Zur Theorie des relativen Extremums der einfachen Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen.

Von

J. W. Lindeberg in Helsingfors.

Vergleicht man miteinander die Theorien des relativen und des absoluten Extremums, so findet man, daß zwischen denselben eine große Analogie besteht. So sind die Kriterien des schwachen Extremums einander vollständig äquivalent, und die Methoden diese Kriterien abzuleiten sind sehr ähnlich. Andrerseits ist aber die Theorie des relativen Extremums in einigen Punkten noch nicht so weit geführt wie die des absoluten, und insbesondere sind die Sätze zur näheren Bestimmung der Art des Extremums in der ersten sehr wenig befriedigend.

Im folgenden wird versucht diesem Mangel abzuhelfen, indem ein allgemeiner Satz bewiesen wird, wonach die Art des Extremums bei dem einfachsten Problem des relativen Extremums ebenso einfach wie bei dem Problem des absoluten Extremums bestimmt werden kann.

Um unsere Aufgabe genau formulieren zu können, erinnern wir zunächst an die Hauptpunkte der erwähnten Theorien.

1. Es sei $F(x, y, y')$ eine reguläre analytische Funktion ihrer Argumente und $y = y(x)$ die Gleichung einer Lagrangeschen Kurve C, die dem Problem das Integral

$$(1) \qquad \int F(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

zu einem absoluten Extremum zu machen entspricht. Ferner sei c ein regulärer Bogen von C, der keine mit der y-Achse parallele Tangente zuläßt und der mit einem Felde umgeben werden kann. Weiter bezeichnen wir mit $p(x, y)$ die Funktion von x und y, die in jedem Punkte des Feldes mit der Ableitung der durch denselben gehenden Lagrangeschen Kurve übereinstimmt, und schließlich werde eine Funktion E der vier Argumente x, y, y', p durch die Gleichung

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, p)$$

definiert.

Wenn nun c' irgend eine im Felde verlaufende reguläre Kurve mit denselben Endpunkten wie c ist, so hat man*)

$$(2)\qquad \int\limits_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int\limits_{c} F(x, y, y')\,dx = \int\limits_{c'} E(x, y, y', p(x, y))\,dx,$$

wobei die Integrale über die respektiven Kurven c' und c zu erstrecken sind.

Indem wir uns auf den Fall des Minimums beschränken, führen wir jetzt die folgenden Voraussetzungen ein:

Die Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ ist, wenn $x_1 y_1$ und $x_2 y_2\,(x_1 < x_2)$ die Endpunkte von c sind, für $x_1 \leq x \leq x_2$, $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ positiv, ohne zu verschwinden,

Die Funktion $E(x, y, y', p)$ ist im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ p = y'(x),$$

wo ϱ_0' eine gewisse positive Zahl bedeutet, positiv und verschwindet nur für $y' = y'(x)$.

Auf Grund der ersten dieser Voraussetzungen ist es möglich, die positive Größe ε_1 so klein festzustellen, daß die Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ in dem Bereiche $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - y(x)| < \varepsilon_1$, $|y' - y'(x)| < \varepsilon_1$ positiv und nicht Null ist; da

$$E(x, y, y'\,p) = \frac{(y'-p)^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, p + \vartheta(y' - p)), \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

bleibt auch die Funktion $E(x, y, y', p)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y - y(x)| < \varepsilon_1,\ |y' - y'(x)| < \varepsilon_1,\ |p - y'(x)| < \varepsilon_1$$

positiv und verschwindet nur für $y' = p$. Ferner sei bemerkt, daß nach der zweiten Voraussetzung die Funktion $E(x, y, y', p)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ p = y'(x)$$

positiv ist, ohne zu verschwinden. Da sie in bezug auf alle ihre Argumente stetig ist, kann man also die positive Größe ε_2 so klein bestimmen, daß diese Eigenschaft noch im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y - y(x)| < \varepsilon_2,\ \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ |p - y'(x)| < \varepsilon_2$$

besteht. Die Größe ε_2 muß offenbar kleiner als ε_1 sein und man kann somit behaupten, daß die Funktion $E(x, y, y', p)$ im ganzen Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y - y(x)| < \varepsilon_2,\ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ |p - y'(x)| < \varepsilon_2$$

positiv bleibt und nur für $y' = p$ Null wird.

Wegen der Stetigkeit von $p(x, y)$ ist es noch möglich, ε_3 so klein zu wählen, daß $|p(x, y) - y'(x)| < \varepsilon_2$ für $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - y(x)| < \varepsilon_3$.

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung.

Wenn ε die kleinere der Größen ε_2 und ε_3 bedeutet, wird also die Funktion $E(x, y, y', p(x, y))$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon, \ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0'$$

positiv und verschwindet nur für $y' = p(x, y)$.

Es bezeichne jetzt $T_{\varrho\varrho'}$ die Gesamtheit aller die Endpunkte von c verbindenden regulären Kurven $y = Y(x)$, die im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ den Ungleichungen

$$Y(x) - y(x) | < \varrho, \ | Y'(x) - y'(x) | < \varrho'$$

genügen. Ist $\varrho < \varepsilon$ und gehört die Kurve c' der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$, so wird nach dem Obigen die Funktion $E(x, y, y', p(x, y))$ in jedem Punkte von c' positiv. Da ferner die Ableitung der Kurve c' nicht in jedem Punkte derselben mit der Funktion $p(x, y)$ übereinstimmen kann, kann der Integrand der rechten Seite von (2) nicht in jedem Punkte derselben verschwinden und diese Gleichung gibt uns also

$$\int\limits_{c'} F(x, y, y')\, dx - \int\limits_{c} F(x, y, y')\, dx > 0.$$

Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Wenn sich der Bogen c mit einem Felde umgeben läßt und $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad y' = y'(x)$$

ein festes Vorzeichen besitzt, ohne zu verschwinden, und $E(x, y, y', p)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ y = y(x), \ |y' - y'(x)| < \varrho_0', \ p = y'(x)$$

dasselbe Vorzeichen behält und nur für $y' = y'(x)$ verschwindet, so kann man stets ϱ so klein bestimmen, daß die Kurve c im Vergleich mit allen Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$ absolutes Extremum des Integrals (1) *ergibt.*

2. Wir werden jetzt sehen, daß der Ausdehnung des obigen Satzes zu dem einfachsten Problem des relativen Extremums besondere Schwierigkeiten entgegenstehen.

Indem wir mit $G(x, y, y')$ eine reguläre Funktion der Argumente x, y, y' bezeichnen, so sei

$$\int G(x, y, y')\, dx \tag{3}$$

das Integral, das für alle in Frage kommenden Kurven einen konstanten Wert behalten soll. Wenn λ ein willkürlicher Parameter ist und

$$F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y') = H(x, y, y', \lambda)$$

gesetzt wird, ist die Lagrangesche Gleichung des Problems

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0. \tag{4}$$

Es sei $y = y(x)$ die Gleichung einer Integralkurve C von (4) und c ein Stück dieser Kurve, das überall regulär verläuft und keine mit der y-Achse parallele Tangente hat. Die Koordinaten der Endpunkte 1 und 2 von c seien $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, und mit $x_0 y_0$ mögen die Koordinaten eines zu 1 benachbarten Punktes 0 von C bezeichnet werden, der so liegt, daß $x_0 < x_1$. Ferner sei $y = y(x, \mu, \lambda)$ die Gleichung der durch den Punkt 0 gehenden Schar von Integralkurven der Gleichung (4) und es werde angenommen, daß die Kurve C aus dieser Gleichung für $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ hervorgeht. Schließlich sei ω die Funktion von x, μ und λ, die für jedes Wertsystem der Argumente mit dem Werte des Integrals (3) vom Punkte 0 längs der Kurve $y = y(x, \mu, \lambda)$ bis zu dem Punkte mit der Abszisse x erstreckt übereinstimmt.

Wir führen jetzt die folgenden Voraussetzungen ein:

a) *Die Funktionaldeterminante* $\dfrac{\partial(y, \omega)}{\partial(\mu, \lambda)}$ *ist für* $x_1 \leq x \leq x_2$, $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ *nicht Null.*

b) *Die Ableitung* $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, y', \lambda)$ *ist für*

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ y' = y'(x),\ \lambda = \lambda_0$$

positiv und von Null verschieden.

c) *Die Funktion*

$$E(x, y, y', p, \lambda) = H(x, y, y', \lambda) - H(x, y, p, \lambda) - (y' - p)\frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, p, \lambda)$$

bleibt im Bereiche:

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ p = y'(x),\ \lambda = \lambda_0$$

überall positiv und verschwindet nur für $y' = y'(x)$.

Dies sind die Annahmen, die bei dem Problem des relativen Minimums den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen entsprechen.

Es sei nun c' eine Kurve mit denselben Endpunkten wie c, die überall regulär verläuft und keine mit der y-Achse parallele Tangente zuläßt, und es werden von dieser Kurve die folgenden Annahmen gemacht:

a') Sie gibt dem Integrale (3) denselben Wert wie der Bogen c.

b') Durch jeden Punkt 3 von c' geht eine solche Kurve der Schar $y = y(x, \mu, \lambda)$, daß das Integral (3) denselben Wert erhält, wenn es über das Stück 03 dieser Kurve oder über die Kurve, die aus dem Bogen 01 von C und 13 von c' zusammengesetzt ist, erstreckt wird.

c') Die Werte von μ und λ, die zu der durch den Punkt 3 gehenden oben definierten Kurve der Schar $y = y(x, \mu, \lambda)$ gehören, bilden zusammen mit der Abszisse x von 3 für jede Lage dieses Punktes ein solches Wertsystem von μ, λ und x, für welches die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(y, \omega)}{\partial(\mu, \lambda)}$ nicht verschwindet.

Wir bezeichnen mit $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ die zwei Funktionen von x, die für jedes x mit den Werten der Parameter λ und μ, die zu der durch den entsprechenden Punkt 3 gehenden oben erwähnten Kurve der Schar $y = y(x, \mu, \lambda)$ gehören, übereinstimmen. Ferner definieren wir die Funktion $p(x)$ durch die Gleichung $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, \mu(x), \lambda(x))$. Alsdann hat man*)

$$(5) \quad \int\limits_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int\limits_{c} F(x, y, y')\,dx = \int\limits_{c'} E(x, y, y', p(x), \lambda(x))\,dx,$$

welche Gleichung für das Problem des relativen Extremums von grundlegender Bedeutung ist. Sie ist der Gleichung (2) sehr ähnlich; ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, daß in der Gleichung (5) zwei Funktionen $p(x)$ und $\lambda(x)$ vorkommen, die von der Gestalt des Bogens c' abhängen.

Da die Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ und also die ganze Gleichung (5) nur unter der Voraussetzung (b′) einen Sinn haben, wollen wir zunächst diese Voraussetzung etwas näher in Betracht nehmen.

Es seien $x_3 y_3$ die Koordinaten des Punktes 3, I_{03} der Wert des Integrals (3) über die Kurve erstreckt, die aus dem Stücke 01 von C und 13 von c' zusammengesetzt ist, und δ der größte Wert, den irgend eine der Größen $|y_3 - y(x_3)|$ und $|I_{03} - \omega(x_3, \mu_0, \lambda_0)|$ im Intervalle $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ annimmt. Wenn δ hinreichend klein ist, kann man zufolge der Voraussetzung (a) die Gleichungen

$$y_3 = y(x_3, \mu, \lambda)$$
$$I_{03} = \omega(x_3, \mu, \lambda)$$

für jedes x_3 im Intervalle $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ nach μ und λ auflösen und hieraus folgt unmittelbar, daß, wenn ϱ und ϱ' hinreichend klein sind, die Voraussetzung (b′) für alle Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ erfüllt ist. Etwas Näheres über die Werte, die hierbei ϱ und ϱ' erteilt werden können, scheint es aber sehr schwer zu sein zu entscheiden, und aus diesem Grunde ist die Gleichung (5) nicht unmittelbar zur Ableitung von Kriterien über die Art des Extremums geeignet.

Das schwache Minimum läßt sich aber ohne Schwierigkeit auf Grund unserer Voraussetzungen nachweisen.

Zufolge der Voraussetzung (b) können wir erstens eine positive Größe ε so feststellen, daß $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, y', \lambda)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \; |y - y(x)| < \varepsilon, \; |y' - y'(x)| < \varepsilon, \; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

positiv bleibt, ohne zu verschwinden, und da

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung.

$$E(x, y, y', p, \lambda) = \frac{(y'-p)^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, p + \vartheta(y'-p), \lambda), \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

behält auch die Funktion E im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon, \ |y' - y'(x)| < \varepsilon, \ |p - y'(x)| < \varepsilon, \ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

dasselbe Vorzeichen und verschwindet nur für $y' = p$.

Nach dem Vorigen ist nun, wenn ϱ und ϱ' hinreichend klein sind, die Voraussetzung (b′) für jede Kurve der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ erfüllt, und es ist offenbar möglich, ϱ und ϱ' noch so klein zu bestimmen, daß auch die Voraussetzung (c′) für diese Kurven erfüllt ist und daß, wenn die Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ einer solchen Kurve entsprechen, die Ungleichungen

$$|\lambda(x) - \lambda_0| < \varepsilon, \quad |p(x) - y'(x)| < \varepsilon$$

im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ bestehen. Die Funktion $E(x, y, y', p(x), \lambda(x))$ kann dann auf einer solchen Kurve nicht negativ werden, und da sie längs einer Kurve, die die Voraussetzung (a′) erfüllt, nicht identisch verschwinden kann, gibt uns die Gleichung (5) für diese letzten Kurven

$$\int_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int_{c} F(x, y, y')\,dx > 0,$$

und hiermit ist gezeigt, daß c wirklich so genanntes schwaches relatives Minimum ergibt.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn sich auch die Voraussetzung (b′) unter sehr allgemeinen Bedingungen als erfüllt nachweisen ließe, uns doch bei der Ausnutzung der Voraussetzung (c) zu näherer Bestimmung der Art des Extremums neue Schwierigkeiten entgegentreten würden. Wenn ϱ' irgend einen festen Wert hat, können wir nämlich nicht durch Verkleinerung nur von ϱ bewirken, daß die zu den Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ gehörigen Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ von λ_0 resp. $y'(x)$ beliebig wenig verschieden sind, und es scheint also, als ob die Voraussetzung (c) für kein bestimmtes ϱ' hinreichend sei, um die Unveränderlichkeit des Vorzeichens von dem Integrande der Gleichung (5) längs den Kurven einer entsprechenden Kurvengesamtheit allgemein zu sichern.

Im folgenden wollen wir zeigen, wie diese Schwierigkeiten sich umgehen lassen, und zunächst wollen wir den Grundgedanken, der den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet, kurz andeuten.

3. Soll das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda_0)\,dx \tag{6}$$

zu einem absoluten Minimum gemacht werden, so ist die **Lagrangesche** Gleichung des Problems

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, y', \lambda_0) - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, y', \lambda_0) = 0,$$

und dieselbe wird offenbar von der Kurve C befriedigt. Es sei c' eine die Endpunkte von c verbindende reguläre Kurve, die dem Integrale (6) einen größeren Wert als c gibt. Man hat dann, zufolge der Definition von $H(x, y, y', \lambda)$,

$$\int_{c'} F\,dx - \int_{c} F\,dx - \lambda_0 \left(\int_{c'} G\,dx - \int_{c} G\,dx\right) > 0,$$

und wenn der Bogen c' noch die Eigenschaft hat, dem Integrale (3) denselben Wert wie c zu geben, erhält man also

$$\int_{c'} F\,dx - \int_{c} F\,dx > 0.$$

Es werde jetzt angenommen, daß der Bogen c sich mit einem Felde im Sinne des obigen Problems umgeben läßt. Auf Grund der Voraussetzungen (b) und (c) folgt dann aus dem Satze des Paragraphen 1, daß, wenn ϱ hinreichend klein ist, c sicher im Vergleich mit den Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$ absolutes Minimum des Integrals (6) ergibt. Dann gibt aber nach dem Obigen jede Kurve dieser Gesamtheit, die die Voraussetzung (a') erfüllt, dem Integrale (1) einen größeren Wert als c, und hieraus folgt unmittelbar, daß der dem Satze des Paragraphen 1 analoge Satz bei dem Problem des relativen Extremums wenigstens in dem Falle richtig ist, wo sich der betrachtete Bogen mit einem Felde, das dem oben angegebenen Problem des absoluten Extremums entspricht, umgeben läßt.

Indem wir annehmen, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist, setzen wir jetzt fernerhin voraus, c' sei eine die Endpunkte von c verbindende reguläre Kurve, und bezeichnen mit $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \cdots, \xi_n\eta_n$ die Koordinaten einer Reihe von Punkten, die auf c' so liegen, daß $\xi_i < \xi_{i+1}$, und von denen $\xi_1\eta_1$ und $\xi_n\eta_n$ mit den Punkten 1 und 2 zusammenfallen. Ferner wollen wir annehmen, daß es einen solchen Wert λ' von λ gibt, daß jede zwei aufeinander folgende Punkte dieser Reihe vermittels Integralkurven der Gleichung (4) verbunden werden können, die dem Werte λ' von λ entsprechen, und daß die aus diesen Bogen zusammengesetzte, die Endpunkte von c verbindende Kurve c'' dem Integrale (3) denselben Wert gibt wie c. Schließlich mögen die Stücke von c' und c'', die zwischen den Punkten $\xi_i\eta_i$ und $\xi_{i+1}\eta_{i+1}$ fallen, mit c_i' und c_i'' bezeichnet werden.

Obgleich nun c nicht mit einem Felde im Sinne des Problems, das Integral (6) zu einem absoluten Minimum zu machen, umgeben werden kann, ist es jedoch möglich, daß die einzelnen Bogen c_i'' sich mit Feldern im Sinne des Problems, das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda')\,dx$$

zu einem absoluten Minimum zu machen, umgeben lassen. Wir wollen annehmen, daß dies der Fall ist und daß, mit Anwendung der Gleichung (2), sich zeigen läßt:

$$\int_{c_i'} H(x, y, y', \lambda')\,dx - \int_{c_i''} H(x, y, y', \lambda')\,dx > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Summieren wir von $i = 1$ bis $i = n - 1$, erhalten wir, mit Beachtung der Definition von $H(x, y, y', \lambda')$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i'} F\,dx - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i''} F\,dx - \lambda' \left(\sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i'} G\,dx - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i''} G\,dx \right) > 0;$$

wenn c' die Voraussetzung (a′) erfüllt, so folgt hieraus, wegen unserer Annahme, daß dies auch mit c'' der Fall ist,

$$\int_{c'} F\,dx - \int_{c''} F\,dx > 0.$$

Nun ist es nach § 2 stets möglich, ϱ und ϱ' so klein zu bestimmen, daß c im Vergleich mit den Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ relatives Minimum des Integrals (1) ergibt. Wenn auch c' nicht dieser Gesamtheit angehört, ist es offenbar möglich, daß c'' eine Kurve derselben ist, und wenn dies der Fall ist, hat man

$$\int_{c''} F\,dx - \int_{c} F\,dx > 0$$

und folglich auch

$$\int_{c'} F\,dx - \int_{c} F\,dx > 0.$$

Es öffnet sich also hier ein neuer Weg, die Kurve c mit benachbarten Kurven hinsichtlich der Werte, die sie dem Integrale (1) erteilen, zu vergleichen. Im folgenden wird gezeigt, wie sich der oben angedeutete Gedanke streng durchführen läßt und uns zu der Ausdehnung des Satzes des § 1 auf das Problem des relativen Extremums führt.

Zunächst werden wir eine Reihe von Hilfssätzen beweisen, die wir für unseres Hauptproblem brauchen.

4. Da die Gleichung (4) von der zweiten Ordnung ist, wird das allgemeine Integral derselben außer von λ, das schon in der Gleichung vorkommt, noch von zwei willkürlichen Parametern abhängen. Wir wollen zunächst eine Schar von Integralkurven in Betracht ziehen, die außer von λ nur von einem Parameter $\varkappa$ abhängt. Es sei $y = g(x, \lambda, \varkappa)$ die Gleichung einer solchen Schar, aus welcher C für $\lambda = \lambda_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ hervorgeht, und von der Funktion $g(x, \lambda, \varkappa)$ werde angenommen, daß sie in der Umgebung jedes Wertsystems $x_1 \leq x \leq x_2$, $\lambda = \lambda_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ regulär ist.

Wenn man die Funktion $g(x, \lambda, \varkappa)$ und ihre Ableitung nach x anstatt y und y' in die Gleichung (4) einführt und die so erhaltene Identität nach $\varkappa$ differenziert, ergibt sich, daß die Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \varkappa}(x, \lambda_0, \varkappa_0)$ einer linearen Differentialgleichung

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \qquad \left(u' = \frac{du}{dx}, \ u'' = \frac{d^2u}{dx^2}\right) \tag{7}$$

genügt, wo $p(x)$ und $q(x)$ zufolge der Voraussetzung (b) im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ reguläre analytische Funktionen sind, die nur von der Gleichung $y = y(x)$ von C und von den Funktionen $F(x, y, y')$ und $G(x, y, y')$ abhängen, aber keineswegs von der Art, wie der Parameter $\varkappa$ in der Funktion $g(x, \lambda, \varkappa)$ eingeht.

Wir wollen einige Sätze hinsichtlich der Integrale von (7) ableiten.

Wenn ξ ein Wert von x in dem Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ ist und a eine gewisse positive Zahl bedeutet, so sei $u_a(x)$ das Integral von (7), das den Bedingungen $u_a(\xi) = a$, $u_a'(\xi) = 0$ genügt. Da u_a eine nebst ihren Ableitungen stetige Funktion von x sein muß, können wir erstens einen solchen Intervall $|x - \xi| < l_1$ abgrenzen, daß in demselben $|u_a| < 2a$, $|u_a'| < 2a$. Aus (7) folgt dann, wenn M der größte Wert ist, den irgend eine der Funktionen $|p(x)|$ und $|q(x)|$ im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ annimmt, daß im Intervalle $|x - \xi| < l_1$ die Ungleichung $|u_a''| < 4aM$ besteht, und hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} |u_a'| &< 4aM\,|x - \xi| \\ |u_a| &< a + 2aM(x - \xi)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

für dieselben Werte von x. Wenn aber l_2 die kleinere der Größen 1 und $\frac{1}{2M}$ bedeutet, so sind die rechten Seiten dieser Ungleichungen für $|x - \xi| < l_2$ kleiner als $2a$. Wir werden sehen, daß dies auch mit den linken Seiten der Fall sein muß.

Wenn x vom Werte ξ ausgehend stetig bis zu dem Werte $\xi + l_2$ wächst, gelten nach dem Obigen die Ungleichungen (8) sicher, solange $|u_a| < 2a$ und $|u_a'| < 2a$. Andrerseits kann keine der Funktionen $|u_a|$ und $|u_a'|$ den Wert $2a$ im Intervalle $\xi < x < \xi + l_2$ erreichen, ohne daß diese Ungleichungen schon vordem aufgehört haben zu gelten. Die genannten Ungleichungen müssen also in dem ganzen in Frage stehenden Intervalle bestehen, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der oben gemachten Behauptung.*)

*) Ernst Lindelöf bedient sich in einer Abhandlung „Demonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles“ (Journal de Mathématiques 1900) einer analogen Schlußweise.

Im Intervalle $|x-\xi|<l_2$ hat man nun somit $|u_a''|<4aM$ und daraus folgt, da $u_a'(\xi)=0$,

$$u_a > a - 2aM(x-\xi)^2.$$

Beachtet man die Bedeutung von l_2, so kann man hieraus den Schluß ziehen, daß u_a im Intervalle $|x-\xi|<l_2$ nicht Null wird. Da l_2 in keiner Weise von ξ abhängt, kann man also den folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz 1. *Es läßt sich eine nur von $p(x)$ und $q(x)$ abhängige positive Größe l derart bestimmen, daß, wenn $u(x)$ irgend ein Integral von (7) ist und die Ableitung $u'(x)$ für einen Wert ξ von x aus dem Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$, für welchen $u(x)$ nicht verschwindet, Null wird, die Funktion $u(x)$ im Intervalle $|x-\xi|<l$ von Null verschieden sein muß.*

Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich noch:

Hilfssatz 2. *Hat ein Integral $u(x)$ von (7) in zwei Punkten ξ_1 und ξ_2 ($\xi_1<\xi_2$) dasselbe Vorzeichen, ohne zu verschwinden, und ist $\xi_2-\xi_1<l$, so kann das Integral $u(x)$ im Intervalle $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ nicht Null werden.*

In der Tat, wenn das Integral $u(x)$ im Intervalle $\xi_1<x<\xi_2$ verschwinden würde, müßte dasselbe in diesem Intervalle ein Maximum oder Minimum besitzen und die Ableitung der Funktion $u(x)$ müßte also auch in demselben Null werden. Wenn nun $u'(x)$ in einem Punkte verschwinden würde, wo auch $u(x)$ Null ist, müßte offenbar $u(x)$ identisch verschwinden, und wenn das Verschwinden von $u'(x)$ in einem Punkte stattfinden würde, wo $u(x)$ einen endlichen Wert hat, müßte $u(x)$ nach dem Hilfssatze 1 in dem betrachteten Intervalle von Null verschieden bleiben. Da diese beiden Konsequenzen unseren Annahmen widersprechen, folgt hieraus die Richtigkeit des Satzes 2.

Es seien jetzt ξ ein Wert von x zwischen x_1 und x_2 und

$$y = y_\xi(x, \nu, \mu, \lambda)$$

das allgemeine Integral von (4), wo ν und μ so gewählt sind, daß

$$\nu = y_\xi(\xi, \nu, \mu, \lambda),$$

$$\mu = \frac{\partial y_\xi}{\partial x}(\xi, \nu, \mu, \lambda).$$

Wenn ν_0, μ_0 und λ_0 die Werte der Parameter sind, die der Kurve C entsprechen, so ist, wegen der Voraussetzung (b), die Funktion $y_\xi(x, \nu, \mu, \lambda)$ in der Umgebung jedes Wertsystems $x_1 \leq x \leq x_2$, $\nu=\nu_0$, $\mu=\mu_0$, $\lambda=\lambda_0$ eine reguläre analytische Funktion ihrer Argumente und aus der gemachten Annahme über die Parameter ν und μ folgt:

$$\frac{\partial y_\xi}{\partial \nu}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 1, \quad \frac{\partial^2 y_\xi}{\partial \nu\, \partial x}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0,$$
$$\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_\xi}{\partial \mu\, \partial x}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 1,$$
$$\frac{\partial y_\xi}{\partial \lambda}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_\xi}{\partial \lambda\, \partial x}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0.$$

Wenden wir den Satz 1 auf die Ableitungen $\frac{\partial y_\xi}{\partial \nu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ und $\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ an, so erhalten wir, mit Berücksichtigung dieser letzten Gleichungen, ohne Schwierigkeit den folgenden Satz:

Hilfssatz 3. *Die Ableitung* $\frac{\partial y_\xi}{\partial \nu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ *ist im Intervalle* $|x - \xi| < l$ *positiv, ohne zu verschwinden, und die Ableitung* $\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ *ist Null für* $x = \xi$, *negativ im Intervalle* $\xi - l < x < \xi$ *und positiv im Intervalle* $\xi < x < \xi + l$.

Schließlich wollen wir, indem wir zur Abkürzung die Ableitungen $\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ und $\frac{\partial y_\xi}{\partial \lambda}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ mit $y_\mu(x)$ und $y_\lambda(x)$ bezeichnen, einen Satz hinsichtlich des Quotienten $\frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}$ beweisen.

Die Funktion $y_\lambda(x)$ genügt nicht der linearen Differentialgleichung (7), sondern man hat, wenn $r(x)$ die Funktion von x bedeutet, die durch Einführung von $y(x)$, $y'(x)$ und λ_0 anstatt y, y' und λ in dem Ausdrucke

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) : \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}$$

entsteht,

$$\frac{d^2 y_\lambda}{dx^2} + p(x)\frac{d y_\lambda}{dx} + q(x) y_\lambda + r(x) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $y_\mu(x)$ und subtrahieren aus der so entstandenen Gleichung die Gleichung

$$y_\lambda(x)\left(\frac{d^2 y_\mu}{dx^2} + p(x)\frac{d y_\mu}{dx} + q(x) y_\mu\right) = 0,$$

erhalten wir, wenn $y_\mu y_\lambda' - y_\lambda y_\mu' = w$ gesetzt wird,

$$\frac{dw}{dx} + pw + r y_\mu = 0,$$

und hieraus folgt, da $w(\xi) = 0$,

$$w = -e^{-\int_\xi^x p(x)\,dx} \cdot \int_\xi^x r(x)\, y_\mu(x)\, e^{\int_\xi^x p(x)\,dx}\, dx$$

Es sei jetzt l_1 eine positive Größe, die kleiner als l ist, und es werde angenommen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} \tag{9}$$

für alle durch die Elemente des Stückes von c, das zwischen die Geraden $x = \xi$ und $x = \xi + l_1$ fällt, definierte Wertsysteme von x, y und y' dasselbe Vorzeichen behält und nur möglicherweise in den Endpunkten des Stückes verschwindet. Da nach dem Satze 3 $y_\mu(x)$ in dem Intervalle $\xi < x < \xi + l_1$ positiv und von Null verschieden ist, folgt aus der obigen Gleichung, wenn noch die Voraussetzung (b) beachtet wird, daß w und der Ausdruck (9) in demselben entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nun ist aber

$$\frac{d}{dx}\frac{y_\lambda}{y_\mu} = \frac{w}{(y_\mu)^2}.$$

Die Ableitung des Quotienten $\frac{y_\lambda}{y_\mu}$ wird also positiv oder negativ, je nachdem der Ausdruck (9) negativ oder positiv ist, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hilfssatz 4. *Wenn der Ausdruck* (9) *auf der Strecke von c zwischen die Geraden $x = \xi$ und $x = \xi + l_1$ $(l_1 < l)$ dasselbe Vorzeichen behält und nur möglicherweise in den Endpunkten des Stückes verschwindet, so ist der Quotient $\frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}$ in dem Intervalle $\xi < x < \xi + l_1$ beständig zunehmend oder beständig abnehmend, je nachdem der genannte Ausdruck in demselben negativ oder positiv ist.*

5. Es seien jetzt $x_0 y_0$ und $\xi_0 \eta_0$ zwei Punkte von c, die so liegen, daß, wenn l die Konstante des Satzes 1 ist, die Ungleichungen $x_0 > \xi_0$, $x_0 - \xi_0 < l$ bestehen. Alsdann behaupten wir, daß, wenn die Punkte $x'y'$ und $\xi\eta$ gewissen Umgebungen der Punkte $x_0 y_0$ und $\xi_0\eta_0$ angehören und λ' ein beliebiger Wert von λ aus einem gewissen, den Wert λ_0 enthaltendem Intervalle ist, die Punkte $x'y'$ und $\xi\eta$ vermittels einer Integralkurve von (4), die dem Wert λ' entspricht, verbunden werden können.

In der Tat, wenn $y = y_{\xi_0}(x, \nu, \mu, \lambda)$ das allgemeine Integral von (4) ist, wo ν und μ so gewählt sind, daß

$$\nu = y_{\xi_0}(\xi_0, \nu, \mu, \lambda), \qquad \mu = \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial x}(\xi_0, \nu, \mu, \lambda),$$

hat man, zufolge dieser Annahme betreffend der Parameter,

$$\frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \nu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda) = 1, \qquad \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0.$$

Ferner ist, auf Grund des Satzes 3,

$$\frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(x_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) \neq 0$$

und also wird

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \nu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0), & \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \nu}(x_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0), & \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(x_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Gleichungen

$$y' = y_{\xi_0}(x', \nu, \mu, \lambda),$$
$$\eta = y_{\xi_0}(\xi, \nu, \mu, \lambda)$$

können somit in der Umgebung des Wertsystems $y' = y_0$, $x' = x_0$, $\eta = \eta_0$, $\xi = \xi_0$, $\lambda = \lambda_0$ nach ν und μ aufgelöst werden, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der oben gemachten Behauptung.

Führen wir die durch die obigen Gleichungen definierten Funktionen ν und μ in $y_{\xi_0}(x, \nu, \mu, \lambda)$ ein, so entsteht eine Funktion der sechs Argumente x, x', y', ξ, η und λ, die wir mit $\vartheta(x, x', y', \xi, \eta, \lambda)$ bezeichnen wollen. Diese Funktion ist offenbar regulär in der Umgebung jedes Wertsystems

$$x_1 \leq x \leq x_2, \; y' = y(x'), \; \eta = y(\xi), \; |x' - \xi| < l, \; \lambda = \lambda_0$$

und die Gleichung

$$y = \vartheta(x, x', y', \xi, \eta, \lambda)$$

stellt die durch die Punkte $x'y'$ und $\xi\eta$ gehende Integralkurve der Gleichung (4) mit der isoperimetrischen Konstante λ dar.

6. Wir wollen jetzt das Integral (3) längs einer Lagrangeschen Kurve mit der isoperimetrischen Konstante λ vom Punkte $x'y'$ bis zu dem Punkte $\xi\eta$ derselben erstreckt in Betracht nehmen. Indem wir dieses Integral, das offenbar eine in der Umgebung jedes Wertsystems

$$|x' - \xi| < l, \; y' = y(x'), \; \eta = y(\xi), \; \lambda = \lambda_0$$

reguläre Funktion von x', y', ξ, η und λ ist, mit $\Theta(x', y', \xi, \eta, \lambda)$ bezeichnen, soll der folgende Satz bewiesen werden:

Hilfssatz 5. *Wenn $x_0 y_0$ und $\xi_0 \eta_0$ solche Punkte von c sind, daß $x_0 > \xi_0$ und $x_0 - \xi_0 < l$, und der Ausdruck (9) auf der Strecke von c zwischen den Geraden $x = \xi_0$ und $x = x_0$ dasselbe Vorzeichen behält und nur möglicherweise in den Endpunkten des Stückes Null wird, so ist die Ableitung*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \lambda_0)$$

positiv und nicht Null.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = y_\mu(x), \qquad \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \lambda}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = y_\lambda(x),$$

und weiter, indem wir die Funktion $\mu = \varphi(\lambda)$ durch die Gleichung

$$y_{\xi_0}(x_0, \nu_0, \mu, \lambda) = y_0$$

definieren,

$$y_{\xi_0}(x, \nu_0, \varphi(\lambda), \lambda) = g(x, \lambda).$$

Die Gleichung $y = g(x, \lambda)$ stellt dann die Integralkurven von (4) dar, die durch die Punkte $x_0 y_0$ und $\xi_0 \eta_0$ gehen, und man hat somit

$$\Theta(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \lambda) = \int_{\xi_0}^{x_0} G(x, g(x, \lambda), g'(x, \lambda))\, dx,$$

woraus folgt, wenn man nach λ differenziert und rechts partiell integriert,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \lambda_0) = \int_{\xi_0}^{x_0} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\frac{\partial g}{\partial \lambda}\, dx, \tag{10}$$

wobei auf der rechten Seite $\lambda = \lambda_0$ zu setzen ist. Wir wollen das Vorzeichen der Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ näher untersuchen.

Aus der Definition von $g(x, \lambda)$ folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \lambda_0) = y_\mu(x)\frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_0) + y_\lambda(x) = y_\mu(x)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_0) + \frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}\right).$$

Der erste Faktor rechts ist nach dem Satze 3 im Intervalle $\xi_0 < x < x_0$ positiv und das Vorzeichen des ganzen Ausdruckes hängt also vom zweiten Faktor ab. Da nach der Definition von $\varphi(\lambda)$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_0) = -\frac{y_\lambda(x_0)}{y_\mu(x_0)},$$

so ist dieser Faktor für $x = x_0$ Null. Da ferner das zweite Glied $\frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}$ nach dem Satze 4 in dem Intervalle $\xi_0 < x < x_0$ beständig zunehmend oder beständig abnehmend ist, je nachdem der Ausdruck (9) in demselben negativ oder positiv ist, so folgt hieraus, daß der in Frage stehende Faktor und somit die Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ in demselben Intervalle positiv oder negativ ist, je nachdem der Ausdruck (9) positiv oder negativ ist. Der Integrand der Gleichung (10) ist also bei unseren Voraussetzungen immer positiv und das ganze Integral also positiv und nicht Null. Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

7. Wir führen jetzt die Voraussetzung ein, daß der Ausdruck (9) auf der Kurve c nicht überall verschwindet. Derselbe kann dann offenbar nur

eine endliche Anzahl von Nullstellen auf c besitzen; es sei $a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n$ eine Reihe von Punkten dieses Bogens, unter welchen sich alle Nullpunkte von (9) befinden und von welchen $a_1 b_1$ und $a_n b_n$ mit den respektiven Punkten 1 und 2 zusammenfallen, und es werde angenommen, daß die Abszissen a_i den Ungleichungen

$$a_i < a_{i+1}, \quad a_{i+1} - a_i < l \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

genügen.

Wenn λ von λ_0 und $y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}$ von den respektiven Werten $b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}$ wenig verschieden sind, können nach § 5 und zufolge unserer Voraussetzungen betreffend die Punkte $a_i b_i$ jede zwei aufeinander folgende Punkte der Reihe $a_1 b_1$, $a_2 y_2$, $\cdots$, $a_{n-1} y_{n-1}$, $a_n b_n$ vermittels Integralkurven von (4) mit der isoperimetrischen Konstante λ verbunden werden; wir betrachten das Integral (3) über die aus diesen Kurven zusammengesetzte die Punkte 1 und 2 verbindende Kurve erstreckt. Dieses Integral wird offenbar eine in der Umgebung des Wertsystems $b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0$ reguläre Funktion der Argumente $y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}$ und λ sein und wenn diese Funktion mit $\Phi(y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, \lambda)$ bezeichnet wird, hat man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, \lambda_0).$$

Da zufolge unserer Annahme über die Punkte $a_i b_i$ der Ausdruck (9) zwischen jeden zweier solcher Punkte ein festes Vorzeichen behält, ohne zu verschwinden, so ist nach dem Satze 5

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, \lambda_0) > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

und also wird auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0) \neq 0.$$

Dies zeigt uns aber, daß die Gleichung

$$\Phi(y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, \lambda) = \Phi(b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0)$$

in der Umgebung des Wertsystems $y_2 = b_2$, $y_3 = b_3$, $\cdots$, $y_{n-1} = b_{n-1}$ nach λ aufgelöst werden kann, d. h. daß, wenn irgend eine Punktreihe $a_2 y_2, a_3 y_3, \cdots, a_{n-1} y_{n-1}$ aus der Umgebung der Reihe $a_2 b_2, a_3 b_3, \cdots, a_{n-1} b_{n-1}$ gegeben ist, es möglich ist, λ so zu bestimmen, daß das Integral (3) längs der aus den entsprechenden Lagrangeschen Kurven zusammengesetzten Kurve erstreckt, denselben Wert erhält, wie wenn es über c erstreckt wird. Wenn wir mit S_h den Flächenstreifen bezeichnen, der von den Kurven $y = y(x) + h$ und $y = y(x) - h$ und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt ist, können wir also den folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz 6. *Es läßt sich eine positive Größe* h_1 *so feststellen, daß, wenn* $h < h_1$, *zu jeder Punktreihe* $a_1 b_1, a_2 y_2, \cdots, a_{n-1} y_{n-1}, a_n b_n$ *innerhalb* S_h *ein solcher Wert* λ' *von* λ *gehört, daß jede zwei aufeinander folgende Punkte dieser Reihe vermittels regulärer Integralkurven von* (4) *mit der isoperimetrischen Konstante* λ' *verbunden werden können und daß die aus dieser Kurven zusammengesetzte, die Endpunkte von* c *verbindende Kurve dem Integrale* (3) *denselben Wert wie* c *gibt.*

Wir bezeichnen mit T_h die Gesamtheit aller die Punkte 1 und 2 verbindenden, aus Integralkurven von (4) zusammengesetzten Kurven, die in der oben angegebenen Weise Punktreihen $a_2 y_2, a_3 y_3, \cdots, a_{n-1} y_{n-1}$ innerhalb S_h entsprechen. Ferner sei λ_h die obere Grenze der zu diesen Kurven gehörigen Werten von $|\lambda' - \lambda_0|$.

Die Größe λ_h verschwindet offenbar gleichzeitig mit h, und da die Kurven T_h von Stücken der Kurven $y = \vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$ (§ 5) zusammengesetzt sind, wo $|y_i - b_i| < h$, $|y_{i+1} - b_{i+1}| < h$ und $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_h$, so können wir hieraus und aus der Regularität der Funktion

$$\vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$$

in der Umgebung der Wertsysteme

$$a_i \leq x \leq a_{i+1}, \quad y_i = b_i, \quad y_{i+1} = b_{i+1}, \quad \lambda = \lambda_0$$

noch auf das Bestehen des folgenden Satzes schließen:

Hilfssatz 7. *Wenn die positiven Größen* ϱ *und* ϱ' *noch so klein festgestellt worden sind, kann doch stets durch hinreichende Verkleinerung von* h *bewirkt werden, daß alle Kurven* T_h *der Gesamtheit* $T_{\varrho\varrho'}$ *angehören.*

8. Wir wollen jetzt noch untersuchen, inwiefern sich die Stücke der Kurven T_h mit Feldern umgeben lassen, die dem Problem das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda)\, dx, \tag{11}$$

wo λ die zu der betrachteten Kurve gehörige isoperimetrische Konstante ist, zu einem absoluten Minimum zu machen entsprechen. Wir haben also das zwischen den Geraden $x = a_i$ und $x = a_{i+1}$ fallende Stück einer Kurve $y = \vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$ zu untersuchen unter der Annahme, daß $|y_i - b_i| < h$, $|y_{i+1} - b_{i+1}| < h$, $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_h$.

Wenn wir

$$\vartheta(x, a_i, y_i + \varkappa, a_{i+1}, y_{i+1} + \varkappa, \lambda) = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$$

setzen, stellt offenbar die Gleichung $y = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$, wenn darin nur $\varkappa$ als variabel angenommen wird, eine Schar von Integralkurven der Gleichung (4) dar, woraus die Kurve $y = \vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$ für $\varkappa = 0$ hervorgeht. Ferner kann man unmittelbar aus der Definition von φ schließen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x_i, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x_{i+1}, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) = 1.$$

Hieraus folgt weiter, nach dem Satze 2, daß die Ableitung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0)$$

im Intervalle $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ größer als Null bleibt und da $\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$ in der Umgebung der Wertsysteme $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $y_i = b_i$, $y_{i+1} = b_{i+1}$, $\varkappa = 0$, $\lambda = \lambda_0$ in bezug auf ihre sämtlichen Argumente regulär ist, ist es also möglich, eine positive Größe ε so klein zu wählen, daß die Ungleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda) > 0$ im Bereiche

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad |y_i - b_i| < \varepsilon, \quad |y_{i+1} - b_{i+1}| < \varepsilon, \quad |\varkappa| < \varepsilon, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

besteht.

Mit m bezeichnen wir das Minimum von $\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$ in diesem Bereiche und mit M das Maximum der Summe $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y_{i+1}}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right|$ in demselben. Ist ε_1 eine positive Größe $< \varepsilon$ und genügen y_i, y_{i+1} und λ den Bedingungen

$$|y_i - b_i| < \varepsilon_1, \quad |y_{i+1} - b_{i+1}| < \varepsilon_1, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1,$$

hat man

$$|\varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda) - \varphi(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0)| < M\varepsilon_1$$

für $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Andrerseits ist aber, wenn $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$, für dieselben Wertsysteme von y_i, y_{i+1} und λ

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda) > m\varepsilon_2$$

und

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, -\varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda) < -m\varepsilon_2.$$

Bestimmen wir nun ε_1 so, daß $m\varepsilon_2 > M\varepsilon_1$ und setzen wir $m\varepsilon_2 - M\varepsilon_1 = \delta$, wird also sicher

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \quad \varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) > \delta,$$
$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, -\varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) < -\delta$$

für

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad |y_i - b_i| < \varepsilon_1, \quad |y_{i+1} - b_{i+1}| < \varepsilon_1, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1.$$

Dies besagt aber, daß die Kurven der Schar $y = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$, die den Werten von $\varkappa$ zwischen $-\varepsilon_2$ und $+\varepsilon_2$ entsprechen, das Gebiet, das von den Kurven $y = y(x) + \delta$ und $y = y(x) - \delta$ und den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ begrenzt ist, vollständig ausfüllen. Da sie eine Gesamtheit von Lagrangeschen Kurven mit derselben isoperimetrischen Konstante λ sind, und die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$ für $|\varkappa| < \varepsilon_2$ nicht verschwindet, so bilden diese Kurven in dem genannten Gebiete ein Feld im Sinne des Problems, das Integral (11) zu einem absoluten Minimum zu machen, das die Kurve $y = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda)$ umgibt. Nehmen wir nun h kleiner als δ und ε_1 und noch so, daß auch $\lambda_h < \varepsilon_1$, kann also das zwischen den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ fallende Stück jeder Kurve der Gesamtheit T_h mit einem solchen Felde umgeben werden, daß der Teil von S_h, der zwischen diese Geraden fällt, vollständig bedeckt wird. Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz 8. *Es läßt sich eine solche positive Größe h_2 bestimmen, daß, wenn $h < h_2$, jedes einzelne Stück einer Kurve der Gesamtheit T_h mit der isoperimetrischen Konstante λ mit einem Felde im Sinne des Problems, das Integral* (11) *zu einem absoluten Minimum zu machen, umgeben werden kann, und daß dieses Feld den Teil des Flächenstreifens S_h zwischen den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ vollständig ausfüllt.*

9. Indem wir unter h_1 und h_2 die Konstante der Sätze 6 und 8 verstehen, sei jetzt angenommen, daß $h < h_1$ und h_2 ist und es sei c' eine die Endpunkte von c verbindende Kurve, die in ihrer ganzen Ausdehnung im Inneren von S_h verläuft und dem Integrale (3) denselben Wert wie c gibt. Nach dem Satze 6 gibt es sicher eine Kurve c'' der Gesamtheit T_h, die durch die Schnittpunkte von c' mit den Geraden

$$x = a_2,\ x = a_3,\ \cdots,\ x = a_{n-1}$$

geht; es seien $y_2', y_3', \cdots, y_{n-1}'$ die Ordinaten dieser Schnittpunkte. Ferner seien c_i' und c_i'' die Teile von c' und c'', die zwischen den Geraden $x = a_i$ und $x = a_{i+1}$ fallen, und λ' der Wert von λ, der der Kurve c'' entspricht. Die Kurvenschar $y = \varphi(x, y_i', y_{i+1}', \varkappa, \lambda')$ bildet dann ein das Kurvenstück c_i'' umgebendes Feld im Sinne des Problems, das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda')\, dx$$

zu einem absoluten Minimum zu machen, und dieses Feld bedeckt, zufolge unserer obigen Annahme über die Größe von h und nach dem Satze 8, vollständig den Teil von S_h, der zwischen den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ fällt. Wenn $p_{c'}(x, y)$ die Funktion von x und y bedeutet, die in jedem Punkte eines solchen Gebietes mit der Ableitung der durch denselben gehenden Kurve des zugehörigen Feldes übereinstimmt, hat man nach Paragraph 1

$$\int_{c_i'} H(x, y, y', \lambda') - \int_{c_i''} H(x, y, y', \lambda')\, dx = \int_{c_i'} E(x, y, y', p_{c'}(x, y), \lambda')\, dx$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

wo die Funktion E die im Paragraph 2 definierte Funktion von x, y, y', p und λ bedeutet. Wenn man die Summe beiderseits von $i = 1$ bis $i = n-1$ bildet und beachtet, daß c' und c'' dem Integrale (3) denselben Wert erteilen, erhält man hieraus

$$(12)\quad \int_{c'} F(x, y, y')\, dx - \int_{c''} F(x, y, y')\, dx = \int_{c'} E(x, y, y', p_{c'}(x, y), \lambda')\, dx.$$

In der rechten Seite dieser Gleichung sind nun noch λ' und $p_{c'}(x, y)$ Größen, die von der Gestalt der Kurve c' abhängen. Diese Abhängigkeit hat aber jetzt nicht mehr denselben Charakter, wie die Abhängigkeit der Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ von c' in der Gleichung (5), sondern wir können jetzt auf Grund der erhaltenen Gleichung Schlüsse machen, die denen des Paragraphen 1 analog sind.

Zunächst sei folgendes hinsichtlich der Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ bemerkt.

Aus der Voraussetzung (b) folgt erstens, wie schon im Paragraph 2 gezeigt wurde, daß, wenn ε_1 eine hinreichend kleine positive Konstante ist, die Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon_1, \ |y' - y'(x)| < \varepsilon_1, \ |p - y'(x)| < \varepsilon_1, \ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1$$

positiv bleibt und nur für $y' = p$ verschwindet. Andrerseits wird diese Funktion zufolge der Voraussetzung (c) für

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0', \quad p = y'(x), \quad \lambda = \lambda_0$$

positiv, ohne zu verschwinden, und da sie in der Umgebung dieser Wertsysteme stetig ist, so kann man eine solche positive Konstante ε_2 finden, daß sie noch im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon_2, \ \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0', \ |p - y'(x)| \leq \varepsilon_2, \ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_2$$

positiv wird, ohne zu verschwinden. Wenn $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$ und ε_2, wird also die Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ im ganzen Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon_3, \ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0', \ |p - y'(x)| < \varepsilon_3, \ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_3$$

positiv und verschwindet nur für $p = y'$.

Nun ist es offenbar, da $|\lambda' - \lambda_0| < \lambda_h$ und die Funktion

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$$

für jedes i in der Umgebung der Wertsysteme

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_i = b_i, \quad y_{i+1} = b_{i+1}, \quad \varkappa = 0, \quad \lambda = \lambda_0$$

regulär ist, möglich, η_1 so klein zu bestimmen, daß, wenn $h < \eta_1$ und c' im Inneren von S_h verläuft, erstens $|\lambda' - \lambda_0| < \varepsilon_3$ und zweitens in jedem Punkte von c' die Ungleichung $|p_{c'}(x, y) - y'(x)| < \varepsilon_3$ besteht. Wenn $\varrho < \eta_1$ und ε_3 und c' der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$ angehört, wird also

$$E(x, y, y', p_{c'}(x, y), \lambda')$$

in jedem Punkte von c' positiv und die Gleichung (12) gibt uns folglich

$$\int\limits_{c'} F(x, y, y')\, dx - \int\limits_{c''} F(x, y, y')\, dx \geq 0,$$

wobei die Gleichheit nur dann besteht, wenn c' und c'' zusammenfallen.

Ferner sei nun noch daran erinnert, daß nach Paragraph 2 c sicher schwaches relatives Minimum des Integrals (1) ergibt. Bedenken wir, daß es nach dem Satze 7 stets möglich ist, durch hinreichende Verkleinerung von h zu bewirken, daß alle Kurven der Gesamtheit T_h einer noch so beschränkten Kurvengesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ angehören, so ist es also möglich, eine solche positive Zahl η_2 zu finden, daß, wenn $h < \eta_2$, alle Kurven T_h zu den Kurven gehören, im Vergleich mit welchen das Minimum besteht. Ist $h < \eta_2$ und verläuft c' in dem Gebiete S_h, hat man folglich

$$\int\limits_{c''} F(x, y, y')\,dx - \int\limits_{c} F(x, y, y_,')\,dx \geq 0_i$$

wobei wieder die Gleichheit nur dann besteht, wenn c'' mit c zusammenfällt. Wenn $\varrho < \eta_1$, η_2 und ε_3, hat man also für jede Kurve c' der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$

$$\int\limits_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int\limits_{c} F(x, y, y')\,dx \geq 0,$$

und wir gelangen somit schließlich, indem wir von dem Ausnahmefalle wo der Ausdruck (9) auf c identisch verschwindet absehen, zu dem folgenden Satze:

Wenn die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(y, \omega)}{\partial(\mu, \lambda)}$ *für jedes Wertsystem*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad \mu = \mu_0, \quad \lambda = \lambda_0$$

und die Ableitung $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, y', \lambda)$ *für alle Wertsysteme*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad y' = y'(x), \quad \lambda = \lambda_0$$

von Null verschieden sind und die Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ *im Bereiche*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad |y' - y'(x)| \leq \varrho_0', \quad p = y'(x), \quad \lambda = \lambda_0$$

dasselbe Vorzeichen behält und nur dann verschwindet, wenn $y' = y'(x)$, *so kann stets* ϱ *so klein gewählt werden, daß die Kurve* c *im Vergleich mit den Kurven der Gesamtheit* $T_{\varrho\varrho_0'}$ *relatives Extremum des Integrals* (1) *ergibt.*