Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Im 3ten Hefte des 90ten Bandes von Crelle's Journal habe ich den Satz bewiesen, dass, wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y_1,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1$ algebraische Functionen von x sind, ein algebraisches Integral z_1 besitzt, und die reducirte lineare Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = 0$$

besitzt entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche, welche als rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ darstellbar sind, so wird sich das Integral z_1 stets rational durch $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 ausdrücken lassen — und ähnliche Sätze für logarithmische und algebraisch-logarithmische Integrale. Ich beabsichtige in der vorliegenden Notiz einige Bemerkungen hinzuzufügen, welche den Zusammenhang dieser Sätze mit dem von Abel aufgestellten Satze über die Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen $\int y\,dx$ erläutern sollen.

Nehmen wir an, dass die Gleichung (1) ein algebraisches Integral z_1 besitze, und sei dieses die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(3) \qquad F(z, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ sind; da die einzelnen Glieder der linken Seite der Differentialgleichung (1) als Ableitungen der z_1-Function sich mit Hinzuziehung der die Grössen $Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ definirenden irreductibeln algebraischen Gleichungen als rationale Functionen von z_1 darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ zusammengesetzt sind, so wird — wie in der oben citirten Arbeit nachgewiesen worden — nachdem y_1 in eine ganze rationale Function von z_1 mit rational aus den Grössen $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ zusammengesetzten Coefficienten verwandelt ist, jedenfalls, wenn nicht umgekehrt auch z_1 als rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 sich darstellen lässt, z_1 die Lösung einer irreductibeln Gleichung sein, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, \cdots Y_m$ und y_1 zusammengesetzt sind, nämlich des grössten gemeinsamen Theilers zwischen der Gleichung (1) und der in der angegebenen Weise transformirten Differentialgleichung

$$\varphi(z, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1) = 0 \tag{4}$$

oder eines irreductibeln Factors desselben. Sei der Grad der irreductibeln Gleichung (4) $\varkappa$ und ihre Lösungen $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$, so wird man in der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z_1 = y_1,$$

in welcher die Ableitungen von z_1 durch die oben bezeichneten rationalen Ausdrücke in $z_1, x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ ersetzt sind, durch geschlossene Umläufe des x, welche $Y_1, Y_2, \cdots Y_m, y_1$ unverändert lassen, z_1 in $z_2, z_3, \cdots z_\varkappa$ überführen können, und es werden daher auch $z_2, z_3, \cdots z_\varkappa$, wie unmittelbar ersichtlich, particuläre algebraische Integrale der Differentialgleichung (1) sein und somit auch die Summe

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_\varkappa}{\varkappa}.$$

Da diese Summe nun eine rationale Function von $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 ist — nämlich der $\varkappa^{\text{te}}$ Theil des negativen Coefficienten von $z^{\varkappa-1}$ in Gleichung (4) — so wird sich, wenn wir den Fall, dass dieser Coefficient eine Constante also $Y_m = Cy_1$ ist, ausschliessen, indem dann die Substitution $z - \frac{1}{C} = Z$ die Differentialgleichung (1) in eine lineare homogene verwandeln würde, der folgende Satz ergeben:

Wenn eine lineare Differentialgleichung (1) *ein algebraisches Integral besitzt und dieses ist nicht schon selbst so beschaffen, dass es rational in $x, Y_1, Y_2, \cdots Y_m$ und y_1 ausdrückbar ist, so besitzt die Differen-*

tialgleichung jedenfalls noch ein anderes algebraisches particuläres Integral von dieser Beschaffenheit.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = \frac{3}{2}$$

das algebraische Integral $z_1 = x + x^{-\frac{1}{2}}$, also auch $z_2 = x - x^{-\frac{1}{2}}$ und somit das rationale Integral $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2} = x$ haben.

Betrachten wir jetzt logarithmische Integrale der Differentialgleichung (1) von der Form

$$z = A \log v,$$

worin A eine Constante, v eine algebraische Function von x sein soll, so ist unmittelbar klar, dass $Y_m = 0$ sein muss, und dass wiederum y_1 sich als rationale Function von x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und v darstellen lässt. Ist v selbst nicht rational durch x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 ausdrückbar, so werden geschlossene Umläufe des x, welche Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m, y_1 unverändert lassen, sämmtliche Wurzeln v_1, v_2, $\cdots$ $v_\varkappa$ einer irreductibeln v-Gleichung mit in x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 rationalen Coefficienten liefern, und die entsprechenden Functionen $A \log v_\varrho$ werden wiederum particuläre Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein. Da aber dann auch

$$\frac{A}{\varkappa}\left\{\log v_1 + \log v_2 + \cdots + \log v_\varkappa\right\} = \frac{A}{\varkappa} \log v_1 v_2 \cdots v_\varkappa$$

ebenfalls ein Integral und $v_1 v_2 \cdots v_\varkappa$ eine in x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 rational ausdrückbare Function ist, welche offenbar nicht constant sein kann, so folgt:

Wenn eine lineare Differentialgleichung (1) *ein logarithmisches Integral von der Form $A \log v$ hat, worin A eine Constante und v eine algebraische Function bedeutet, so besitzt dieselbe auch ein Integral von der Form $\frac{A}{\varkappa} \log V$, worin $\varkappa$ eine positive ganze Zahl und V rational in x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 ausdrückbar ist.*

Es bedarf keiner weiteren Ausführung, dass, wenn die Differentialgleichung (1) durch ein elliptisches Integral befriedigt wird, deren obere Grenze eine algebraische Function von x ist, vermöge des Additionstheorems der elliptischen Integrale sich ebenso erweisen lässt, dass dann immer noch ein particuläres Integral existirt, dessen obere Grenze sowie die zugehörige Irrationalität rational aus x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 zusammengesetzt sind und ähnlich, wenn Abel'sche Integrale der Differentialgleichung genügen, wobei nur die Coefficienten der durch das Geschlecht des Integrales bestimmten algebraischen Gleichung an die Stelle der früheren oberen Integralgrenzen treten.

Diese Sätze verbunden mit den in der oben citirten Arbeit aufgestellten Bedingungen dafür, dass, wenn die Differentialgleichung (1) überhaupt ein algebraisches oder logarithmisches Integral hat, diese algebraische Function oder der Logarithmand stets rationale Functionen von x, Y_1, Y_2, $\cdots$ Y_m und y_1 sein müssen, geben die Erweiterung der von Abel gegebenen Sätze über die Form des auf niedere Functionsgattungen reducirbaren Integrales $\int y\,dx$.

Wien, den 12. December 1880.