2+1=0$ nicht anders durch rationale Werthe von a und b erfüllt werden kann, als wenn $a=-1$, $b=\pm\frac{1}{3}$ gesetzt wird; und es ist auch umgekehrt der oben erwähnte Satz über die Gleichung: $r^3+s^3=1$ eine *Folge* dieses letzteren. Da nun der Ausdruck: $4a^3+27b^2$ den negativen Werth der Discriminante der Gleichung: $x^3+ax+b=0$ angiebt, so ist

$$x^3-x\pm\tfrac{1}{3} = 0$$

die einzige cubische Gleichung mit rationalen Coefficienten, für welche die Summe der Wurzeln gleich Null und das Quadrat des Products der drei Wurzeldifferenzen gleich Eins wird. — Die Wurzeln dieser besondern Gleichung dritten Grades sind:

$$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{9},\qquad \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{9},\qquad \mp\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{4\pi}{9}.$$

Der *Fermat*sche Satz über die Gleichung $x^3+y^3=z^3$ läfst sich daher, wie leicht zu sehen, in folgender bemerkenswerther Fassung aussprechen:

Es kann die Discriminante einer cubischen Gleichung mit rationalen Coefficienten nicht die sechste Potenz einer rationalen Zahl werden, aufser wenn ihre drei Wurzeln

$$m+n\sqrt{3}.\sin\frac{\pi}{9},\quad m+n\sqrt{3}.\sin\frac{2\pi}{9},\quad m-n\sqrt{3}.\sin\frac{4\pi}{9}$$

und m, n rational sind.