

# Ueber eine Eigenschaft der reciproken Curven.

(Von Herrn *M. Pasch* in Giessen.)

Ist die Gleichung einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung gegeben

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und setzt man

$$f(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3) = g_0 \mu^n + g_1 \mu^{n-1} \lambda + \dots + g_n \lambda^n,$$

so ist die Discriminante  $R$  dieser Function von  $\lambda, \mu$  eine homogene Function  $n(n-1)^{\text{ten}}$  Grades der Ausdrücke

$$y_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad y_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad y_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1:$$

$$R = \begin{vmatrix} g_1 & 2g_2 & 3g_3 & \cdot \\ 0 & g_1 & 2g_2 & \cdot \\ 0 & 0 & g_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ng_0 & (n-1)g_1 & (n-2)g_2 & \cdot \\ 0 & ng_0 & (n-1)g_1 & \cdot \\ 0 & 0 & ng_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \varphi(y_1, y_2, y_3),$$

und  $\varphi=0$  die Gleichung der reciproken Curve. Die letztere erhält man auch, indem man aus den Gleichungen

$$f=0, \quad y_i = \varphi f_i, \quad \text{wo} \quad f_i = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (i=1, 2, 3)$$

$\varphi$  und die  $x_i$  eliminirt, d. h.  $f=0$  geht durch die rationale Substitution  $y_i = \varphi f_i$  in  $\varphi=0$  über.

Von der Curve  $\varphi=0$  gelangt man zur ursprünglichen zurück, indem man die reciproke von  $\varphi=0$  bildet; dabei ergibt sich  $f$ , multiplicirt mit einem Factor, dessen Bedeutung *Plücker* nachgewiesen hat. Man kann aber auch die  $f_i$  für die  $y_i$  in  $\varphi$  substituiren; die dann entstehende Function vom Grade

$n(n-1)^2$  in  $x$  muss ebenfalls durch  $f$  theilbar sein, so dass

$$\varphi(f_1, f_2, f_3) = f \cdot M.$$

Ein solcher Factor  $M$  tritt bei jeder rationalen Substitution auf, ohne dass seine Eigenschaften näher bekannt wären (vgl. *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abelschen* Functionen, III. Abschnitt). Für den vorliegenden Fall werde ich zeigen, dass das Schnittpunktsystem der Curven

$$f=0, \quad M=0$$

zusammengesetzt ist aus den dreimal zu rechnenden Wendepunkten der Curve  $f=0$  und den Berührungspunkten ihrer Doppeltangenten, woraus auch die Anzahl dieser Punkte folgt. Das Mittel besteht in der Herstellung einer Identität, welche die Absonderung des Factors  $M$  vom Grade  $n^2(n-2)$  und seine behauptete Beziehung zu  $f$  veranschaulicht. Diese Identität beruht auf einer Eigenschaft der Discriminante, welche zuerst bewiesen werden soll.

# 1.

**Satz.** Ordnet man die Discriminante  $R$  nach Potenzen von  $g_0$  und  $g_1$ , so ist das einzige Glied von weniger als zwei Dimensionen

$$g_0 g_2^3 \mathcal{A},$$

wo  $\mathcal{A}$  die Discriminante der Function von  $\lambda, \mu$

$$g_2 \mu^{n-2} + g_3 \mu^{n-3} \lambda + g_4 \mu^{n-4} \lambda^2 + \dots + g_n \lambda^{n-2} *).$$

**Beweis.** Zerlegt man die Determinante  $R$  in Producte von Partialdeterminanten, indem man die drei ersten Columnen in eine, die  $2n-5$  übrigen in eine zweite Gruppe zusammenfasst, so kommt ein Glied

$$(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} g_1 & 2g_2 & 3g_3 \\ 0 & g_1 & 2g_2 \\ ng_0 & (n-1)g_1 & (n-2)g_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2g_2 & 3g_3 & \cdot \\ g_1 & 2g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-2)g_2 & (n-3)g_2 & \cdot \\ (n-1)g_1 & (n-2)g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

vor und ausserdem nur Glieder von mindestens zwei Dimensionen in  $g_0$  und

\*) Eine andere Relation zwischen  $R$  und  $\mathcal{A}$  ist von *Joachimsthal* (Dieses J. Bd. 33. p. 371) angegeben und von Herrn *Cayley* (ib. 34, p. 30) zur Untersuchung der Wendepunkte und Doppeltangenten benutzt worden.

$g_1$ . Die niedrigeren Glieder reduciren sich also auf das Product

$$(-1)^{n-1} 4n g_0 g_2^2 \begin{vmatrix} 2g_2 & 3g_3 & \cdot \\ 0 & 2g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-2)g_2 & (n-3)g_3 & \cdot \\ 0 & (n-2)g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber (abgesehen von einem numerischen Factor) das Product von  $g_2$  in die Discriminante von  $g_2 \mu^{n-2} + g_3 \mu^{n-3} \lambda + g_4 \mu^{n-4} \lambda^2 + \dots + g_n \lambda^{n-2}$

$$\begin{vmatrix} g_3 & 2g_4 & \cdot \\ 0 & g_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-2)g_2 & (n-3)g_3 & \cdot \\ 0 & (n-2)g_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nämlich die  $i^{\text{te}}$  Zeile mit  $\frac{n-2}{n}$ , die  $(n+i-3)^{\text{te}}$  mit  $\frac{2}{n}$  und subtrahirt diese dann von der ersteren, wobei  $i = 1, 2, \dots, n-3$  zu nehmen, so verwandelt sich irgend ein Element  $ig_i$  der  $n-3$  ersten Zeilen in

$$\frac{n-2}{n} ig_i - \frac{2}{n} (n-i) g_i = (i-2) g_i.$$

## 2.

Für  $a$  und  $b$  wähle ich nun die Durchschnittspunkte von zwei beliebigen Geraden  $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0$ ,  $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 = 0$  mit der Geraden  $f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 = 0$  und setze  $\Sigma \pm \alpha_i \beta_i f_i = A$ , so dass

$$a_1 = \alpha_2 f_3 - \alpha_3 f_2, \quad a_2 = \alpha_3 f_1 - \alpha_1 f_3, \quad a_3 = \alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1,$$

$$b_1 = \beta_2 f_3 - \beta_3 f_2, \quad b_2 = \beta_3 f_1 - \beta_1 f_3, \quad b_3 = \beta_1 f_2 - \beta_2 f_1,$$

$$y_1 = A f_1, \quad y_2 = A f_2, \quad y_3 = A f_3.$$

Die Gerade  $\beta$  soll durch den Punkt  $x$  gelegt werden; legt man sie noch durch einen willkürlichen Punkt  $c$ , so wird

$$\beta_1 = c_2 x_3 - c_3 x_2, \quad \beta_2 = c_3 x_1 - c_1 x_3, \quad \beta_3 = c_1 x_2 - c_2 x_1, \quad b_i = x_i (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3) - c_i f,$$

$$A = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3) - f (\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3).$$

Für diese Werthe von  $a$  und  $b$  berechnen wir die Coefficienten  $g_0, g_1, g_2$ . Wenn wir dann  $\frac{1}{n-1} \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x_1, x_2, x_3)$  mit  $f_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ , die Hessesche Determinante  $\Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33}$  mit  $H$  und durch  $f$  theilbare Ausdrücke jedesmal mit  $(f)$  bezeichnen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} g_0 &= f(b_1, b_2, b_3) = -(n-1)f(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^n + (f^2), \\ g_1 &= n \Sigma a_i f_i(b_1, b_2, b_3) = n(c_1 f_1 + \dots)^{n-1} (a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3) + (f) = (f), \\ g_2 &= \frac{1}{2} n(n-1) \Sigma a_i a_k f_{ik}(b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{2} n(n-1)(c_1 f_1 + \dots)^{n-2} \Sigma a_i a_k f_{ik} + (f) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} n(n-1)(c_1 f_1 + \dots)^{n-2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \alpha_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \alpha_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \alpha_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (f)$$

$$= -\frac{1}{2} n(n-1)(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^{n-2} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 H + (f).$$

Zu  $R$  übergehend, finden wir:

$$R = \varphi(y_1, y_2, y_3) = A^{n(n-1)} \varphi(f_1, f_2, f_3) = [(\Sigma \alpha_i x_i \Sigma c_k f_k)^{n(n-1)} + (f)] \varphi(f_1, f_2, f_3).$$

Endlich wird die Determinante  $\mathcal{A}$ , welche in den  $b_i$  homogen und vom Grade  $n(n-1) - (4n-6)$  ist,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + (f) = (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)^{n(n-1) - (4n-6)} D + (f),$$

wenn nämlich  $\mathcal{A}'$  und  $D$  aus  $\mathcal{A}$  entstehen, indem man resp.  $x_i(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3)$  und  $x_i$  für  $b_i$  setzt.

### 3.

Auf Grund des Satzes (1.) besteht zwischen den jetzt eingeführten Ausdrücken, da  $g_0$  und  $g_1$  durch  $f$  theilbar sind, folgende Beziehung:

$$R = A^{n(n-1)} \varphi(f_1, f_2, f_3) = g_0 g_2^3 \mathcal{A} + (f^2) = -(n-1)f(c_1 f_1 + \dots)^n g_2^3 \mathcal{A} + (f^2),$$

und es ist demnach  $\varphi(f_1, f_2, f_3)$  durch  $f$  theilbar, gleich  $f.M$ . Daraus ergibt sich weiter:

$$(\Sigma \alpha_i x_i \Sigma c_k f_k)^{n(n-1)} M = \sigma (\Sigma c_k f_k)^{n(n-1)} (\Sigma \alpha_i x_i)^6 H^3 D + (f),$$

wo  $\sigma$  ein numerischer Factor, und man kann nun mit  $(c_1 f_1 + \dots)^{n(n-1)} (\alpha_1 x_1 + \dots)^6$  dividiren:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^{n^2 - n - 6} M = \sigma H^3 D + (f).$$

Aus dieser Identität entnimmt man das Schnittpunktsystem der Curven  $f=0$ ,  $M=0$ . Es liefert nämlich  $H=0$  die Wendepunkte und  $D=0$  die

Berührungspunkte der Doppeltangenten von  $f$ , wenn man die auf der Geraden  $\alpha$  gelegenen Punkte  $(n^2-n-6)$  mal in Abzug bringt. Unter den  $n^3(n-2)$  Schnittpunkten von  $f$  und  $M$  befinden sich also die  $3n(n-2)$  Wendepunkte von  $f$  je dreimal; die übrigen

$$n^3(n-2) - 9n(n-2) = n(n-2)(n^2-9)$$

Punkte sind die Berührungspunkte der  $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$  Doppeltangenten. —

Nach *Jacobi* (Bd. 40, pag. 237 dieses Journals, vgl. die Note des Herrn *Clebsch*, ebendasselbst Bd. 63, pag. 186) muss sich übrigens aus  $D$  durch Anwendung der Gleichung  $f=0$  die  $(n^2-n-6)^{\text{te}}$  Potenz von  $\alpha_1 x_1 + \dots$  ausscheiden lassen, so dass  $D$  von der Form

$$D = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^{n^2-n-6} II + (f),$$

wo  $II$  vom Grade  $(n-2)(n^2-9)$ . Daher wird schliesslich noch

$$M = \sigma H^3 II + (f).$$

Die Form  $II$  hat Herr *Cayley* durch directe Herleitung ermittelt (Phil. Trans. 1859, pag. 193). —

Giessen, im August 1871.