# Ueber einen das System zweier Flächen 2. Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex 2. Grades.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

In den folgenden Zeilen will ich auf den nachstehenden Satz*), den ich in meiner Habilitationsschrift bewiesen habe, zurückkommen:

I. *Enthält die erste Erzeugung* $[g]$ *einer Fläche 2. Grades* $G^2$ *ein Tripel einander conjugirter Strahlen in Bezug auf eine Fläche 2. Grades* $F^2$, *so enthält sowohl diese Erzeugung* $[g]$ *als die zweite Erzeugung* $[g']$ *von* $G^2$ *eine einfach unendliche Schaar solcher Tripel.*

Es soll nämlich zunächst meine Aufgabe sein, die simultane Invariante aufzustellen, deren Verschwinden die in dem Satze ausgesprochene besondere Eigenschaft der beiden Flächen 2. Grades ausdrückt. Da sich dieselbe als rational in den Coefficienten dieser erweist, so wird die Forderung entstehen, die durch das Verschwinden der Invariante ausgedrückte besondere Eigenschaft der beiden Flächen 2. Grades auch in rationaler Form auszusprechen, also auch in einer mit stets reellen Elementen operirenden Form. Dies gelang durch die Untersuchung desjenigen Strahlencomplexes 2. Grades, welcher von den die beiden Flächen in harmonisch getrennten Punktepaaren treffenden Geraden gebildet wird. Dieser Complex lässt sich bekanntlich als Summe der sechs Quadrate der gewöhnlichen Liniencoordinaten darstellen, und seine Singularitätenfläche kann die projective Verallgemeinerung der Fresnel'schen Wellenfläche genannt werden**). Die Strahlen des Complexes treffen aber noch eine einfache Unendlichkeit von je zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren. Die Flächen dieser Schaar gehören nun zweitens auch so zu je zweien zusammen, dass die Tangentialebenenpaare derselben, welche von jedem Strahle des Complexes ausgehen, harmonisch getrennt sind. So gehören also zu jeder Fläche $G^2$ dieser Schaar zwei andere: die eine $F^2$

*) S. Math. Ann. Bd. XVIII, p. 9, 10.

**) S. Painvin, Bulletin des sciences math. Bd. 2, p. 368 ff.

wird von jedem Strahle des Complexes in zwei für $G^2$ conjugirten Punkten geschnitten, und die andere $H^2$ schickt durch jeden Strahl des Complexes zwei für $G^2$ conjugirte Tangentialebenen. Sucht man zu dieser $H^2$ wieder diejenige Fläche der Schaar, welche von jedem Strahle des Complexes in zwei für $H^2$ conjugirten Punkten geschnitten wird, u. s. f., so frägt es sich, ob dieser Process sich einmal schliessen, ob man also wieder zu $F^2$ zurückkommen kann? Es zeigt sich nun, dass für das Flächensystem, welches die im Satze ausgesprochene Eigenschaft besitzt, *dieser Process sich stets nach sechsmaliger Wiederholung schliesst.* Hiermit wäre also die gesuchte rationale Eigenthümlichkeit unseres Flächensystems gefunden; freilich lässt sich dieselbe nicht so kurz ausdrücken wie die im Satz gegebene.

Es ist klar, dass unser Complex die Geraden jeder Fläche unserer Schaar enthalten muss, er also ein Strahlencomplex 2. Grades ist, welcher beide Erzeugungen einer Fläche 2. Grades enthält. Ich stellte mir desshalb die Frage, ob es unter den vierfach unendlich vielen geradlinigen Erzeugungen einer Fläche 2. Grades, welche in einem jeden Strahlencomplexe 2. Grades enthalten sind*), stets zusammengehörige Paare derselben Fläche giebt, und bin zu dem Resultat gekommen, dass *der Ort derjenigen Strahlen, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punctepaaren schneiden, der einzige Strahlencomplex 2. Grades ist, welcher beide geradlinigen Erzeugungen einer Fläche 2. Grades enthält.* Ausgenommen ist nur der aus zwei in Involution liegenden linearen Complexen, von denen keiner speciell ist, bestehende Complex 2. Grades. Vorausschicken will ich der Vollständigkeit halber den etwas modificirten geometrischen Beweis des Satzes I.

## § 1.

Sind $g_1, g_2, g_3$ drei einander für die Fläche $F^2$ conjugirte Geraden der Erzeugung $[g]$ von $G^2$, so treffen ihre reciproken Polaren $c_1, c_2, c_3$ die Geraden $g_2$ und $g_3$, $g_3$ und $g_1$, $g_1$ und $g_2$ resp. Nennen wir daher $C^2$ die reciproke Polare von $G^2$ und $c^4$ die gemeinsame Curve von $G^2$ und $C^2$, so haben wir ein der $c^4$ eingeschriebenes Sechseck, dessen Seiten abwechselnd der Erzeugung $[g]$ von $G^2$ und $[c]$ von $C^2$ angehören. Daraus folgt aber erstens, dass es eine einfach unendliche Schaar solcher Sechsecke giebt, und zweitens, dass die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte derselben ebenfalls die Erzeugung einer Fläche 2. Grades $D^2$ bilden**). Ordnet man nun weiter jedem

---

*) S. meine geom. Unters. über Strahlencomplexe 2. Grades, math. Ann. Bd. XV, p. 453 u. 456.

**) S. meine Abh. über eine bes. Classe von Flächen 4. O. math. Ann. Bd. XX, p. 264, 265.

Punkte von $c^4$, in welchem sich die Erzeugenden $g_i$ und $c_k$ von $[g]$ und $[c]$ schneiden, den Schnittpunkt ihrer reciproken Polaren $c_i$ und $g_k$ zu, so bilden die Verbindungslinien der so zugeordneten Punkte ebenfalls die Erzeugung einer Fläche 2. Grades. Denn projicirt man die ganze Figur von einem Punkte $S$ der $c^4$ auf dessen Polarebene $\sigma$ für $F^2$, so projiciren sich $g_i$ und $c_i$, $g_k$ und $c_k$ in zwei Paare für den Kegelschnitt $(\sigma, F^2)$ conjugirter Strahlen. Hieraus folgt leicht nach dem bekannten Satze von Hesse, dass die Projection jeder Verbindungslinie stets durch den Pol der festen Geraden geht, welche die Schnittpunkte von $\sigma$ mit den Geraden der andern Erzeugungen $g'$ und $c'$ durch $S$ verbindet. Es schneiden folglich unsere Verbindungslinien sämmtlich eine durch den beliebigen Punkt $S$ von $c^4$ gehende Gerade, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Diese Fläche muss nun mit $D^2$ identisch sein, da sie mit ihr die Geraden $[(g_1, c_2), (c_1, g_2)]$ $[(c_2, g_3), (g_2, c_3)]$, $[(g_3, c_1), (c_3, g_1)]$ gemein hat. Hieraus folgt, dass je zwei gegenüberliegende Seiten jener Sechsecke reciproke Polaren für $F^2$ sind, womit der erste Theil unseres Satzes bewiesen ist.

Man zeigt aber zweitens leicht, dass die Geraden der Erzeugung $[g']$ von $G^2$, welche durch die Punkte $(g_1, c_3)$ $(g_2, c_1)$, $(g_3, c_2)$ gehen, ebenfalls drei einander in Bezug auf $F^2$ conjugirte Strahlen sind. Denn ist $g_1'$ die Erzeugende durch $(g_1, c_3)$, so muss ihre reciproke Polare $c_1'$ in der Ebene $[c_1, g_3]$ liegen, also die in derselben Ebene liegende Gerade $g_2'$ durch $(g_2, c_1)$ treffen; da ferner $g_1'$ in der Ebene $[c_3, g_2]$ liegt, so geht $c_1'$ durch den Punkt $(g_3, c_2)$, also trifft $c_1'$ auch die $g_3'$ durch $(g_3, c_2)$ u. s. w. Hiermit ist also auch der zweite Theil des Satzes bewiesen.

Da zwei Flächen $F^2$ und $G^2$ immer als reciproke Polaren von einander für eine dritte Fläche 2. Grades angesehen werden können, *so enthalten auch beide Erzeugungen von $F^2$ einfach unendlich viel Tripel von Strahlen, welche einander für $G^2$ conjugirt sind.*

## § 2.

Um nun die analytische Bedingung dafür zu finden, dass die auf ihr gemeinsames sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogenen Flächen 2. Grades:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \tag{A}$$

und:

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0 \tag{B}$$

die im Satze ausgesprochene Eigenschaft besitzen, suchen wir zunächst nach einem analytischen Ausdrucke für die Geraden der Fläche (A). Wir erhalten denselben, wenn wir setzen:

$$(1)\quad \begin{cases} p_{12} = \varkappa\sqrt{a_3 a_4}, & p_{13} = \lambda\sqrt{a_2 a_4}, & p_{16} = \mu\sqrt{a_2 a_3}, \\ p_{34} = \pm\varkappa\sqrt{a_1 a_2}, & p_{42} = \pm\lambda\sqrt{a_1 a_3}, & p_{23} = \pm\mu\sqrt{a_1 a_4}, \end{cases}$$

wenn:

$$(2)\qquad \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

wo das obere Zeichen für die Geraden der einen, das untere für die Geraden der anderen Erzeugung gilt. In der That hat die reciproke Polare der Geraden $q$ in Bezug auf die Fläche (A) die Coordinaten:

$$(3)\qquad \varrho\pi_{ik} = a_i a_k q_{ik},$$

sodass die Geraden (1) die die Geraden der Fläche auszeichnende Eigenschaft haben, sich selbst reciprok polar zu sein*). Dass für das obere Zeichen die Geraden der einen Schaar, dagegen für das untere die Geraden der andern Schaar resultiren, folgt leicht daraus, dass für je zwei solche Geraden die Bedingung des Schneidens erfüllt ist.

Sollen nun die Erzeugenden:

$$\begin{aligned} &(p)\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu; \\ &(p')\ \varkappa',\ \lambda',\ \mu'; \\ &(p'')\ \varkappa'',\ \lambda'',\ \mu''; \end{aligned}$$

einer Schaar von (A) einander für (B) conjugirt sein, so muss sein:

$$(4)\qquad \sum_{i,k=1}^{4} b_i b_k p_{ik} p'_{ik} = 0, \quad \text{etc.},$$

welches die Bedingungen dafür sind, dass die reciproke Polare von $p$ für (B) die Geraden $p'$ und $p''$, etc. schneidet. Diese Gleichungen gehen nun durch Substitution der Werthe von $p_{ik}$, $p'_{ik}$, $p''_{ik}$ aus (1) über in:

$$(5)\quad \varkappa\varkappa'(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2) + \lambda\lambda'(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3) \\ + \mu\mu'(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4) = 0, \quad \text{etc.}$$

Stellt man diese Bedingung mit der folgenden:

$$\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 0, \quad \text{etc.}$$

zusammen, so sieht man, dass die Form $\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2$ zur Form:

$$\varkappa^2(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2) + \lambda^2(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3) \\ + \mu^2(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4)$$

conjugirt ist, d. h. es muss sein:

$$\begin{aligned} &(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2)(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3) \\ &+ (a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2)(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4) \\ &+ (a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3)(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4) = 0. \end{aligned}$$

*) Bezüglich der Bezeichnung vergl. man etwa Salmon-Fiedler's Raumgeometrie 3. Aufl., I. Bd., Art. 51.

Setzt man:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = \Delta\,,$$
$$b_1 b_2 b_3 b_4 = \Delta',$$
$$a_2 a_3 a_4 b_1 + a_3 a_4 a_1 b_2 + a_4 a_1 a_2 b_3 + a_1 a_2 a_3 b_4 = \Theta\,,$$
$$b_2 b_3 b_4 a_1 + b_3 b_4 b_1 a_2 + b_4 b_1 b_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 a_4 = \Theta',$$

welches bekanntlich Coefficienten der Discriminante von $A + \nu B$ sind, so findet man, dass diese Gleichung übergeht in:

$$\text{(I)} \qquad \Theta\Theta' - 4\Delta\Delta' = 0.$$

Die simultane Invariante, deren Verschwinden die im Satze ausgedrückte Beziehung der Flächen (A) und (B) anzeigt, erscheint also in rationaler Form, d. h. jene Beziehung gilt gleichmässig für beide Erzeugungen der Fläche (A) und zudem auch ebenso für beide Erzeugungen von (B) in Bezug auf (A); denn jene Invariante ist symmetrisch in den Coefficienten beider Flächen. Es entsteht desshalb die Frage nach einer geometrischen Eigenschaft dieser beiden Flächen, welche unabhängig von der Realität jener Erzeugungen ist. Nun führt die symmetrische Form der Invariante sofort auf den Complex derjenigen Geraden, welche die Flächen (A) und (B) in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden. Die Gleichung desselben ist bekanntlich:

$$\text{(6)} \qquad \sum A_{ik}\, p_{ik}^2 = 0,$$

wo:

$$\text{(7)} \qquad A_{ik} = a_i b_k + a_k b_i,$$

und unsere Invariante lässt sich zunächst durch diese $A_{ik}$ ausdrücken. In der That ist:

$$A_{12} A_{34} = a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3 + a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4,$$
$$A_{13} A_{42} = a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2 + a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4,$$
$$A_{14} A_{23} = a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2 + a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3;$$

folglich wird:

$$a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2 = \tfrac{1}{2}(-A_{12} A_{34} + A_{13} A_{42} + A_{14} A_{23}),$$
$$a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3 = \tfrac{1}{2}(\quad A_{12} A_{34} - A_{13} A_{42} + A_{14} A_{23}),$$
$$a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4 = \tfrac{1}{2}(\quad A_{12} A_{34} + A_{13} A_{42} - A_{14} A_{23}),$$

also wird:

$$\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta' = -\tfrac{1}{4}\left\{A_{12}^2 A_{34}^2 + A_{13}^2 A_{42}^2 + A_{14}^2 A_{23}^2 \right.$$
$$\left. - 2A_{12} A_{34} A_{13} A_{42} - 2A_{12} A_{34} A_{14} A_{23} - 2A_{13} A_{42} A_{14} A_{23}\right\}.$$

Wir sehen hieraus vor Allem, dass alle Flächenpaare, welche in derselben Weise zu demselben Complexe führen, ebenfalls die im Satze ausgesprochene oder die noch zu findende Eigenthümlichkeit besitzen. Wir wollen daher zunächst alle diese Flächenpaare bestimmen.

## § 3.

Es ist also die Aufgabe zu lösen, alle $a_i$ und $b_k$ zu finden, welche den Gleichungen:

$$a_i b_k + a_k b_i = A_{ik} \tag{1}$$

genügen, wenn die $A_{ik}$ gegeben sind. Nun sieht man zunächst, dass, wenn auch die $a_i$ gegeben, die $a_k$ eindeutig gefunden werden können. Denn wir können dann etwa zuerst $b_2$, $b_3$, $b_4$ aus dem Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{llll} b_2 a_3 + b_3 a_2 & & & = A_{23}, \\ b_2 a_4 & & + b_4 a_2 & = A_{42}, \\ & b_3 a_4 & + b_4 a_3 & = A_{34} \end{array}\right. \tag{2}$$

berechnen, dessen Determinante: $-2 a_2 a_3 a_4$ als nicht verschwindend angenommen werde, und erhalten dann $b_1$ aus einer der übrigen 3 Gleichungen. Verschwindet die Determinante, also etwa $a_4$, so kann man $b_1$, $b_2$, $b_3$ aus einem analogen Gleichungssystem berechnen, dessen Determinante bei allgemeiner Annahme der $A_{ik}$ nicht wieder verschwinden kann, weil sonst noch etwa $a_3$, also auch $A_{34}$ verschwinden müsste. Es wird also Alles darauf ankommen, die $a_i$ so zu wählen, dass durch die aus (2) resultirenden Werthe von $b_2$, $b_3$, $b_4$ aus den drei übrigen Gleichungen sich derselbe Werth von $b_1$ ergebe. Dies unsymmetrische Verfahren zur Bestimmung der $a_i$ ersetzen wir durch folgendes. Offenbar ist:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 a_2 A_{34} + a_3 a_4 A_{12} = \Theta, \quad \text{und} \\ a_1 a_2 \cdot a_3 a_4 = \Delta, \end{array}\right. \tag{3}$$

also:

$$a_1^2 a_2^2 A_{34} - a_1 a_2 \Theta = - A_{12} \Delta,$$

woraus folgt:

$$2 a_1 a_2 = \frac{\Theta \pm \sqrt{\Theta^2 - 4 A_{12} A_{34} \Delta}}{A_{34}}, \tag{4}$$

also:

$$2 a_3 a_4 = \frac{\Theta \mp \sqrt{\Theta^2 - 4 A_{12} A_{34} \Delta}}{A_{12}}. \tag{5}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für die 4 übrigen Producte der $a_i$ und durch diese sind ja die Verhältnisse der $a_i$ eindeutig bestimmt. Man sieht, wie zu jedem Werthepaar von $\Theta$ und $\Delta$ acht

Werthsysteme der $a_i$ gehören. Wir haben also die $a_i$ als Functionen der beiden Parameter $\Theta$ und $\Delta$ dargestellt. Diese beiden Parameter sind jedoch nur scheinbar zwei. Setzen wir nämlich:

$$\Delta = \Theta^2 \sigma^2,$$

so wird:

$$2 a_1 a_2 = \frac{\Theta}{A_{34}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma^2 A_{12} A_{34}}\right), \text{ u. s. w.}$$

Es sind folglich die Verhältnisse der $a_i$ durch den einen Parameter $\sigma$ dargestellt, sodass es *einfach unendlich viel Flächenpaare giebt, die denselben Strahlencomplex als Ort derjenigen Geraden liefern, welche die Flächen jedes Paares in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden.* Dieser Parameter $\sigma$ oder vielmehr der reciproke Werth desselben hat eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung. Jeder der Tangentialcomplexe einer Geraden $q$ von (A) für den Complex 2. Grades hat nämlich mit demselben ein Strahlensystem 2. Grades gemein, welches einfach unendlich viel Erzeugungen von Flächen 2. Grades durch $q$ schickt, und für je einen dieser Tangentialcomplexe muss auch je eine Erzeugung von (A) unter denselben sein.*) Nun haben alle Tangentialcomplexe von $q$ die Gleichung:

$$\sum A_{ik} p_{ik} q_{ik} - \frac{1}{2} \tau \sum p_{ik} q_{lm} = 0, \tag{6}$$

wo $i, k, l, m$ irgend eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 ist. Nun ist nach § 2, (1):

$$q_{12} = \lambda_1 \sqrt{a_3 a_4}, \qquad q_{34} = \lambda_1 \sqrt{a_1 a_2}, \text{ etc.}$$

Sollen also alle Geraden:

$$p_{12} = \lambda \sqrt{a_3 a_4}, \qquad p_{34} = \lambda \sqrt{a_1 a_2}, \text{ etc.}$$

in dem Polarcomplexe (6) liegen, so muss sein:

$$\lambda \lambda_1 (A_{12} a_3 a_4 + A_{34} a_1 a_2) + \mu \mu_1 (A_{13} a_2 a_4 + A_{42} a_1 a_3)$$
$$+ \mu \mu_1 (A_{14} a_2 a_3 + A_{23} a_1 a_4) - \tau \sqrt{\Delta} (\lambda \lambda_1 + \mu \mu_1 + \nu \nu_1) = 0,$$

folglich ist nach Gl. (3):

$$\tau = \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sigma}.$$

Wir sehen also beiläufig, dass in jedem Systeme zusammengehöriger Grundflächen unseres Complexes 8 Flächen unserer Schaar vorkommen.

Jede dieser Flächen kann aber auch angesehen werden als eine solche, welche mit einer andern der Schaar den Complex als Ort derjenigen Geraden erzeugt, von denen aus zwei harmonisch getrennte Tangentialebenenpaare an jene beiden Flächen gehen. Sind nämlich:

*) Vergl. die Anm. pag. 516.

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0,$$

und:

$$\gamma_1 u_2^2 + \gamma_2 u_2^2 + \gamma_3 u_3^2 + \gamma_4 u_4^2 = 0$$

die Gleichungen dieser beiden Flächen in Ebenencoordinaten, so ist ja:

$$\alpha_i = \frac{1}{a_i},$$

sodass wir die Gleichungen haben:

$$\frac{\gamma_2}{a_1} + \frac{\gamma_1}{a_2} = A_{34}, \qquad \frac{\gamma_3}{a_4} + \frac{\gamma_4}{a_3} = A_{12}, \text{ etc.}$$

woraus folgt:

$$\frac{A_{34}}{a_3 a_4} + \frac{A_{12}}{a_1 a_2} = \Theta_1,$$

wo:

$$\Theta_1 = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \gamma_1 + \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \gamma_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \gamma_4.$$

Setzen wir also:

$$\Theta_1 = \frac{\Theta}{\Delta},$$

so geht diese Gleichung in die erste der Gleichungen (3) über, sodass sich in der That aus diesen und den analogen dieselben Werthe für die $a_i$ ergeben. Dieser Schluss erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn $\Delta$ verschwindet, wovon man sich auch leicht auf geometrischem Wege überzeugt.

## § 4.

Zu der in der Einleitung erwähnten Eigenschaft unserer Flächenschaar kommen wir nun auf folgendem Wege. Die beiden Flächen (A) und (B) schneiden sich offenbar in einer Curve 4. Ordnung $c^4$, welche auf der Singularitätenfläche des Complexes liegt. Denn die Tangenten in jedem Schnittpunkte beider Flächen an diese gehören dem Complexe an.

Es schneidet folglich z. B. (A) die Singularitätenfläche noch in einer zweiten Curve 4. Ordnung, welche die Schnittcurve von (A) mit der reciproken Polare von (A) für (B) ist, nämlich mit der Fläche:

$$\frac{b_1^2}{a_1} x_1^2 + \frac{b_2^2}{a_2} x_2^2 + \frac{b_3^2}{a_3} x_3^2 + \frac{b_4^2}{a_4} x_4^2 = 0.$$

In der That schneidet die Polarebene jedes Punktes dieser Curve für (B) die Fläche (A) in zwei geraden Linien, welche mit diesem Punkte verbunden das Ebenenpaar liefern, in welches der Complexkegel degenerirt. Nun geht durch diese Curve, wie wir bereits in § 1 gesehen haben, eine Fläche unserer Schaar, dort $D^2$ genannt. Sind in der That $c_i$ ihre Coefficienten, so müsste sein:

$$c_i = a_i + \lambda \frac{b_i^2}{a_i}$$

ferner aber:

(1) $A_{12} c_3 c_4 + A_{34} c_1 c_2 = A_{13} c_2 c_4 + A_{42} c_1 c_3 = A_{14} c_2 c_3 + A_{23} c_1 c_4$.

Da nun diese Gleichungen jedenfalls für $\lambda = 0$ befriedigt werden, so sieht man, dass, wenn überhaupt eins, es nur noch *ein* zweites $\lambda$ geben kann, welches diesen Gleichungen genügt. Man kann sich nun überzeugen, dass:

$$\lambda = \frac{\Theta}{\Theta'}$$

die Gleichung (1) befriedigt. Dann wird nämlich:

$$c_1 = \frac{a_1^2 \Theta' + b_1^2 \Theta}{a_1 \Theta'} = \frac{A_{12} A_{13} A_{14}}{a_1 \Theta'}.$$

Folglich wird:

$$A_{12} c_3 c_4 + A_{34} c_1 c_2 = \frac{A}{\Theta'} \left( \frac{A_{34}}{a_3 a_4} + \frac{A_{12}}{a_1 a_2} \right),$$

wo:

$$A_{12} A_{13} A_{14} A_{34} A_{42} A_{23} = A$$

gesetzt ist. Es wird folglich:

$$A_{12} c_3 c_4 + A_{34} c_1 c_2 = \frac{A \cdot \Theta}{\Delta \cdot \Theta'},$$

also sind in der That die Gleichungen (1) erfüllt.

Nun gehört zur Fläche (C) eine Fläche (D), welche mit ihr den Complex erzeugt. Man sieht, dass man den Gleichungen:

$$A_{ik} = c_i d_k + d_i c_k$$

genügt durch:

$$d_1 = \frac{\Theta'}{2A} \cdot \frac{A_{12} A_{13} A_{14} (a_1 \Theta - 2 b_1 \Delta)}{a_1^2}.$$

Denn dann wird z. B.:

$$c_1 d_2 + c_2 d_1 = \frac{A_{12}}{2 A_{34}} \left( \frac{2\Theta}{a_1 a_2} - 2\Delta \left( \frac{b_1}{a_1^2 a_2} + \frac{b_2}{a_2^2 a_1} \right) \right)$$

$$= \frac{A_{12}}{2 A_{34} a_1 a_2} (\Theta - a_3 a_4 A_{12}) = A_{12}.$$

Offenbar schneidet diese Fläche wiederum die Singularitätenfläche in einer zweiten Curve 4. Ordnung, durch welche die Fläche (H) der Schaar:

(H) $$\varrho h_i = \frac{a_i^2}{a_i \Theta - 2 b_i \Delta}$$

geht, wo $\varrho$ ein Proportionalitätsfactor.

Andrerseits gehört nun auch zur Fläche (B) eine Fläche der Schaar:

(E) $$e_1 = \frac{A_{12} A_{13} A_{14}}{b_1 \Theta},$$

welche sie in einer Curve 4. Ordnung schneidet, die auf der Singularitätenfläche liegt, und zu dieser wieder eine Fläche:

$$\text{(F)}\qquad f_1 = \frac{\Theta}{2A}\cdot\frac{A_{12}A_{13}A_{14}(b_1\Theta'-2a_1\Delta')}{b_1^2}$$
$$= \frac{\Theta}{2A}\cdot\frac{(a_1^2\Theta'+b_1^2\Theta)(b_1\Theta'-2a_1\Delta')}{b_1^2},$$

welche mit (E) den Complex erzeugt. Es zeigt sich nun, dass diese Fläche (F) mit (H) identisch wird, falls $4\Delta\Delta'=\Theta\Theta'$ ist. Dann müsste ja $\frac{f_i}{h_i}$ vom Index $i$ unabhängig sein; und diese Bedingung ist auch hinreichend für das Zusammenfallen. Nun ist:

$$\frac{f_1}{h_1} = \frac{\Theta\cdot\varrho}{2A}\,\frac{(a_1^2\Theta'+b_1^2\Theta)(a_1\Theta-2b_1\Delta)(b_1\Theta'-2a_1\Delta')}{a_1^2b_1^2}$$
$$= \frac{\Theta\cdot\varrho}{2A}\,\frac{(a_1^2\Theta'+b_1^2\Theta)(4\Delta\Delta'-\Theta\Theta')}{a_1^2b_1^2}$$
$$+\frac{\Theta\varrho}{A}\,\frac{(a_1^2\Theta'+b_1^2\Theta)}{a_1^2b_1^2}\left\{a_1b_1\Theta\Theta'-a_1^2\Theta\Delta'-b_1^2\Delta\Theta'\right\}.$$

Hier geht nun das Product der Klammern über in:

$$\Theta\Theta'\left\{a_1^3\Theta'+b_1^3\Theta-a_1^4\Delta'-b_1^4\Delta\right\}-a_1^2b_1^2(\Theta^2\Delta'+\Theta'^2\Delta).$$

Da nun aber:

$$a_1^3\Theta'+b_1^3\Theta-a_1^4\Delta'-b_1^4\Delta$$
$$=a_1^2b_1^2\left\{a_1a_2b_3b_4+a_1a_3b_2b_4+a_1a_4b_2b_3+a_3a_4b_1b_2+a_4a_2b_1b_3+a_2a_3b_1b_4\right\}$$
$$=a_1^2b_1^2\Phi$$

wird, so wird schliesslich:

$$\frac{f_1}{h_1}=\frac{\Theta\varrho}{2A}\,\frac{(a_1^2\Theta'+b_1^2\Theta)(4\Delta\Delta'-\Theta\Theta')}{a_1^2b_1^2}+\frac{\Theta\varrho}{A}\left\{\Theta\Theta'\Phi-(\Theta^2\Delta'+\Theta'^2\Delta)\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird aber dann und im Allgemeinen nur dann vom Index 1 unabhängig, wenn $4\Delta\Delta'=\Theta\Theta'$ ist, also wenn die Flächen (A) und (B) gerade die Eigenschaft unseres Satzes haben. Wir kommen also zu folgendem Resultate:

*Der Complex derjenigen Geraden, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden, besitzt dieselbe Eigenschaft in Beziehung auf eine einfach unendliche Schaar von anderen Flächenpaaren 2. Grades. Jede Fläche der Schaar wird von der ihr zugehörigen und einer gewissen zweiten Fläche der Schaar in Curven der Singularitätenfläche des Complexes geschnitten; dieser zweiten Fläche gehört wiederum eine dritte Fläche der Schaar zu, welche mit ihr ein Paar bildet; diese dritte Fläche wird wiederum von einer gewissen andern in einer Curve der Singularitätenfläche geschnitten u. s. f. Schliesst sich nun einmal dieser Process so, dass er im Ganzen sechs Flächen der Schaar umfasst, so schliesst er sich stets in derselben Weise, und* *die geradlinigen Erzeugungen jeder Fläche der Schaar enthalten Tripel von Geraden, welche einander in Bezug auf die zugehörige Fläche des Paares conjugirt sind. Umgekehrt zieht diese letzte Eigenschaft die erste nach sich.*

Um dieselbe nun in diejenige Form zu kleiden, welche wir ihr in der Einleitung gegeben haben, genügt die Bemerkung, dass durch jede Gerade unseres Complexes je zwei harmonisch getrennte Tangentialebenenpaare der beiden Flächen $C$) und $E$) gehen. Denn es ist:

$$\frac{1}{c_1 e_2} + \frac{1}{c_2 e_1} = \frac{(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,\Theta\,\Theta'}{A_{12}^2 A_{13} A_{14} A_{42} A_{23}} = \frac{\Theta\,\Theta' A_{34}}{A}.$$

Es bilden also auch in der sich schliessenden Reihe:

$$B),\ A),\ C),\ D),\ F),\ E).$$

die Flächen $B$) und $D$) sowohl als die Flächen $A$) und $F$) ein solches Paar. *In der sich schliessenden Reihe:*

$$A),\ B),\ D),\ C),\ E),\ F)$$

*werden also je zwei auf einander folgende Flächen ungerader Ordnung von den Geraden des Complexes in zwei harmonisch getrennten Punktepaaren geschnitten, dagegen senden je zwei auf einanderfolgende Flächen gerader Ordnung durch jede Gerade des Complexes zwei harmonisch getrennte Tangentialebenenpaare.*

Man sieht übrigens, dass unsere Schlüsse Ausnahmen erleiden, wenn etwa (A) ein Kegel, also $\Delta = 0$ ist; denn dann muss wegen $4\Delta\Delta = \Theta\Theta'$ auch $\Theta' = 0$ sein, doch bietet dieser Fall ja für sich wenig Schwierigkeit.

## § 5.

Offenbar enthält unser Complex die geraden Linien aller Flächen unserer Schaar, d. h. er enthält die Geraden beider Erzeugungen von einfach unendlich vielen Flächen 2. Grades. Wir fragen uns daher, ob dies eine den Complex auszeichnende Eigenschaft ist, d. h. ob überhaupt ein beliebiger Strahlencomplex 2. Grades $C^2$ beide Erzeugungen $[g]$ und $[g']$ einer Fläche 2. Grades $G^2$ enthalten kann. Nun schneidet jede Gerade von $[g]$ sowohl als von $[g']$ die Singularitätenfläche $F^4$ von $C^2$ in 4 Punkten, und es fragt sich nun, enthält dann jedesmal eine der beiden zugehörigen singulären Ebenen des Complexes beide Erzeugenden von $G^2$ oder jede derselben nur je eine. Ich werde zeigen, dass gerade immer zweimal das eine und zweimal das andre eintreten muss.

Sei nämlich $g$ eine Gerade von $[g]$, so legen wir durch $g$ und $[g']$ irgend einen linearen Complex $C$, welcher mit $C^2$ ein Strahlensystem

2. Grades $\Sigma^2$ gemein haben wird. Nun enthält $\Sigma^2$ bekanntlich*) 5 Paare von Schaaren von Erzeugungen von Flächen 2. Grades, und alle Flächen derselben Schaar schneiden sich in 8 singulären Punkten von $\Sigma^2$. Betrachten wir nunmehr diejenige Schaar, zu welcher auch $[g']$ gehört. Diese schickt ja auch eine $[h]$ durch den Strahl $g$ von $\Sigma^2$, durch welchen dann die Flächen $G^2$ und $H^2$ gehen, sodass irgend eine dritte Fläche der Schaar auf $g$ zwei singuläre Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von $\Sigma^2$ und somit auch von $C^2$ ausschneidet. Weil aber $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ singuläre Punkte von $\Sigma^2$ sind, so geht die zugehörige singuläre Ebene, welche ja auch eine von $C^2$ ist, durch $g$ und die Erzeugende von $[g']$ durch $\mathfrak{p}_1$ resp. $\mathfrak{p}_2$; denn durch diese Geraden ist gerade die zu $\mathfrak{p}_1$ resp. $\mathfrak{p}_2$ gehörige Ebene des linearen Complexes $C$ bestimmt. Wir sehen also, dass jedenfalls auf jeder Erzeugenden von $G^2$ zwei solche singuläre Punkte von $C^2$ liegen, deren eine singuläre Ebene beide durch den singulären Punkt gehenden Erzeugenden von $G^2$ enthält. Ich werde nun zeigen, dass diese Punkte eine Raumcurve 4. Ordnung 1. Species erfüllen.

Der Complex $C$ hat nämlich mit $[g]$ noch eine zweite Gerade $g_1$ gemein, auf welcher offenbar $H^2$ ebenfalls ein Paar Punkte der definirten Art ausschneidet. Lassen wir nun $H^2$ die Schaar des durch $[h]$ gehenden Tangentialcomplexes von $g$ durchlaufen, welcher $[h]$ zugehört, so beschreibt gleichzeitig $C$ ein Büschel von Complexen durch $g$ und $[g']$, welches zu der Schaar der $H^2$ projectiv ist. Die $g_1$ werden also aus einer Geraden $g'$ von $[g']$ durch ein derselben Schaar projectives Ebenenbüschel projicirt, welches mit dieser, da sie vom Index 2 ist**), eine Fläche 4. Ordnung erzeugt. Diese hat $g$ und $g'$ zu Doppelgeraden. Von $g'$ ist die evident; von $g$ folgt es so. Der einzige specielle Complex unter den Complexen $C$, welcher also aus den $g$ treffenden Geraden besteht, hat mit $[g]$ $g$ selbst als zweite Gerade gemein, mit dem Tangentialcomplexe von $g$ aber nothwendig eine aus zwei Ebenen durch $g$ bestehende $H^2$, da sonst die Geraden von $[h]$ die $g$, mit welcher sie zur selben Erzeugung gehören, nicht schneiden könnten. Es schneidet folglich unsere Fläche 4. Ordnung die $G^2$ noch in einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species $c^4$, welche der Ort der Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ ist.

Schneide nunmehr die zweite durch $\mathfrak{p}_1$ gehende singuläre Ebene des Complexes $C^2$ diese $c^4$ etwa in $\mathfrak{q}$, sodass $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ ein Strahl von $C^2$ ist, so sei $F^2$ die Fläche 2. Grades durch $c^4$ und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$. Dann ist augenscheinlich der Complex derjenigen Geraden, welche $F^2$ und $G^2$ in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden, mit $C^2$ identisch.

*) S. meine geom. Unters. über Strahlencomplexe 1. u. 2. Grades, Math. Ann. Bd. XV, pag. 441, 442.

**) S. Cremona, ebene Curven, deutsch von Curtze, § 14, Lehrsatz I, pag. 117.

Denn er hat mit $C^2$ erstens das Strahlensystem 4. Grades gemein, welches von den Tangenten der $G^2$ in den Punkten von $c^4$ gebildet wird, und ausserdem den Strahl $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}$. Hiermit ist also bewiesen, dass, *sobald ein Strahlencomplex 2. Grades die Geraden beider Erzeugungen einer Fläche 2. Grades enthält, er der Ort derjenigen Geraden ist, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren treffen.*

Unsere Schlüsse erleiden nur dann eine Ausnahme, wenn es keinen linearen Complex giebt, welcher $C^2$ in einem eigentlichen Strahlensystem 2. Grades schneidet, d. h. wenn $C^2$ in zwei in Involution liegende lineare Complexe zerfällt; dann giebt es ja auch keine Singularitätenfläche mehr. In diesem Falle kann $C^2$ dann und nur dann als Ort der Geraden betrachtet werden, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden, wenn einer der beiden linearen Complexe ein specieller ist, dessen Leitgerade also dem andern angehört. Dann ist die eine beider Flächen irgend ein Ebenenpaar durch die Leitgerade, durch welche auch die andere Fläche gehen muss.

Leipzig, im November 1882.