

## 12.

**Moyens pour trouver l'expression de la  $n^{\text{ième}}$  intégrale particulière de l'équation linéaire**

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \dots + Sy' + Ty = 0,$$

**à l'aide des  $n-1$  valeurs  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  qui satisfont à cette équation.**

(Par Mr. le Dr. *C. J. Malmstèn*, prof. des Mathém. à l'Univers. d'Upsåla.)

On sait depuis longtemps qu'en connaissant  $n$  valeurs particulières de  $y$ , satisfaisant à l'équation différentielle linéaire du  $n^{\text{ième}}$  ordre

$$(1.) \quad y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \dots + Sy' + Ty = 0,$$

on peut en former immédiatement l'intégrale complète, en multipliant par une constante arbitraire chacune de ces valeurs particulières et en prenant la somme de ces produits; et de plus que, si seulement  $n-1$  valeurs particulières de l'équation (1.) sont connues, on en peut tirer la  $n^{\text{ième}}$ , en intégrant une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre. Ce théorème célèbre, appelé avec raison par Mr. *Lacroix* „*Le plus général qu'on ait sur l'intégration des équations*,” a été (en tant que je sache) présenté pour la première fois par *Lagrange* dans les mémoires de l'Académie de Berlin de 1775.

Cependant en cherchant la  $n^{\text{ième}}$  valeur particulière de  $y$  à l'aide des autres  $n-1$  connues, on s'est contenté de faire voir comment se forme l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre, qui donne cette valeur. Or déjà pour les équations du 3<sup>ième</sup> et du 4<sup>ième</sup> ordre les calculs à faire pour cela deviennent si compliqués que même on a cru qu'il ne valait pas la peine de les conduire jusqu'au bout pour obtenir l'expression finale de la valeur demandée. Enfin, en considérant, combien les calculs augmentent pour chaque ordre plus élevé, on l'a jugé presque impossible de trouver l'expression finale pour une équation différentielle du  $n^{\text{ième}}$  ordre.

Mais cette impossibilité n'est qu'apparente. L'objet du présent mémoire est de faire voir, non seulement que l'expression finale demandée de la  $n^{\text{ième}}$  intégrale particulière, puisse fort bien être trouvée, mais quelle se présente

même sous une forme dont la simplicité est remarquable. Je suis parvenu à éviter la complication des calculs, qui menace de rendre infructueuse toute tentative de résoudre d'une manière générale le problème en question, par les fonctions connues sous le nom de *Déterminants*, dont l'application à la transformation des intégrales multiples est connue depuis long-temps et dont la recherche plus particulière a occupé plusieurs Analystes les plus célèbres de nos temps: M.M. *Jacobi*, *Cauchy*, *Binet*, *Catalan*, etc.

## I.

D'abord il faut se rappeler quelques propriétés des *Déterminants* dont nous aurons besoin dans la suite.

A. On nomme *Déterminant* la fonction

$$\Sigma \pm a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \dots a_n^n,$$

en désignant par cela, comme de coutume, la somme algébrique de tous les termes du produit

$$a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \dots a_n^n$$

qui se présentent en opérant sur les indices en haut et en bas toutes les permutations possibles, et en posant devant chaque terme le signe  $+$  ou  $-$ , de sorte que pour chaque permutation ainsi opérée, le signe  $+$  est changé en  $-$ , et réciproquement. Ainsi on obtient

$$(2.) \quad \Sigma \pm a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \dots a_n^n = - \Sigma \pm a_2^1 \cdot a_1^2 \cdot a_3^3 \dots a_n^n = \Sigma \pm a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \dots a_n^n.$$

B. Si deux indices, en haut ou en bas, son égaux entre eux, le *Déterminant* est égal à zéro.

C. Enfin nous empruntons les deux formules suivantes trouvées par M. *Jacobi*:

$$(3.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où} \\ R = a_1^{(i)} \cdot \frac{dR}{da_1^{(i)}} + a_2^{(i)} \cdot \frac{dR}{da_2^{(i)}} + \dots + a_n^{(i)} \cdot \frac{dR}{da_n^{(i)}} \\ R = \Sigma \pm a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \dots a_n^n, \\ 0 = a_1^{(i')} \cdot \frac{dR}{da_1^{(i')}} + a_2^{(i')} \cdot \frac{dR}{da_2^{(i')}} + \dots + a_n^{(i')} \cdot \frac{dR}{da_n^{(i')}}, \\ \text{et} \\ a_1^{(i)} = a_1^{(i')}, \quad a_2^{(i)} = a_2^{(i')}, \quad a_3^{(i)} = a_3^{(i')}, \quad \dots \quad a_n^{(i)} = a_n^{(i')}. \end{array} \right.$$

## II.

Soient  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$  des fonctions de  $x$ , et posons pour abrégér,

$$\frac{d^i y_r}{dx^i} = y_r^{(i)}.$$







En différentiant et en divisant par  $z_1'$  on tire de (17.):

$$\begin{aligned}\frac{z_2''}{z_1'} &= -\frac{\varphi_2}{\psi} \cdot \frac{z_1''}{z_1'} + \frac{\varphi_2 \cdot \psi' - \psi \cdot \varphi_2'}{\psi^2}, \\ \frac{z_3''}{z_1'} &= -\frac{\varphi_3}{\psi} \cdot \frac{z_1''}{z_1'} + \frac{\varphi_3 \cdot \psi' - \psi \cdot \varphi_3'}{\psi^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{z_r''}{z_1'} &= -\frac{\varphi_r}{\psi} \cdot \frac{z_1''}{z_1'} + \frac{\varphi_r \cdot \psi' - \psi \cdot \varphi_r'}{\psi^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{z_{n-1}''}{z_1'} &= -\frac{\varphi_{n-1}}{\psi} \cdot \frac{z_1''}{z_1'} + \frac{\varphi_{n-1} \cdot \psi' - \psi \cdot \varphi_{n-1}'}{\psi^2}\end{aligned}$$

et en substituant dans (16.), on obtient

$$\left. \begin{aligned} & (y_1^{(n-2)} \cdot \psi - y_2^{(n-2)} \cdot \varphi_2 - y_3^{(n-2)} \cdot \varphi_3 - \dots - y_{n-1}^{(n-2)} \cdot \varphi_{n-1}) \left( \frac{z_1''}{z_1'} + P \right) \\ & + 2(y_1^{(n-1)} \cdot \psi - y_2^{(n-1)} \cdot \varphi_2 - y_3^{(n-1)} \cdot \varphi_3 - \dots - y_{n-1}^{(n-1)} \cdot \varphi_{n-1}) \\ & + \left( \frac{\psi'}{\psi} \right) \{ y_2^{(n-2)} \cdot \varphi_2 + y_3^{(n-2)} \cdot \varphi_3 + \dots + y_{n-1}^{(n-2)} \cdot \varphi_{n-1} \} \\ & - \{ y_2^{(n-2)} \cdot \varphi_2' + y_3^{(n-2)} \cdot \varphi_3' + \dots + y_{n-1}^{(n-2)} \cdot \varphi_{n-1}' \} \end{aligned} \right\} = 0,$$

et parcequ'en vertu de (8.):

$$y_2^{(n-2)} \cdot \varphi_2' + y_3^{(n-2)} \cdot \varphi_3' + \dots + y_{n-1}^{(n-2)} \cdot \varphi_{n-1}' = y_2^{(n-2)} \cdot \psi',$$

on a

$$(18.) \quad \frac{z_1''}{z_1'} + P + \frac{2(y_1^{(n-1)} \cdot \psi - y_2^{(n-1)} \cdot \varphi_2 - \dots - y_{n-1}^{(n-1)} \cdot \varphi_{n-1})}{y_1^{(n-2)} \cdot \psi - y_2^{(n-2)} \cdot \varphi_2 - \dots - y_{n-1}^{(n-2)} \cdot \varphi_{n-1}} = \frac{\psi'}{\psi}.$$

Or les formules (7.) et (9.) donnent immédiatement

$$\begin{aligned} & y_1^{(n-1)} \cdot \psi - y_2^{(n-1)} \cdot \varphi_2 - y_3^{(n-1)} \cdot \varphi_3 - \dots - y_{n-1}^{(n-1)} \cdot \varphi_{n-1} \\ & = (-1)^n \cdot \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-1)}, \\ & y_1^{(n-2)} \cdot \psi - y_2^{(n-2)} \cdot \varphi_2 - y_3^{(n-2)} \cdot \varphi_3 - \dots - y_{n-1}^{(n-2)} \cdot \varphi_{n-1} \\ & = (-1)^n \cdot \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)} : \end{aligned}$$

donc, en posant pour abrégier:

$$(19.) \quad \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)} = \bar{\omega},$$

et en observant que

$$\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-1)} = \frac{d\bar{\omega}}{dx} = \bar{\omega}',$$

il vient en vertu de (18.):

$$(20.) \quad \frac{z_1''}{z_1'} + P + \frac{2\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} = \frac{\psi'}{\psi}$$

où  $\bar{\omega}$  est déterminé par la formule (19.) et (voir la formule (17.))

$$(21.) \quad \psi = \Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \cdot y_4'' \dots y_{n-1}^{(n-3)}.$$

En intégrant l'équation (20.), on aura

$$z_1' = \frac{\psi \cdot e^{-fPdx}}{\bar{\omega}^2},$$

c'est à dire

$$z_1 = \int \frac{\psi \cdot e^{-fPdx}}{\bar{\omega}^2} \cdot dx,$$

d'où, les valeurs de  $\psi$  et  $\bar{\omega}$  étant substituées à l'aide des formules (21.) et (19.),

$$(22.) \quad z_1' = \frac{\Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \dots y_{n-1}^{(n-3)} \cdot e^{-fPdx}}{(\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)})^2},$$

$$(23.) \quad z_1 = \int \frac{\Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \dots y_{n-1}^{(n-3)} \cdot e^{-fPdx}}{(\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)})^2} \cdot dx.$$

Quant à  $z_2, z_3$ , etc., les formules (17.) donnent immédiatement leurs valeurs. En effet, on aura généralement

$$z_r = - \int \frac{\Sigma \pm y_2 \cdot y_3' \dots y_{r-1}^{(r-3)} \cdot y_r^{(r-2)} \cdot y_{r+1}^{(r-1)} \dots y_{n-1}^{(n-3)} \cdot e^{-fPdx}}{(\Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-2}^{(n-3)} \cdot y_{n-1}^{(n-2)})^2} \cdot dx,$$

d'où, en posant

$$\frac{1}{R} = \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \dots y_{n-1}^{(n-2)},$$

on trouvera sans difficulté:

$$z_r = (-1)^{n-1} \cdot \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} \cdot e^{-fPdx} \cdot dx.$$

La recherche précédente fournit donc cet important

***Théorème.*** Soient

$$(24.) \quad y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}$$

$n-1$  intégrales particulières de l'équation

$$(25.) \quad y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \dots + Sy' + Ty = 0:$$

cette équation sera aussi satisfaite par

$$(26.) \quad y_n = y_1 \cdot z_1 + y_2 \cdot z_2 + \dots + y_{n-2} \cdot z_{n-2} + y_{n-1} \cdot z_{n-1}$$

où l'on a fait généralement

$$(27.) \quad z_r = (-1)^{n-1} \cdot \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} \cdot e^{-fPdx} \cdot dx$$

et

$$(28.) \quad \frac{1}{R} = \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \cdot y_3'' \dots y_{n-1}^{(n-2)}.$$

**Exemple 1.** Pour  $n=2$ , c'est à dire pour l'équation

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

on aura

$$z_1 = \int \frac{e^{-fPdx}}{y_1^2} \cdot dx \quad \text{d'où} \quad y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-fPdx}}{y_1^2} \cdot dx,$$

et l'intégrale complète est

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_1 \cdot \int \frac{e^{-fPdx}}{y_1^2} \cdot dx.$$

**Exemple 2.** Pour  $n=3$ , c'est à dire pour l'équation

$$y''' + Py'' + Qy' + Qy = 0$$

il vient

$$z_1 = \int \frac{y_2 \cdot e^{-fPdx} \cdot dx}{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')^2}, \quad z_2 = - \int \frac{y_1 \cdot e^{-fPdx} \cdot dx}{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')^2}$$

d'où

$$y_3 = y_1 \cdot \int \frac{y_2 \cdot e^{-fPdx} \cdot dx}{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')^2} - y_2 \cdot \int \frac{y_1 \cdot e^{-fPdx} \cdot dx}{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')^2}$$

et l'intégrale complète est

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 \left\{ y_1 \cdot \int \frac{y_2 \cdot e^{-fPdx} \cdot dx}{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')^2} - y_2 \cdot \int \frac{y_1 \cdot e^{-fPdx} \cdot dx}{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1')^2} \right\}.$$

**Exemple 3.** Pour  $n=4$ , c'est à dire pour l'équation

$$y^{IV} + Py''' + Qy'' + Ry' + Sy = 0$$

on aura

$$z_1 = \int \frac{y_2 \cdot y_3' - y_3 \cdot y_2'}{D^2} \cdot e^{-fPdx} \cdot dx, \quad z_2 = - \int \frac{(y_1 \cdot y_3' - y_3 \cdot y_1') \cdot e^{-fPdx}}{D^2} \cdot dx,$$

$$z_3 = \int \frac{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1') \cdot e^{-fPdx}}{D^2} \cdot dx$$

d'où

$$y_4 = y_1 \cdot \int \frac{(y_2 \cdot y_3' - y_3 \cdot y_2') \cdot e^{-fPdx}}{D^2} \cdot dx - y_2 \cdot \int \frac{(y_1 \cdot y_3' - y_3 \cdot y_1') \cdot e^{-fPdx}}{D^2} \cdot dx$$

$$+ y_3 \cdot \int \frac{(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1') \cdot e^{-fPdx}}{D^2} \cdot dx$$

et l'intégrale complète est

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 + K_4 y_4.$$

ayant fait

$$y_1(y_2' y_3'' - y_3' y_2'') + y_2(y_3' y_1'' - y_1' y_3'') + y_3(y_1' y_2'' - y_2' y_1'') = D.$$

Upsåla le 18 Mars 1849.