# Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können.

Von **Heinrich Tietze** in Wien.

Der folgenden Arbeit ist die Frage zu Grunde gelegt, wann man aus der Eigenschaft einer analytischen Funktion $\varphi(x)$, einer Funktionalgleichung von der Form

$$\varphi(x+1)=\frac{A(x)\,\varphi(x)+B(x)}{C(x)\,\varphi(x)+D(x)} \tag{1}$$

zu genügen, wo $A$, $B$, $C$, $D$ als rationale Funktionen von $x$ angenommen werden, den Schluß ziehen könne, daß die Funktion $\varphi(x)$ transzendental-transzendent[1]) ist. Gewisse Spezialfälle dieser Frage sind bereits beantwortet worden. So hat Hölder[2]) bewiesen, daß jede analytische Funktion, die einer der beiden Gleichungen

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\frac{1}{x},\quad \varphi(x+1)=x\,\varphi(x)$$

genügt, transzendental-transzendent ist und damit dargetan, daß weder $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ noch $\Gamma(x)$ eine algebraische Differentialgleichung befriedigen kann. Mit Verwendung dieses Resultats hat Hilbert[3]) gefolgert, daß die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ transzendental-transzendent ist, wobei die Tatsache benützt wird, daß jede analytische Lösung einer der beiden Gleichungen

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right),\quad \varphi(x+1)=\frac{-\pi^2}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)}\,\varphi(x)$$

---

[1]) Wir wollen mit Moore (On transcendentally-transcendental functions, Math. Ann. 48) eine Funktion $f(x)$, die einer algebraischen Differentialgleichung, d. h. einer algebraischen Gleichung zwischen $x$, $f(x)$ und einer endlichen Anzahl von Ableitungen von $f(x)$ genügt, als algebraisch-transzendent bezeichnen, während wir eine analytische Funktion transzendental-transzendent nennen, wenn sie keine algebraische Differentialgleichung befriedigt.

[2]) Math. Ann. 28.

[3]) D. Hilbert. Mathematische Probleme. Gött. Nachr. 1900, S. 287.

eine transzendental-transzendente Funktion ist[1]) und daß diesen Funktionalgleichungen die Funktion $2\frac{E'(2x)}{E(2x)}$, beziehungsweise die Funktion $E(2x)$ genügt, wobei $E(s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)}$ gesetzt ist.[2])

Wenn man nun Funktionalgleichungen von der allgemeineren Gestalt (1) betrachtet und sich die Frage vorlegt, ob eine solche Funktionalgleichung mit einer algebraischen Differentialgleichung für die Funktion $\varphi(x)$ verträglich sei oder nicht, so wird man von dem trivialen Fall absehen, daß der Gleichung (1) durch eine rationale Funktion $\varphi(x)$ genügt werden kann, in welchem Falle (1) offenbar mit unendlich vielen algebraischen Differentialgleichungen verträglich ist.[3])

Es zeigt sich zunächst (§ 1), daß jede Gleichung (1) auf die Normalform

$$\varphi(x+1)=\frac{r(x)}{\varphi(x)}+1, \tag{2}$$

in der $r(x)$ eine rationale Funktion bedeutet, gebracht werden kann. Es soll nun gezeigt werden, daß eine Gleichung vom

---

[1]) Die Durchführung des Beweises gibt V. E. E. Stadigh: Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen, und über die Eigenschaft der Funktion $\zeta(s)$, keiner solchen Gleichung zu genügen. Helsingfors, Frenckellska-Tryckeri-aktiebolayet 1902.

[2]) Es ist nämlich

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)}=\pi^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

(Riemanns Ges. W. 2. Aufl., S. 146.)

[3]) Es kann in diesem Falle die Gleichung (1) außer rationalen Lösungen noch andere algebraisch-transzendente Lösungen besitzen. Sei z. B. $u(x)$ eine algebraisch-transzendente Funktion, die der Gleichung $u(x+1)=u(x)$ genügt, $R(x)$ eine rationale Funktion und

$$R(x)-R(x-1)=P(x),\ R(x+1)-R(x-1)=Q(x),$$

dann genügt die Funktion

$$\varphi(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\ \frac{u(x)+R(x+1)}{u(x)+R(x)}$$

der Funktionalgleichung

$$\varphi(x+1)=1-\frac{P(x)P(x+2)}{Q(x)+Q(x+1)}\ \frac{1}{\varphi(x)},$$

und dies ist zugleich die allgemeinste Funktionalgleichung von der im folgenden eingeführten Normalform (2), der eine lineare Funktion von $u(x)$ genügt. Diese Gleichung hat aber auch die rationalen Lösungen $\varphi(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ und $\varphi(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\ \frac{R(x+1)}{R(x)}$.

Normaltypus (2), wenn sie keine rationale Lösung hat und wenn $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, keine algebraisch-transzendenten Lösungen haben kann, daß also alle eventuell vorhandenen analytischen Lösungen transzendental-transzendente Funktionen sein müssen. Das gleiche gilt von jeder Funktionalgleichung (1), wenn sie sich auf eine Gleichung vom Normaltypus, die die genannten Voraussetzungen erfüllt, zurückführen läßt.[1])

Diese Sätze werden im § 5 verwendet, um von einigen Funktionen nachzuweisen, daß sie keine algebraischen Differentialgleichungen befriedigen können.[2])

---

[1]) Unter den Gleichungen (2), die keine rationalen Lösungen haben, sind diejenigen, in welchen $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, nicht die einzigen, welche keine algebraisch-transzendenten Lösungen haben können. So läßt sich z. B., wie die Entwicklungen des § 1 zeigen, die Gleichung $\varphi(x+1) = \varphi(x) + \frac{1}{x}$ auf die Normalform

$$\varphi(x+1) = 1 - \frac{x^2}{(2x-1)(2x+1)} \frac{1}{\varphi(x)}$$

zurückführen, (wobei die dabei auftretende Funktion $r(x)$ im Unendlichen nicht Null wird), und da die erste Gleichung keine algebraisch-transzendenten Lösungen hat, so kann daraus das Gleiche für die zweite Gleichung gefolgert werden. Es mag dahingestellt bleiben, ob der Satz, daß eine Gleichung (2), die keine rationalen Lösungen hat, auch keine algebraisch-transzendenten Lösungen besitzt, ohne Einschränkungen über $r(x)$ gilt.

[2]) Von einer Funktionalgleichung, die nicht die hier betrachtete Gestalt (1) hat, nämlich $\varphi(x^n) = \varphi(x) - x \; (n \geq 2)$, hat Moore (Math. Ann. 48) gezeigt, daß sie mit einer algebraischen Differentialgleichung unvereinbar sei, und daraus gefolgert, daß die Funktion $\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{n^\nu}$ transzendental-transzendent ist. Übrigens ist man auf den verschiedenartigsten Wegen zu transzendental-transzendenten Funktionen gelangt. So hat Painlevé den Satz bewiesen, daß eine eindeutige transzendente Funktion, die nur in einem Teil der Ebene existiert, dort meromorph und nebst allen ihren Ableitungen auf der Begrenzung stetig ist, keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann (Leçons de Stockholm, p. 443), ferner in seinem Heidelberger Vortrag von 1904 (Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles, p. 10) einen Typus von Differentialgleichungen zweiter Ordnung besprochen, deren Lösungen transzendental-transzendente Funktionen der Integrationskonstanten $x_0$, $y_0$, $y_0'$ sind. Außerdem wurden mannigfache Sätze abgeleitet, die meist an gewisse Darstellungsformen analytischer Funktionen (z. B. durch eine Potenzreihe) anknüpfen, und besagen, daß die dargestellten Funktionen transzendental-transzendent sind, sobald diese Darstellungen gewissen allgemeinen Bedingungen genügen. Diese Sätze lassen sich dann verwenden, um unbegrenzt viele transzendental-transzendente Funktionen tatsächlich zu konstruieren oder wenigstens als existent nachzuweisen. Es sind hier folgende Arbeiten zu nennen: Hurwitz, Sur le développement des fonctions, satisfaisant à une équation algébrique, Ann. d. l'École Normale, 1889; Grönwall, Ofersigt af kongl. Vetenskapakademiens förhandl., Stockholm 1898; Maillet, Compt. Rend. 132, Bull. d. l. Soc. math. d. Fr. 30, Compt. Rend. 135, Journ. d. Math. 8 (1902). Ferner hat Hilbert in seinen Vorlesungen im Jahre 1902 zwei Konstruktionsmethoden transzendental-transzendenter Funktionen angegeben (s. Stadigh a. a. O.). Von der eine Verallgemeinerung von $\Gamma(x)$ bildenden „Double gamma function" hat Barnes (Lond. Phil. Trans. 196) gezeigt, daß sie keine algebraische Differentialgleichung befriedigen kann.

Es sei gleich hier bemerkt, daß dabei auch Funktionalgleichungen vom Typus

$$a(x) f(x+2) + b(x) f(x+1) + c(x) f(x) = 0$$

wo $a$, $b$, $c$ rationale Funktionen sind, in Betracht gezogen werden können. Setzt man nämlich $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \varphi(x)$, so befriedigt $\varphi(x)$ die Relation

$$\varphi(x+1) = -\frac{c(x)}{a(x)\varphi(x)} - \frac{b(x)}{a(x)}$$

also eine Funktionalgleichung vom Typus (1).

## § 1.

Wir beabsichtigen in diesem Paragraphen, die Untersuchung, ob Lösungen einer Funktionalgleichung (1) algebraischen Differentialgleichungen genügen können, auf die Behandlung von Funktionalgleichungen von möglichst einfacher Art zurückzuführen.

Nehmen wir an, (1) habe eine algebraisch-transzendente Lösung $\varphi(x)$. Substituieren wir nun an Stelle von $\varphi(x)$ eine neue Funktion $\psi(x)$ vermöge der Gleichung

$$\varphi(x) = \frac{\alpha(x)\psi(x) + \beta(x)}{\gamma(x)\psi(x) + \delta(x)}, \tag{3}$$

wobei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ rationale Funktionen von $x$ mit nicht identisch verschwindender Determinante seien. An die Stelle von (1) tritt dann eine Funktionalgleichung desselben Baues für $\psi(x)$

$$\psi(x+1) = \frac{A_1(x)\psi(x) + B_1(x)}{C_1(x)\psi(x) + D_1(x)}, \tag{4}$$

wobei die Koeffizienten $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ wieder rational in $x$ sind, u. zw. hat man:

$$A_1(x) = A(x)\alpha(x)\delta(x+1) + B(x)\gamma(x)\delta(x+1) - \\ - C(x)\alpha(x)\beta(x+1) - D(x)\gamma(x)\beta(x+1)$$

nebst analogen Formeln für $B_1$, $C_1$, $D_1$.

Dabei ist die Determinante

$$A_1(x) D_1(x) - B_1(x) C_1(x) = [A(x) D(x) - B(x) C(x)] . \\ [\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x)] [\alpha(x+1)\delta(x+1) - \beta(x+1)\gamma(x+1)]$$

also nicht identisch null, wenn man, wie selbstverständlich, annimmt, daß $A(x) D(x) - B(x) C(x) \neq 0$ sei.

Mit Rücksicht auf den von Stadigh[1]) bewiesenen Satz, daß jede rationale Verbindung von algebraisch-transzendenten Funktionen selbst eine algebraisch-transzendente Funktion ist, folgt nun aus (3), daß die Funktion $\psi(x)$ ebenso wie $\varphi(x)$ einer algebraischen Differentialgleichung genügt. Somit: Wenn die Gleichung (1) eine algebraisch-transzendente Lösung hat, so hat auch die Gleichung (4) eine algebraisch-transzendente Lösung. Umgekehrt erhalten wir aus (4) mittels der zu (3) inversen Substitution die Gleichung (1). Demnach hat auch (1) stets eine algebraisch-transzendente Lösung, sobald (4) eine algebraisch-transzendente Lösung hat.

Das Ergebnis dieser Überlegung können wir folgendermaßen formulieren. Wenn wir die Gesamtheit aller Funktionalgleichungen vom Typus (1) betrachten, so zerfällt dieselbe in Klassen, wobei eine Klasse alle diejenigen Funktionalgleichungen umfassen soll, die aus einer bestimmten Funktionalgleichung durch eine Substitution (3) hervorgehen. Da zwei Substitutionen (3) sich wieder zu einer Substitution derselben Art zusammensetzen, so ist es gleichgültig, von welcher speziellen Funktionalgleichung einer Klasse wir ausgehen, um aus ihr durch die Substitionen (3) die übrigen Funktionalgleichungen der Klasse zu erhalten. Von diesen Klassen gelten dann die Sätze:

Besitzt eine Funktionalgleichung eine algebraisch-transzendente Lösung, so besitzt jede Funktionalgleichung, die mit der ersten zur selben Klasse gehört, eine algebraisch-transzendente Lösung.

Umgekehrt:

Besitzt eine Funktionalgleichung keine algebraisch-transzendente Lösung, so gilt dasselbe von jeder Funktionalgleichung, die derselben Klasse angehört.

Wir wollen nun zeigen, daß es in jeder Klasse Funktionalgleichungen von der speziellen Gestalt

$$\varphi(x+1)=1+\frac{r(x)}{\varphi(x)} \tag{2}$$

gibt, wo $r(x)$ eine rationale Funktion von $x$ bezeichnet.[2]) Daraus ist ersichtlich, daß man sich bei der Frage, ob eine Funktional-

[1]) A. a. O. Der Beweis wird geführt, indem man zunächst zeigt, daß die Summe von zwei algebraisch-transzendenten Funktionen algebraisch-transzendent ist. Auf diesen Fall läßt sich der Fall des Produktes oder Quotienten von zwei algebraisch-transzendenten Funktionen zurückführen, indem man logarithmisch differenziert und den Satz von Hölder (Math. Ann. 28 S. 7.) verwendet, daß eine Funktion und ihre logarithmische Derivierte entweder beide algebraisch-transzendent sind, oder daß keine von den beiden einer algebraischen Differentialgleichung genügt. — Der von Stadigh bewiesene Satz ist übrigens ein Spezialfall eines jener viel allgemeineren Sätze, welche Moore (Math. Ann. 48 S. 50 bis 55) mitgeteilt hat.

[2]) Hingegen ist es im allgemeinen nicht möglich, eine vorgelegte Funktionalgleichung (1) in eine andere zu transformieren, deren rechte Seite eine ganze lineare Funktion von $\varphi(x)$ ist. Wenn nämlich $C(x) \neq 0$ ist, so kann $C_1(x)$ dann und nur dann zu Null gemacht werden, wenn (1) eine rationale Lösung besitzt.

gleichung (1) algebraisch-transzendente Lösungen haben kann, auf Funktionalgleichungen von der speziellen Form (2) beschränken kann.

Um jetzt zu beweisen, daß jede Funktionalgleichung (1) durch eine Substitution (3) in eine Funktionalgleichung von der Gestalt (2) übergeführt werden kann, unterscheiden wir die folgenden Fälle:

I. *a*) $C(x) \neq 0$, $A(x-1)\,C(x) + C(x-1)\,D(x) \neq 0$.
*b*) $C(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, $A(x-1)\,C(x) + C(x-1)\,D(x) = 0$.

II. *a*) $C(x) = 0$, $B(x) \neq 0$, $A(x)\,B(x-1) + B(x)\,D(x-1) \neq 0$.
*b*) $C(x) = 0$, $B(x) \neq 0$, $A(x)\,B(x-1) + B(x)\,D(x-1) = 0$.

III. *a*) $B(x) = C(x) = 0$, $A(x) \neq \pm D(x)$.
*b*) $B(x) = C(x) = 0$, $A(x) = \pm D(x)$.

IV. *a*) $A(x) = D(x) = 0$, $\dfrac{B(x)}{C(x)}$ keine Konstante.
*b*) $A(x) = D(x) = 0$, $\dfrac{B(x)}{C(x)} = \text{Konstans}$.

Fall I *a*). Wir setzen

$$A(x-1)\,C(x) + C(x-1)\,D(x) = \alpha(x)$$
$$\varphi(x) = \frac{\alpha(x)\,\psi(x) - D(x)\,C(x-1)}{C(x)\;C(x-1)}$$
$$\psi(x) = \frac{C(x-1)}{\alpha(x)}\big(C(x)\,\varphi(x) + D(x)\big)$$

und erhalten dann für $\psi(x)$ die Funktionalgleichung

$$\psi(x+1) = 1 - \frac{C(x-1)\,C(x+1)\,[A(x)\,D(x) - B(x)\,C(x)]}{\alpha(x)\,\alpha(x+1)}\,\frac{1}{\psi(x)},$$

die die gewünschte Gestalt hat.

Fall I *b*). Setzt man

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x) - D(x)}{C(x)}, \quad \psi(x) = C(x)\,\varphi(x) + D(x),$$

so erhält man

$$\psi(x+1) = -\frac{C(x+1)\,[A(x)\,D(x) - B(x)\,C(x)]}{C(x)}\,\frac{1}{\psi(x)}$$

und damit ist dieser Fall auf den weiter unten behandelten Fall IV zurückgeführt.

Fall II *a*). Man kann $D(x) = 1$ annehmen. Setzt man nun

$$\gamma(x) = A(x)\,B(x-1) + B(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{B(x-1)\,B(x)}{\gamma(x)\,\psi(x) - B(x-1)\,A(x)}$$

so erhält man

$$\psi(x+1) = 1 - \frac{A(x)\,B(x-1)\,B(x+1)}{\gamma(x)\,\gamma(x+1)}\,\frac{1}{\psi(x)}$$

also eine Funktionalgleichung von der verlangten Gestalt (2).

Fall II *b*). Man kann $D(x) = 1$ annehmen. Setzt man

$$\varphi(x) = x\,B(x-1)\,\frac{\psi(x) - (x-1)}{\psi(x) + (x-1)}$$

so erhält man die Funktionalgleichung

$$\psi(x+1) = 1 + \frac{x^2 - 1}{\psi(x)},$$

die die gewünschte Form hat. Die Gleichung (1) hat in diesem Falle eine rationale Lösung, nämlich $\varphi(x) = \frac{1}{2}\,B(x-1)$.

Fall III *a*). Man kann $D(x) = 1$ annehmen; setzen wir

$$1 - A(x) = P(x), \quad 1 - A(x)\,A(x-1) = Q(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{Q(x)\,\psi(x) - P(x-1)}{Q(x)\,\psi(x) - A(x)\,P(x-1)},$$

$$\psi(x) = \frac{P(x-1)}{Q(x)} \cdot \frac{A(x)\,\varphi(x) - 1}{\varphi(x) - 1},$$

so erhalten wir für $\psi(x)$ die Gleichung:

$$\psi(x+1) = 1 - A(x)\,\frac{P(x-1)\,P(x+1)}{Q(x)\,Q(x+1)}\,\frac{1}{\psi(x)}.$$

Fall III *b*). Man kann $D(x) = 1$ annehmen; dann ist $A(x) = \pm 1 = \varepsilon$. Man setze

$$\varphi(x) = \frac{2\,x\,\psi(x) + (x+1)\,[\varepsilon(x-1) - x]}{2\,\psi(x) + x - 1 - \varepsilon\,x}$$

und erhält für $\psi(x)$ die Gleichung

$$\psi(x+1) = 1 + \frac{1}{4}\,[x + 2 - \varepsilon(x+1)]\,[x - 1 - \varepsilon\,x]\,\frac{1}{\psi(x)}.$$

Fall IV *a*). Wir können $C(x) = 1$ annehmen; setzt man ferner

$$1 - B(x) = P(x), \quad B(x) - B(x-1) = Q(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{Q(x)\,\psi(x) - B(x)\,P(x-1)}{Q(x)\,\psi(x) - P(x-1)},$$
$$\psi(x) = \frac{P(x-1)}{Q(x)} \cdot \frac{\varphi(x) - B(x)}{\varphi(x) - 1},$$

so ergibt sich die Funktionalgleichung

$$\psi(x+1) = 1 + B(x)\frac{P(x-1)\,P(x+1)}{Q(x)\,Q(x+1)}\,\frac{1}{\psi(x)}.$$

Fall IV $b$). Man kann $C(x) = 1$ annehmen; dann ist $B(x) = b =$ Konst. Man setze

$$\varphi(x) = \frac{2\,b\,x\,\psi(x) + b\,[x(x-1) - b]}{2\,b\,\psi(x) + (x+1)\,[x(x-1) - b]}$$

und erhält für $\psi(x)$ die Gleichung

$$\psi(x+1) = 1 + \frac{1}{4\,b}\,[x(x-1) - b]\,[(x+2)(x+1) - b]\,\frac{1}{\psi(x)}.\ ^{1)}$$

Damit ist gezeigt, daß es in jeder Klasse von Funktionalgleichungen auch eine Gleichung von der Gestalt (2) gibt, die also nur von e i n e r rationalen Funktion abhängt. Man ersieht jedoch leicht, daß jede Klasse unendlich viele Funktionalgleichungen dieser Gestalt enthält, indem man auf die eine Gleichung (2), deren Vorhandensein eben bewiesen wurde, eine Substitution (3) anwendet und die Koeffizienten $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ so zu bestimmen sucht, daß die neue Funktionalgleichung für $\psi(x)$ wieder die Form von (2) erhält. Die Durchrechnung zeigt dann, daß die Substitution (3) die Gestalt

$$(5)\qquad \varphi(x) = \frac{\alpha(x)\,\psi(x) + \dfrac{r(x)\,g(x-1)}{h(x)}}{\psi(x) + \dfrac{[\alpha(x+1) - 1]\,g(x-1)}{h(x)}}$$

haben muß, wobei

$$(6)\qquad \begin{aligned} g(x) &= r(x) - \alpha(x)\,(\alpha(x+1) - 1) \\ h(x) &= r(x)\,\alpha(x-1) - [r(x-1) + \alpha(x-1)]\,[\alpha(x+1) - 1] \end{aligned}$$

gesetzt ist. Die Funktionalgleichung für $\psi(x)$ wird dann

$$\psi(x+1) = 1 + \frac{q(x)}{\psi(x)}$$

---

1) Die Gleichung (1) hat in den Fällen III $b$) und IV $b$), wie in allen Fällen, wo sämtliche Koeffizienten $A$, $B$, $C$, $D$ Konstanten sind, rationale Lösungen, nämlich $\varphi(x) = (\varepsilon + 1)$. Konst., bezw. $\varphi(x) = \pm\sqrt{b}$.

wenn man

$$(7) \qquad r(x)\frac{g(x-1)\,g(x+1)}{h(x)\,h(x+1)} = q(x)$$

setzt.

Dabei ist $\alpha(x)$ eine rationale Funktion, die nur an die Bedingungen gebunden ist, daß keiner der Ausdrücke $g(x)$, $h(x)$ identisch verschwindet. Diese Bedingungen[1]) sind damit gleichbedeutend, daß $\alpha(x)$ weder eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (2), noch auch Lösung der Funktionalgleichung

$$(2\,a) \qquad \varphi(x+1) = 1 + \cfrac{r(x)}{1 + \cfrac{r(x-1)}{\varphi(x-1)}}$$

sein darf.[2])

Wir werden nun den Satz beweisen:

Wenn eine Funktionalgleichung von der Gestalt

$$\varphi(x+1) = \frac{r(x)}{\varphi(x)} + 1$$

keine rationale Lösung hat, und wenn die in derselben auftretende rationale Funktion $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, so hat die Funktionalgleichung keine algebraisch-transzendenten Lösungen.

Auf Grund des Vorhergehenden können wir dann auch allgemeiner sagen:

Wenn eine vorgelegte Funktionalgleichung (1), die keine rationalen Lösungen zuläßt, sich durch eine Transformation (3) in eine Gleichung von der Form (2) überführen läßt, so daß die dabei auftretende Funktion $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, so kann keine Lösung von (1) einer algebraischen Differentialgleichung genügen.

Dabei ist zu bemerken, daß, wenn wir aus einer Gleichung (2), in welcher $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, durch eine

---

[1]) Diese Bedingungen sind nebenbei bemerkt, unter den Voraussetzungen, die den folgenden Entwicklungen zugrunde gelegt werden, erfüllt. Denn es wird einerseits vorausgesetzt, daß (2) keine rationale Lösung hat und anderseits, daß $r(x)$ im Unendlichen verschwindet. Aus der ersten Voraussetzung folgt, daß $g(x)$ sicher $\neq 0$ ist. Wenn aber $r(x)$ so beschaffen wäre, daß zwar nicht (2), wohl aber (2 $a$) eine rationale Lösung hat, so müßte es, wenn $R(x)$ eine rationale Funktion bedeutet, die Gestalt

$$r(x) = R(x)\frac{(R(x+1)-1)(R(x-1)-1)}{(R(x+1)-R(x))(R(x)-R(x-1))}$$

haben. Eine Funktion von dieser Gestalt verschwindet aber nicht im Unendlichen.

[2]) Wir bemerken noch, daß die identische Substitution $\varphi(x) = \psi(x)$ unter den Substitutionen (5) nicht vorkommt; man erhält sie aber, wenn man mit einem konstanten $\alpha(x) = \alpha$ zur Grenze $\alpha = \infty$ übergeht.

Transformation (5), eine neue Gleichung von demselben Bau ableiten, dann die in dieser neuen Gleichung auftretende Funktion $q(x)$, die durch die Formel (7) gegeben ist, ebenfalls im Unendlichen verschwindet. Man betrachte nämlich die Entwicklungen um die unendlich ferne Stelle:

$$r(x) = r_0 x^\rho + r_1 x^{\rho-1} + \dots \qquad (\rho < 0)$$
$$\alpha(x) = \alpha_0 x^a + \alpha_1 x^{a-1} + \dots$$

Ist nun $a > 0$, so zeigen die Formeln (6) für $g(x)$ und $h(x)$, daß der Quotient $\frac{g(x)}{h(x)}$ im Unendlichen den Wert 1 hat, und daher verschwindet $q(x)$ im Unendlichen, und zwar von gleicher Ordnung wie $r(x)$. Dasselbe gilt aber für $a \leqq 0$, wie aus der Relation

$$h(x) = g(x-1) + [g(x)\,\alpha(x-1) - g(x-1)\,\alpha(x+1)]$$

ersichtlich ist.

Verschwindet also die in einer Gleichung (2) auftretende Funktion $r(x)$ im Unendlichen, so bleibt diese Eigenschaft für alle Gleichungen (2), die zur selben Klasse gehören, erhalten.

## § 2.

Wir gehen nun daran, unter der Voraussetzung, daß $r(x)$ im Unendlichen verschwindet,[1]) zu beweisen, daß eine Gleichung

$$\varphi(x+1) = \frac{r(x)}{\varphi(x)} + 1 \tag{2}$$

die keine rationale Lösung hat, mit einer algebraischen Differentialgleichung unverträglich ist. Dieser Beweis ist analog demjenigen Hölders, dass die Lösungen der Gleichung $\varphi(x+1) = \varphi(x) + \frac{1}{x}$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. Wir wollen nämlich die Annahme machen, eine Lösung $\varphi(x)$ von (2) genüge einer algebraischen Differentialgleichung

$$G(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots \varphi^{(n)}(x)) = 0 \tag{8}$$

und nun ein Reduktionsverfahren angeben, um aus dieser einen Differentialgleichung mittels (2) eine Reihe von weiteren Differentialgleichungen für $\varphi(x)$ zu erhalten, deren Ordnungen schließlich immer mehr abnehmen. Endlich gelangen wir damit zu einer Differentialgleichung nullter Ordnung, d. h. zu einer algebraischen Gleichung

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

[1]) Diese Voraussetzung wird zu dem in den §§ 3, 4 enthaltenen Beweis einiger Hilfssätze verwendet, während sie bei den Entwicklungen dieses Paragraphen nicht benötigt wird.

Darin liegt aber ein Widerspruch, weil keine Lösung von (2) eine algebraische Funktion von $x$ sein kann. Da nämlich $\varphi(x)$ nach Voraussetzung nicht rational sein kann, so müßte es im Endlichen mindestens eine Verzweigungsstelle $x_0$ haben; dann wären aber auch $x_0+1$, $x_0+2, \ldots$ Verzweigungspunkte, was unmöglich ist.

Es ist nun das Reduktionsverfahren auseinanderzusetzen, das auf (8) angewendet werden soll. Zunächst wollen wir die Größen

$$\varphi(x), \varphi'(x), \ldots \varphi^{(n)}(x)$$

sowie die später auftretenden Größen

$$\varphi(x+1), \varphi'(x+1), \ldots \varphi^{(n)}(x+1)$$

abkürzend mit

$$y, y', \ldots y^{(n)}, \text{ beziehungsweise } z, z', \ldots z^{(n)}$$

bezeichnen. Ferner können und wollen wir voraussetzen, die linke Seite der Gleichung (8) sei ein Polynom in $y', y'', \ldots y^{(n)}$, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von $x$, $y$ sind. Ist dann

$$R(x, y)\, y'^{\lambda_1}\, y''^{\lambda_2} \ldots y^{(n)\lambda_n}$$

irgend ein Glied dieses Polynoms, so wollen wir die Zahl

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + \cdots + n^2\lambda_n$$

als das quadratische Gewicht dieses Gliedes und den größten Wert des quadratischen Gewichtes, der unter den Gliedern von $G(x, y, \ldots y^{(n)})$ vorkommt, als das quadratische Gewicht der Gleichung (8) bezeichnen. Da wir den gewöhnlich als Gewicht bezeichneten Ausdruck nicht verwenden, Verwechslungen somit ausgeschlossen sind, so werden wir oft statt quadratisches Gewicht schlechtweg Gewicht sagen.

Aus (2) erhält man durch Differentiation

$$(9)\quad \begin{aligned}
z' &= -\frac{r(x)}{y^2}\left(y' - \frac{r'(x)}{r(x)}\, y\right)\\
z'' &= -\frac{r(x)}{y^2}\left(y'' - \frac{2\,y'^2}{y} + 2\,\frac{r'(x)}{r(x)}\, y' - \frac{r''(x)}{r(x)}\, y\right)\\
z''' &= -\frac{r(x)}{y^2}\left(y''' - \frac{6\,y'\,y''}{y} + 3\,\frac{r'(x)}{r(x)}\, y'' + \frac{6\,y'^3}{y^2} - 6\,\frac{r'(x)}{r(x)}\frac{y'^2}{y}\right.\\
&\qquad\left. + 3\,\frac{r''(x)}{r(x)}\, y' - \frac{r'''(x)}{r(x)}\, y\right) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

und es ist für das Folgende erforderlich, sich über das Gewicht der einzelnen Glieder auf den rechten Seiten dieser Gleichungen zu orientieren. Man beweist leicht den folgenden

Hilfssatz. In dem Ausdruck für $-\dfrac{y^2}{r(x)}\, z^{(m)}$:

$$y^{(m)} - \frac{2\,m}{y}\, y'\, y^{(m-1)} + \cdots \qquad (m = 3, 4, \cdots)$$

hat das Glied $y^{(m)}$ das höchste quadratische Gewicht, nämlich $m^2$, und das Glied $-\frac{2m}{y}y'y^{(m-1)}$ hat das nächstniedrigere Gewicht, u. zw. $m^2-2m+2$.

Da der Satz für $m=3$ richtig ist, so wollen wir ihn durch Induktion von $m$ auf $m+1$ beweisen. Wir nehmen also an, es sei

$$z^{(m)} = -\frac{r(x)\,y^{(m)}}{y^2} + \frac{2m\,r(x)\,y'\,y^{(m-1)}}{y^3} + Y_m \tag{10}$$

und die Glieder von $Y_m$ hätten höchstens das Gewicht $m^2-2m+1$ und enthielten keinen höheren als den $(m-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten. Aus dieser letzteren Tatsache folgt, daß man durch Differentiation eines Gliedes aus $Y_m$, dessen Gewicht etwa gleich $q$ sei, keine Glieder von höherem Gewicht als

$$q + m^2 - (m-1)^2 = q + 2m - 1$$

erhalten kann; da nun das Gewicht irgend eines Gliedes aus $Y_m$ höchstens $m^2-2m+1$ beträgt, so haben die Glieder von $\frac{dY_m}{dx}$ höchstens das Gewicht $m^2$. Im Hinblick hierauf bestätigt man nun leicht durch Differentiation von (10), daß in der Gleichung

$$z^{(m+1)} = -\frac{r(x)\,y^{(m+1)}}{y^2} + \frac{2(m+1)\,r(x)\,y'\,y^{(m)}}{y^3} + \cdots$$

die beiden angeschriebenen Glieder der rechten Seite ein größeres Gewicht haben als alle folgenden Glieder. Unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

Es sei nun $g$ das Gewicht der Gleichung (8) und $y'^{\alpha_1}y''^{\alpha_2}\ldots y^{(n)\alpha_n}$ eines der Potenzprodukte vom Gewicht $g$. Wir denken uns dann die Gleichung (8) durch den Koeffizienten dieses Potenzproduktes, der eine rationale Funktion von $x$ und $y$ ist, dividiert und setzen

$$G(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = K + L$$

wobei

$$K = K(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = y'^{\alpha_1}y''^{\alpha_2}\ldots y^{(n)\alpha_n} + \sum R(x,y)\,y'^{\beta_1}y''^{\beta_2}\ldots y^{(n)\beta_n}$$

die Gesamtheit aller Glieder aus $G$ darstellt, deren Gewicht gleich $g$ ist, während

$$L = L(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = \sum \Lambda(x,y)\,y'^{\beta_1}y''^{\beta_2}\ldots y^{(n)\beta_n}$$

alle Glieder aus $G$ umfaßt, deren Gewicht $<g$ ist. Aus dem Bestehen der Gleichung (8) folgt nun, wenn wir $x$ durch $x+1$ ersetzen,

$$G_1 = G(x+1, z, z', \ldots z^{(n)}) = 0. \tag{11}$$

Vermöge der Funktionalgleichung (2) und der daraus abgeleiteten Gleichungen (9) können wir nun $z, z', \ldots z^{(n)}$ durch $x, y, y', \ldots y^{(n)}$ ausdrücken, und den so erhaltenen Ausdruck für $G_1$ wieder nach Potenzprodukten von $y', y'', \ldots y^{(n)}$ ordnen. Setzen wir nun

$$K(x+1, z, z', \ldots z^{(n)}) = K_1$$
$$L(x+1, z, z', \ldots z^{(n)}) = L_1$$

so ist

$$G_1 = K_1 + L_1$$

und

$$K_1 = \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta} y'^{\alpha_1} y''^{\alpha_2} \ldots y^{(n)\alpha_n}$$

$$+ \sum R\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right) \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta'} y'^{\beta_1} y''^{\beta_2} \ldots y^{(n)\beta_n} + \text{Glieder},$$

deren Gewicht kleiner als $g$ ist.

Dabei bedeuten $\delta$, $\delta'$ die (in Bezug auf $y', y'', \ldots$ genommenen) Dimensionszahlen

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad \delta' = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n.$$

Ferner ist klar, daß in $L_1$ kein Glied das Gewicht $g$ erreicht.

Aus dem Bestehen der beiden Differentialgleichungen (8) und (11) folgt nun die neue Differentialgleichung

$$H(x, y, y', \cdots y^{(n)}) = G - \left(-\frac{y^2}{r(x)}\right)^{\delta} G_1 = 0$$

die sicher weniger Glieder vom Gewicht $g$ enthält als die Gleichung $G = 0$. Dabei ergibt sich, wenn man

$$R(x, y) - \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta' - \delta} R\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right) = \Theta(x, y)$$

setzt, für $H(x, y, y', \cdots y^{(n)})$ die Gestalt

$$H = \sum \Theta(x, y)\, y'^{\beta_1} y''^{\beta_2} \ldots y^{(n)\beta_n} + \text{Glieder}, \tag{12}$$

deren Gewicht kleiner als $g$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Gleichung $H = 0$ sich nicht auf eine Identität reduzieren kann.

I. Es möge in $K$ entweder mindestens ein Glied

$$R(x, y)\, y'^{\beta_1} y''^{\beta_2} \ldots y^{(n)\beta_n}$$

geben, dessen Dimension $\delta'$ von $\delta$ verschieden ist, oder falls die Dimensionszahlen aller Glieder von $K$ gleich $\delta$ sind, so gebe es mindestens ein Glied, dessen Koeffizient $R(x, y)$ keine Konstante ist. Da nun, wie im § 3 gezeigt werden soll, ein Ausdruck $\Theta(x, y)$

nur dann identisch verschwinden kann, wenn sowohl $\delta' - \delta = 0$ als auch $R(x, y)$ eine Konstante ist, so sehen wir aus (12), daß in $H$ mindestens ein Glied vom Gewicht $g$ einen nicht identisch verschwindenden Koeffizienten hat. Die Gleichung $H = 0$ ist also keine Identität.

II. Es mögen alle Glieder in $K$ die gleiche Dimension $\delta$ haben und alle Koeffizienten dieser Glieder Konstanten sein. Hieher gehört auch der Fall, daß in der Gleichung $G = 0$ nur ein einziges Glied vom Gewicht $g$ vorhanden ist, daß sich also $K$ auf das einzige Glied $y'^{\alpha_1} y''^{\alpha_2} \ldots y^{(n)\alpha_n}$ reduziert. Der Nachweis, daß die Gleichung $H = 0$ keine Identität ist, gestaltet sich in diesem II. Falle etwas beschwerlicher als im Falle I.

Zunächst ist ersichtlich, daß in diesem Falle alle Glieder vom Gewicht $g$ aus $H$ hinausfallen, daß also die Gleichung $H = 0$ von geringerem Gewicht als die Gleichung $G = 0$ sein muß. Somit handelt es sich darum, ein Potenzprodukt von geringerem Gewicht als $g$ ausfindig zu machen, das in $H$ einen nicht identisch verschwindenden Koeffizienten hat. Sei nun $y^{(\varkappa)}$ die erste Größe aus der Reihe $y', y'', \ldots y^{(n)}$, die in $K$ tatsächlich auftritt, so ist

$$K = y^{(\varkappa)\alpha_\varkappa} y^{(\varkappa+1)\alpha_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\alpha_n} + \sum C y^{(\varkappa)\beta_\varkappa} y^{(\varkappa+1)\beta_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\beta_n},$$

wobei die Koeffizienten $C$ Konstanten sind und für alle auftretenden Exponentensysteme $\beta_\varkappa, \beta_{\varkappa+1}, \ldots \beta_n$

$$\varkappa^2 \beta_\varkappa + (\varkappa+1)^2 \beta_{\varkappa+1} + \cdots + n^2 \beta_n = g =$$
$$= \varkappa^2 \alpha_\varkappa + (\varkappa+1)^2 \alpha_{\varkappa+1} + \cdots + n^2 \alpha_n,$$

$$\beta_\varkappa + \beta_{\varkappa+1} + \cdots + \beta_n = \delta = \alpha_\varkappa + \alpha_{\varkappa+1} + \cdots + \alpha_n$$

ist. Dabei kann man offenbar $\alpha_\varkappa \geqq 1$ annehmen. Setzt man noch

$$K_1 = \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta K + K_2,$$

wobei die Glieder von $K_2$ höchstens das Gewicht $g - 1$ haben, so ist

$$H = -\left(-\frac{y^2}{r(x)}\right)^\delta K_2 + L - \left(-\frac{y^2}{r(x)}\right)^\delta L_1. \tag{13}$$

Es sind nun die Fälle $\varkappa = 1$ und $\varkappa > 1$ zu unterscheiden.

1. $\varkappa = 1$. In diesem Falle wollen wir den Koeffizienten des Potenzproduktes

$$P_1 = y'^{\alpha_1 - 1} y''^{\alpha_2} \ldots y^{(n)\alpha_n}$$

im Ausdruck $H$ bestimmen. Wie aus (13) ersichtlich ist, setzt sich derselbe aus den Koeffizienten zusammen, die $P_1$ in den Ausdrücken $K_2, L, L_1$ hat.

Sei nun $C\, y'^{\gamma_1} y''^{\gamma_2} \ldots y^{(n)\gamma_n}$ irgend ein Glied aus $K$, so steht in $K_1$ der Ausdruck

$$C\, z'^{\gamma_1} z''^{\gamma_2} \ldots z^{(n)\gamma_n} =$$

$$(14) = C\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta}\left(y' - \frac{r'(x)}{r(x)}y\right)^{\gamma_1}\left(y'' - \frac{2y'^2}{y}\cdots\right)^{\gamma_2}\cdots\left(y^{(n)} - \frac{2ny'y^{(n-1)}}{y}\cdots\right)^{\gamma_n}.$$

Wir denken uns nun diesen Ausdruck nach Potenzprodukten von $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ geordnet und fragen, wann sich $P_1$ unter den auftretenden Potenzprodukten finden kann. Betrachten wir einen der Faktoren des Ausdruckes (14) von der Gestalt

$$(15) \qquad \left(y^{(i)} - \frac{a_i y' y^{(i-1)}}{y} + \cdots\right)^{\gamma_i} \quad (i = 2, 3, \ldots n)$$

wobei $a_2 = 2$, $a_i = 2i$ für $i > 2$ ist. Aus dem oben abgeleiteten Hilfssatze folgt, daß hierin das Gewicht von $y^{(i)}$ mindestens um $2i - 2$ größer ist als das Gewicht irgend eines der auf $y^{(i)}$ folgenden Glieder.

Greifen wir also aus der polynomischen Entwicklung von (15) irgend ein Glied heraus, in welchem $y^{(i)}$ in der Potenz $(\gamma_i - \rho_i)$ auftritt, so kann das Gewicht dieses Gliedes höchstens gleich

$$(\gamma_i - \rho_i)\, i^2 + \rho_i (i^2 - 2i + 2) = \gamma_i\, i^2 - (2i - 2)\, \rho_i$$

sein. Ferner wählen wir aus der binomischen Entwicklung von

$$\left(y' - \frac{r'(x)}{r(x)}y\right)^{\gamma_1}$$

jenes Glied aus, in welchem $y'$ in der Potenz $(\gamma_1 - \rho_1)$ auftritt und dessen Gewicht also $\gamma_1 - \rho_1$ ist. Multiplizieren wir die aus den einzelnen Faktoren von (14) herausgegriffenen Glieder, so erhalten wir ein Glied von (14), dessen Gewicht $q$ höchstens gleich

$$(\gamma_1 - \rho_1) + \sum_{i=2}^{n} [\gamma_i\, i^2 - (2i - 2)\, \rho_i]$$

ist. Es ist also

$$q \leqq g - \rho_1 - 2\sum_{i=2}^{n} (i-1)\, \rho_i.$$

Wenn nun das Potenzprodukt des betrachteten Gliedes gleich $P_1$ sein soll, so muß $q$ gleich dem Gewicht von $P_1$, also $q = g - 1$ sein. Daraus folgt

$$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_n = 0.$$

Das Potenzprodukt $P_1$ kann also nur bei jenen Gliedern von (14) auftreten, die aus dem Ausdruck

$$C\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta \left(y' - \frac{r'(x)}{r(x)}y\right)^{\gamma_1} y''^{\gamma_2} \ldots y^{(n)\gamma_n}$$

herrühren. Daraus folgt $\gamma_2 = \alpha_2, \ldots, \gamma_n = \alpha_n$ und wegen

$$\gamma_1 + 2^2\gamma_2 + \cdots + n^2\gamma_n = g = \alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + n^2\alpha_n$$

auch $\gamma_1 = \alpha_1$. Von allen Ausdrücken $C z'^{\gamma_1} z''^{\gamma_2} \ldots z^{(n)\gamma_n}$ aus $K_1$ liefert also nur der Ausdruck $z'^{\alpha_1} z''^{\alpha_2} \ldots z^{(n)\alpha_n}$ ein Glied mit dem Potenzprodukt $P_1$; und zwar rührt $P_1$ speziell aus dem Ausdruck

$$\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta \left(y' - \frac{r'(x)}{r(x)}y\right)^{\alpha_1} y''^{\alpha_2} \ldots y^{(n)\alpha_n}$$

her und muß daher in $K_1$ und somit auch in $K_2$ den Koeffizienten

$$\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta \left(-\alpha_1 \frac{r'(x)}{r(x)}y\right)$$

haben.

Es möge nun mit $S(x, y)$ der Koeffizient von $P_1$ in dem Aggregat $L$ bezeichnet werden, wobei $S(x, y)$ eventuell auch identisch Null sein kann. Es zeigt dann eine einfache Überlegung, die der soeben angestellten vollständig analog ist, daß von allen Ausdrücken $\Lambda(x+1, z) z'^{\beta_1} z''^{\beta_2} \ldots z^{(n)\beta_n}$, die in

$$L_1 = \sum \Lambda(x+1, z) z'^{\beta_1} z''^{\beta_2} \ldots z^{(n)\beta_n}$$

stehen, nur der Ausdruck $S(x+1, z) z'^{\alpha_1 - 1} z''^{\alpha_2} \ldots z^{(n)\alpha_n}$ ein Glied mit dem Potenzprodukt $P_1$ liefert, und daß der Koeffizient von $P_1$ in $L_1$ gleich

$$S(x+1, z)\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta - 1}$$

ist. Es ergibt sich also zufolge (13) als Koeffizient von $P_1$ in $H$ der Ausdruck

$$S(x, y) + \frac{y^2}{r(x)} S\left(x+1, \frac{r(x)}{y} + 1\right) + \alpha_1 \frac{r'(x)}{r(x)} y.$$

Da nun, wie im § 4 gezeigt werden soll, ein Ausdruck von der eben angeschriebenen Gestalt, in welchem $\alpha_1 > 0$ ist, nicht identisch verschwinden kann, so können wir sagen, daß im Fall $\varkappa = 1$ die Gleichung $H = 0$ keine Identität ist; denn es hat das Potenzprodukt $P_1$ in $H$ einen nicht identisch verschwindenden Koeffizienten. Wir wenden uns nun zu dem Fall

2. $\varkappa > 1$. Es werde eine Kategorie von Potenzprodukten $P_\omega$ folgendermaßen definiert: $P_\omega$ habe die Gestalt

$$P_\omega = y'^{\omega_1} y''^{\omega_2} \ldots y^{(\varkappa-1)\omega_{\varkappa-1}} y^{(\varkappa)\alpha_\varkappa - 1} y^{(\varkappa+1)\alpha_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\alpha_n}$$

und sein quadratisches Gewicht $q_\omega$ möge der Ungleichung $g > q_\omega \geqq g - 2\varkappa + 2$ genügen. Zu dieser Kategorie der $P_\omega$ gehört auch das Potenzprodukt

$$P_\varkappa = y' \, y^{(\varkappa-1)} y^{(\varkappa)\,\alpha_\varkappa - 1} \, y^{(\varkappa+1)\,\alpha_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\,\alpha_n}.$$

Sei nun

$$P_\pi = y'^{\pi_1} y''^{\pi_2} \ldots y^{(\varkappa-1)\pi_{\varkappa-1}} y^{(\varkappa)\alpha_\varkappa - 1} y^{(\varkappa+1)\,\alpha_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\,\alpha_n}$$

ein spezielles der Kategorie der $P_\omega$ angehörendes Potenzprodukt, so wollen wir den Koeffizienten von $P_\pi$ in $H$ ermitteln. Dies läuft wegen (13) auf die Berechnung der Koeffizienten von $P_\pi$ in $K_2$, $L$ und $L_1$ hinaus.

Was zunächst den Koeffizienten von $P_\pi$ in $K_2$ anlangt, so schlagen wir eine Betrachtung ein, die der im Fall $\varkappa = 1$ zur Bestimmung des Koeffizienten von $P_1$ in $K_2$ angestellten vollständig parallel läuft. Auf diesem Wege ergibt sich, daß unter allen in $K_1$ stehenden Gliedern $C z^{(\varkappa)\gamma_\varkappa} z^{(\varkappa+1)\gamma_{\varkappa+1}} \ldots z^{(n)\gamma_n}$ nur der Ausdruck $z^{(\varkappa)\alpha_\varkappa} z^{(\varkappa+1)\,\alpha_{\varkappa+1}} \ldots z^{(n)\alpha_n}$ bei seiner Darstellung durch $x, y, y', \ldots y^{(n)}$ eventuell ein Glied mit einem Potenzprodukt $P_\omega$ enthält. Speziell sieht man noch, daß ein Glied mit einem Potenzprodukt $P_\omega$ nur aus dem Ausdruck

$$\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta \left(y^{(\varkappa)} - \frac{\alpha_\varkappa y' \, y^{(\varkappa-1)}}{y} + \cdots\right)^{\alpha_\varkappa} y^{(\varkappa+1)\,\alpha_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\,\alpha_n}$$

herrühren kann. Entwickeln wir diesen Ausdruck nach Potenzprodukten von $y', y'', \ldots$, so sehen wir, daß nur das Glied

$$-\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta \frac{\alpha_\varkappa \alpha_\varkappa}{y} \, y' \, y^{(\varkappa-1)} y^{(\varkappa)\,\alpha_\varkappa - 1} y^{(\varkappa+1)\,\alpha_{\varkappa+1}} \ldots y^{(n)\,\alpha_n}$$

ein Potenzprodukt hat, das zur Kategorie der $P_\omega$ gehört. Es zeigt sich also, daß $P_\varkappa$ das einzige Potenzprodukt aus der Kategorie der $P_\omega$ ist, das in $K_2$ auftritt, und der Koeffizient von $P_\pi$ ist daher gleich

$$-\frac{\alpha_\varkappa \alpha_\varkappa}{y} \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\delta$$

oder gleich null, je nachdem $P_\pi = P_\varkappa$ oder $\neq P_\varkappa$ ist.

Der Koeffizient von $P_\pi$ in $L$ möge mit $R(x, y)$ bezeichnet werden.

Es bleibt noch der Koeffizient von $P_\pi$ in dem Ausdruck

$$L_1 = \sum \Lambda(x+1, z)\, z'^{\beta_1} z''^{\beta_2} \ldots z^{(n)\beta_n}$$

zu bestimmen. Man erschließt durch eine Überlegung von der schon mehrfach verwendeten Art, daß in der Entwicklung eines Ausdrucks $\Lambda(x+1, z)\, z'^{\beta_1} z''^{\beta_2} \ldots z^{(n)\beta_n}$ nach Potenzprodukten von $y', y'', \ldots y^{(n)}$ nur dann ein zur Kategorie der $P_\omega$ gehörendes Potenzprodukt auftreten kann, wenn

(16) $$\beta_\varkappa = \alpha_\varkappa - 1,\ \beta_{\varkappa+1} = \alpha_{\varkappa+1}, \ldots \beta_n = \alpha_n$$

ist. Setzen wir noch

$$\beta_1 + 2^2 \beta_2 + \cdots + n^2 \beta_n = q.$$

Wenn dann $q$ gleich dem Gewicht $q_0$ von $P_\pi$ ist, so kann offenbar ein Glied mit dem Potenzprodukt $P_\pi$ nur dann in der Entwicklung von $\Lambda(x+1, z)\, z'^{\beta_1} \ldots z^{(n)\beta_n}$ auftreten, wenn außer (16) noch die Gleichungen

$$\beta_1 = \pi_1,\ \beta_2 = \pi_2, \ldots \beta_{\varkappa-1} = \pi_{\varkappa-1}$$

erfüllt sind. In diesem speziellen Falle fällt also $\Lambda(x+1, z)$ mit $R(x+1, z)$ zusammen, und der aus dem Ausdruck

$$R(x+1, z)\, z'^{\pi_1} \ldots z^{(\varkappa-1)\pi_{\varkappa-1}} z^{(\varkappa)\alpha_\varkappa - 1} z^{(\varkappa+1)\alpha_{\varkappa+1}} \ldots z^{(n)\alpha_n}$$

herrührende Beitrag zu dem gesuchten Koeffizienten von $P_\pi$ in $L_1$ ist

$$\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta_0} R(x+1, z).$$

Dabei bezeichnet

$$\delta_0 = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{\varkappa-1} + \alpha_\varkappa - 1 + \alpha_{\varkappa+1} + \cdots + \alpha_n$$

die Dimension von $P_\pi$.

Ist anderseits $q$ von $q_0$ verschieden, so kann in der Entwicklung von $\Lambda(x+1, z)\, z'^{\beta_1} \ldots z^{(n)\beta_n}$ nur dann das Potenzprodukt $P_\pi$ auftreten, wenn $q > q_0$, und also auch

(17) $$q > g - 2\varkappa + 2$$

ist. Aus (16) und (17) folgt dann, daß $y'^{\beta_1} y''^{\beta_2} \ldots y^{(n)\beta_n}$ zur Kategorie der Potenzprodukte $P_\omega$ gehört. Wir sehen also: Außer dem Glied

$$\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta_0} R(x+1, z)\, P_\pi,$$

(das auch fehlen kann, wenn $R$ identisch null ist) können in $L_1$ nur dann noch andere Glieder mit dem Potenzprodukt $P_\pi$ auftreten, wenn es in $L$ Glieder von der Gestalt $\Lambda(x, y)\, P_\omega$ gibt, mit nicht identisch verschwindendem $\Lambda(x, y)$ und einem Gewicht, das $q_0$ übersteigt.

Nachdem wir uns im Vorhergehenden über die Koeffizienten, welche die Potenzprodukte $P_\omega$ in $H$ haben, orientiert haben, gehen wir an den Beweis, daß im Falle $\varkappa > 1$ die Gleichung $H = 0$ keine Identität ist. Dabei unterscheiden wir zwei Unterfälle.

Der erste Unterfall liegt vor, wenn es unter den Gliedern von $L$ ein oder mehrere Glieder $\Lambda(x, y) P_\omega$ gibt, ($\Lambda(x, y)$ nicht identisch null) mit einem Gewicht, das größer ist als das Gewicht $g - 2\varkappa + 2$ von $P_\varkappa$. Unter diesen suchen wir dann eines heraus, für welches das quadratische Gewicht am größten ist. Dasselbe werde mit $R(x, y) P_\pi$ bezeichnet. Dann hat $P_\pi$ in $K_2$, $L$, $L_1$ beziehungsweise die Koeffizienten

$$0, R(x, y), \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta_0} R(x+1, z)$$

und $P_\pi$ hat daher in $H$ den Koeffizienten

$$R(x, y) - \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta_0 - \delta} R\left(x+1, \frac{r(x)}{y} + 1\right), \tag{18}$$

wobei $R(x, y)$ nicht identisch null, und $\delta_0 - \delta > 0$ ist.

Es ist nämlich

$$\delta_0 - \delta = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{\varkappa-1} - 1$$

Ist nun $q_0$ das Gewicht von $P_\pi$, so ergibt sich aus $q_0 > g - 2\varkappa + 2$ die Ungleichung

$$\pi_1 + 4\pi_2 + \cdots + (\varkappa - 1)^2 \pi_{\varkappa-1} > (\varkappa - 1)^2 + 1$$

woraus $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{\varkappa-1} > 1$ also $\delta_0 - \delta > 0$ folgt.

Ein Ausdruck (18) kann aber unter den angegebenen Bedingungen, wie im § 3 gezeigt werden soll, nicht identisch verschwinden, und $P_\pi$ hat somit in $H$ einen von null verschiedenen Koeffizienten. Es ist also die Gleichung $H = 0$ keine Identität, was zu beweisen war.

Es bleibt nun noch der Fall, daß es unter den Gliedern von $L$ kein einziges Glied von der Gestalt $\Lambda(x, y) P_\omega$ mit einem quadratischen Gewicht $> g - 2\varkappa + 2$ gibt. In diesem Falle läßt sich nachweisen, daß das Potenzprodukt $P_\varkappa$ in $H$ einen nicht identisch verschwindenden Koeffizienten hat. Bezeichnen wir nämlich mit $S(x, y)$ den Koeffizienten von $P_\varkappa$ in $L$, wobei $S(x, y)$ auch gleich null sein kann, so sind die Koeffizienten von $P_\varkappa$ in $K_2$, $L$, $L_1$ beziehungsweise gleich

$$-\frac{\alpha_\varkappa a_\varkappa}{y}\left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta}, \; S(x, y), \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^{\delta+1} S(x+1, z).$$

Daher ist der Koeffizient von $P_\varkappa$ in $H$ gleich

$$S(x, y) + \frac{r(x)}{y^2} S\left(x+1, \frac{r(x)}{y} + 1\right) + \frac{\alpha_\varkappa a_\varkappa}{y},$$

wobei $\alpha_\varkappa$ und $a_\varkappa$ von null verschieden sind. Es soll nun im § 4 gezeigt werden, daß ein Ausdruck der angeschriebenen

Art nicht identisch in $x$, $y$ verschwinden kann. Da also $P_\varkappa$ in $H$ einen von null verschiedenen Koeffizienten hat, so sehen wir auch in diesem Falle, daß die Gleichung $H = 0$ keine Identität sein kann. Damit ist auch der Fall $\varkappa > 1$ erledigt.

Somit können wir behaupten, daß die algebraische Differentialgleichung $H = 0$, die in der im § 2 beschriebenen Art aus der Gleichung $G = 0$ abgeleitet wurde, keine Identität sein kann. Wenn wir nun aus der Gleichung $H = 0$ in derselben Weise eine neue Differentialgleichung ableiten, wie wir aus $G = 0$ die Gleichung $H = 0$ abgeleitet haben, und dieses Verfahren genügend oft wiederholen, so kommen wir schließlich zu einer algebraischen Gleichung zwischen $x$ und $y$; darin liegt aber ein Widerspruch, wie bereits zu Beginn des § 2 auseinandergesetzt wurde. Damit ist die Annahme, die Funktion $y = \varphi(x)$ genüge einer algebraischen Differentialgleichung, widerlegt.

## § 3.

Im voranstehenden wurden mehrere Hilfssätze verwendet, mit deren Beweis wir uns in diesem und dem folgenden Abschnitt zu beschäftigen haben. Bei jedem dieser Hilfssätze handelt es sich darum, daß gewisse Verbindungen rationaler Funktionen von zwei Veränderlichen nicht identisch verschwinden können.

In erster Linie soll unter der Voraussetzung, daß $r(x)$ eine im Unendlichen verschwindende rationale Funktion ist, die sich nicht in die Gestalt $\varphi(x)(\varphi(x+1) - 1)$ setzen läßt,[1] wenn $\varphi(x)$ eine rationale Funktion sein soll, gezeigt werden, daß eine Gleichung von der Gestalt

$$(19) \qquad R(x, y) - \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\gamma R\left(x+1, \frac{r(x)}{y} + 1\right) = 0,$$

in welcher $R$ eine nicht identisch verschwindende rationale Funktion von $x$, $y$, und $\gamma$ eine ganze Zahl ist, nicht anders identisch bestehen kann, als wenn $R(x, y)$ eine Konstante und $\gamma = 0$ ist.

Nehmen wir an, (19) sei identisch erfüllt. Es werde dann

$$R(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

gesetzt, wobei $M(x, y)$ und $N(x, y)$ Polynome in $x$ und $y$ ohne gemeinsamen Faktor bedeuten, deren Grad bezüglich $y$ beziehungsweise gleich $\mu$ und $\nu$ sei. Setzt man nun

$$M(x, y) = \sum_{i=0}^{\mu} M_i(x)\, y^{\mu - i}$$

[1]) Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend damit, daß die Funktionalgleichung (2) keine rationale Lösung hat.

und

$$r(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$$

wobei die Polynome $s(x)$ und $t(x)$ ohne gemeinsamen Faktor angenommen werden, so erhält man

$$t(x)^\mu y^\mu M\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right) = \sum_{k=0}^{\mu} y^{\mu-k} t(x)^{\mu-k} s(x)^k \sum_{\varrho=0}^{\mu-k} \binom{\mu-\rho}{k} M_\varrho(x+1)$$

woraus ersichtlich ist, daß $t(x)^\mu y^\mu M\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$ ein Polynom in $x$, $y$ ist, welches nicht durch $y$ teilbar ist, und dessen Grad $\mu_1$ in Bezug auf $y$ höchstens gleich $\mu$ ist. Die entsprechenden Bemerkungen gelten für das Polynom $t(x)^\nu y^\nu N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$, dessen Grad in $y$ mit $\nu_1$ bezeichnet werde.

Aus (19) folgt

$$(20) \quad \frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\gamma t(x)^{\nu-\mu} y^{\nu-\mu} \frac{\left[t(x)^\mu y^\mu M\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)\right]}{\left[t(x)^\nu y^\nu N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)\right]}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die beiden in eckige Klammern [ ] eingeschlossenen Polynome keinen gemeinsamen von $y$ abhängigen Faktor haben können. Sei nämlich $K(x, y)$ ein solcher gemeinsamer Faktor, und

$$(21) \qquad t(x)^\mu y^\mu M\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right) = K(x, y)\, A(x, y)$$

$$(22) \qquad t(x)^\nu y^\nu N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right) = K(x, y)\, B(x, y)$$

wobei $k$, $\alpha$, $\beta$ die Gradzahlen bezüglich $y$ der Polynome $K$, $A$, $B$ seien. Führt man dann in die Identität (21) durch die Gleichungen

$$(23) \qquad \begin{aligned} x+1 &= x', & x &= x'-1 \\ \frac{r(x)}{y}+1 &= y', & y &= \frac{r(x'-1)}{y'-1} \end{aligned}$$

die neuen Variablen $x'$, $y'$ ein, so ergibt sich

$$M(x', y') = \left(\frac{y'-1}{s(x'-1)}\right)^\mu K\left(x'-1, \frac{r(x'-1)}{y'-1}\right) A\left(x'-1, \frac{r(x'-1)}{y'-1}\right)$$

oder unter Berücksichtigung von

$$\mu \geqq \mu_1 = k + \alpha$$
$$\nu \geqq \nu_1 = k + \beta:$$
$$M(x', y') =$$
$$\frac{(y'-1)^{\mu-\mu_1}}{s(x'-1)^{\mu}\, t(x'-1)^{\mu_1}} \left[ (y'-1)^k\, t(x'-1)^k\, K\left(x'-1, \frac{r(x'-1)}{y'-1}\right) \right] .$$
$$\cdot \left[ (y'-1)^{\alpha}\, t(x'-1)^{\alpha}\, A\left(x'-1, \frac{r(x'-1)}{y'-1}\right) \right]$$

nebst der analogen aus (22) abgeleiteten Gleichung. Nun muß sich der Faktor

$$(y'-1)^k\, t(x'-1)^k\, K\left(x'-1, \frac{r(x'-1)}{y'-1}\right)$$

der den beiden Polynomen $M(x'\ y')$ und $N(x', y')$ gemeinschaftlich ist, auf einen von $y'$ freien Ausdruck reduzieren, d. h. es muß

$$(y'-1)^k\, t(x'-1)^k\, K\left(x'-1, \frac{r(x'-1)}{y'-1}\right) = J(x')$$

sein. Führen wir in diese Gleichung vermöge (23) wieder die Variablen $x$, $y$ ein, so folgt

$$K(x, y) = \frac{J(x+1)}{s(x)^k}\, y^k$$

Da aber, wie wir gesehen haben, weder $t(x)^{\mu}\, y^{\mu}\, M\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$, noch $t(x)^{\nu}\, y^{\nu}\, N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$ durch $y$ teilbar sind, so kann auch $K(x, y)$ nicht durch $y$ teilbar sein, d. h. es ist $k = 0$ und $K(x, y)$ also nur von $x$ abhängig, wie behauptet wurde.

Sei nun $y^{\lambda}$ die höchste in $N(x, y)$ aufgehende Potenz von $y$ $(\lambda \geqq 0)$ und $N(x, y) = y^{\lambda}\, N_1(x, y)$, so folgt aus der Identität (20), daß $N_1(x, y)$ und $t(x)^{\nu}\, y^{\nu}\, N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$ übereinstimmen müssen, wenn man von etwaigen Faktoren absieht, die nur von $x$, nicht aber von $y$ abhängen. Wir können also schreiben

$$N(x, y) = y^{\lambda}\, f(x)\, t(x)^{\nu}\, y^{\nu}\, N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right), \tag{24}$$

unter $f(x)$ eine rationale Funktion von $x$ verstanden. Unsere nächste Aufgabe wird es sein, die Möglichkeit einer Identität von der Form (24) zu diskutieren.

Es sei

$$N(x, y) = \sum_{i=0}^{\nu} N_i(x)\, y^{\nu-i} = \chi(x)\, P(x, y),$$

wobei $\chi(x)$ den größten gemeinschaftlichen Teiler der Polynome $N_0(x)$, $N_1(x), \ldots$ bezeichnet. Man denke sich ferner das Polynom

$$t(x)^\nu\, y^\nu\, P\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$$

nach Potenzen von $y$ geordnet, und mit $\psi(x)$ den größten gemeinschaftlichen Teiler der Koeffizienten der einzelnen $y$-Potenzen bezeichnet.[1]) Aus (24) folgt dann

$$P(x, y) = \left[f(x)\, \psi(x)\, \frac{\chi(x+1)}{\chi(x)}\right] \frac{t(x)^\nu\, y^{\lambda+\nu}\, P\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)}{\psi(x)}$$

Beachtet man nun, daß die beiden Polynome

$$P(x, y), \quad \frac{1}{\psi(x)}\, t(x)^\nu\, y^{\lambda+\nu}\, P\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$$

keine Faktoren haben, die frei von $y$ sind, so sieht man aus der eben angeschriebenen Gleichung, daß der in Klammern [ ] eingeschlossene Ausdruck eine Konstante sein muß, die man gleich 1 annehmen kann. Man erhält dann

$$\psi(x)\, P(x, y) = t(x)^\nu\, y^{\lambda+\nu}\, P\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right) \tag{25}$$

Es mögen nun mit $F_1(x, y)$, $F_2(x, y), \ldots F_i(x, y), \ldots$ die irreduziblen Faktoren von $P(x, y)$ bezeichnet werden. Aus dem Bestehen der Identität (25) kann dann gefolgert werden, daß die Polynome $F_i(x, y)$ alle bezüglich $y$ linear sind. Nehmen wir nämlich an, einer dieser Faktoren, etwa $F_1(x, y)$ habe bezüglich $y$ einen Grad $\geqq 2$. Dann definiert die Gleichung

$$F_1(x, y) = 0$$

eine algebraische Funktion $y = \eta_1(x)$, die mindestens einen im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt hat. Bezeichnet dann allgemein $\eta_i(x)$ die durch die Gleichung

$$F_i(x, y) = 0$$

[1]) Man überzeugt sich leicht, daß $\psi(x)$ in $t(x)_\nu\, s(x)^\nu$ aufgehen muß.

definierte rationale oder algebraische Funktion von $x$, so genügt wegen (25) eine der Funktionen $\eta_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ der Gleichung

$$\eta_i(x) = \frac{r(x-1)}{\eta_1(x-1)} + 1.$$

Hat nun die Funktion $\eta_1(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen Verzweigungspunkt, so hat $\eta_i(x)$ an der Stelle $x = x_0 + 1$ einen Verzweigungspunkt. Daraus schließt man in gleicher Weise, daß eine der Funktionen $\eta_1(x), \eta_2(x) \ldots$ an der Stelle $x = x_0 + 2$ verzweigt ist, u. s. f. Dies enthält einen Widerspruch, da die Verzweigungspunkte aller Funktionen $\eta_i(x)$ nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können.

Es werde nunmehr

$$F_i(x, y) = A_i(x)\, y - B_i(x), \quad \frac{B_i(x)}{A_i(x)} = f_i(x)$$

gesetzt und angenommen, daß $P(x, y)$ den Faktor $F_i(x, y)$ mit der Vielfachheit $m_i$ enthalte. Es ist also

$$P(x, y) = \prod_i \big(F_i(x, y)\big)^{m_i}$$

wo das Produkt über alle voneinander verschiedenen irreduziblen Faktoren von $P(x, y)$ zu erstrecken ist. Statt dessen kann man auch schreiben

$$P(x, y) = (y-1)^{m_0} \prod_{i=1}^{l} \big(F_i(x, y)\big)^{m_i}$$

wobei das Produkt über alle von $(y-1)$ verschiedenen irreduzibeln Faktoren von $P(x, y)$ zu erstrecken ist, und $m_0 = 0$ zu setzen ist, wenn $P(x, y)$ den Faktor $y - 1$ nicht enthält. Aus (25) folgt dann unter Beachtung von $\nu = \sum_{i=0}^{l} m_i$

$$\psi(x) \prod_{i=1}^{l} A_i(x)^{m_i} (y-1)^{m_0} \prod_{i=1}^{l} \big(y - f_i(x)\big)^{m_i} = \tag{26}$$

$$= t(x)^{\nu}\, r(x)^{m_0}\, y^{\lambda} \prod_{i=1}^{l} \big(A_i(x+1) - B_i(x+1)\big)^{m_i} \left(y - \frac{r(x)}{f_i(x+1) - 1}\right)^{m_i}$$

Daraus folgt durch Vergleichung der Gradzahlen bezüglich $y$

$$\lambda = m_0$$

und durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $y^\nu$ auf beiden Seiten

$$(27)\quad \psi(x) \prod_{i=1}^{l} A_i(x)^{m_i} = t(x)^\nu \, r(x)^\lambda \prod_{i=1}^{l} \Big(A_i(x+1) - B_i(x+1)\Big)^{m_i}$$

Aus (26) und (27) folgt

$$(28)\quad (y-1)^\lambda \prod_{i=1}^{l} \Big(y - f_i(x)\Big)^{m_i} = y^\lambda \prod_{i=1}^{l} \Big(y - \frac{r(x)}{f_i(x+1)-1}\Big)^{m_i}$$

Mit $\eta(x)$ werde irgend eine der rationalen Funktionen von $x$ bezeichnet, die für $y$ gesetzt die linke Seite von (28) zu null machen. $\eta(x)$ ist also eine der Funktionen $f_1(x), f_2(x) \ldots f_l(x)$ oder 1, das letztere jedoch nur, wenn $\lambda > 0$ ist. Nehmen wir an, es sei $\eta(x)$ nicht identisch gleich null, so folgt aus (28), daß einer der Ausdrücke

$$\eta(x) - \frac{r(x)}{f_i(x+1)-1}$$

identisch gleich null sein muß, d. h. daß eine der Funktionen $f_i(x)$, sie möge $f_a(x)$ heißen, der Gleichung

$$f_a(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{\eta(x-1)}$$

genügen muß. Nehmen wir nun an, die Funktion $f_a(x)$ sei nicht identisch gleich null, so können wir mit $f_a(x)$ dieselbe Überlegung anstellen, wie wir sie soeben mit $\eta(x)$ angestellt haben, und wir sehen, daß eine der Funktionen $f_i(x)$, etwa $f_b(x)$, der Gleichung

$$f_b(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_a(x-1)} = 1 + \cfrac{r(x-1)}{1 + \cfrac{r(x-2)}{\eta(x-2)}}$$

genügen muß. Auf diesem Wege gelangen wir, mit $\eta(x)$ beginnend, zu einer Reihe von rationalen Funktionen

$$(29)\qquad \eta(x),\ f_a(x),\ f_b(x), \ldots$$

die nur dann abbricht, wenn einmal eine Funktion der Reihe identisch gleich null ist.

Jede Funktion aus (29) ist mit einer der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_l(x)$, 1 identisch. Nehmen wir nun an, die Funktion $\eta(x)$ sei so beschaffen, daß keine der Funktionen der Reihe (29) identisch verschwindet, so muß offenbar einmal eine Funktion wiederkehren, die bereits an früherer Stelle in (29) steht. Dabei muß $\eta(x)$ die erste sich wiederholende Funktion sein, wie man aus der eindeutigen und eindeutig umkehrbaren Beziehung

$$f_k(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_j(x-1)}, \quad f_j(x) = \frac{r(x)}{f_k(x+1) - 1}$$

zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern $f_j(x)$, $f_k(x)$ der Reihe (29) ersieht. Ferner bemerkt man, daß die Reihe (29) mindestens zwei verschiedene Funktionen enthalten muß. Andernfalls wäre nämlich

$$f_a(x) = \eta(x), \quad \eta(x+1) = 1 + \frac{r(x)}{\eta(x)}$$

was der Voraussetzung widerspricht, daß die Funktionalgleichung (2) keine rationale Lösung hat.[1])

Zusammenfassend können wir also sagen: Wenn wir mit der Funktion $\eta(x)$ beginnend die Reihe (29) in der angegebenen Weise bilden, so kommt entweder unter den Funktionen dieser Reihe einmal die Null vor und die Reihe (29) bricht dann ab, oder es wiederholt sich einmal die Funktion $\eta(x)$ und von da an kehren dann stets dieselben Funktionen periodisch wieder. Im ersten Falle besteht eine Identität von der Form

$$0 = 1 + \cfrac{r(x-1)}{1 + \cfrac{r(x-2)}{1 + \cdots + \cfrac{r(x-\mu+1)}{1 + \cfrac{r(x-\mu)}{\eta(x-\mu)}}}}$$

im zweiten Falle eine Identität von der Form

$$\eta(x) = 1 + \cfrac{r(x-1)}{1 + \cfrac{r(x-2)}{1 + \cdots + \cfrac{r(x-\mu)}{1 + \cfrac{r(x-\mu-1)}{\eta(x-\mu-1)}}}}$$

wobei $\mu$ jedesmal eine ganze positive Zahl bedeutet.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die Gleichung (28) nur dann bestehen kann, wenn $\lambda = 0$ ist. Wäre nämlich $\lambda > 0$, so könnten wir in den voranstehenden Überlegungen $\eta(x) = 1$ setzen, und mit 1 beginnend die Funktionenreihe (29) bilden. Da dann offenbar

---

[1]) Daß die Gleichung (25) und dann natürlich auch (24) eine Identität sein kann, wenn (2) eine rationale Lösung $\varphi(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ hat, ist leicht zu sehen. Man braucht dann nur $\lambda = 0$, $P(x, y) = (a(x)y - b(x))^\nu$ zu setzen.

keine der auf $\eta(x)$ folgenden Funktionen identisch gleich 1 werden kann, so muß die Reihe (29) schließlich mit einer Funktion, die identisch gleich null ist, abbrechen. Unter Berücksichtigung der früher gemachten Voraussetzung, daß $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, ergibt sich aber sofort, daß dies unmöglich ist, da aus den Formeln

$$f_a(x) = 1 + r(x-1), \qquad f_b(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_a(x-1)}, \text{ etc.}$$

ersichtlich ist, daß jede der Funktionen $f_a(x)$, $f_b(x)$, ... im Unendlichen den Wert 1 hat.

Somit ist $\lambda = 0$ und (28) nimmt die Gestalt an:

$$\prod_{i=1}^{l} \left(y - f_i(x)\right)^{m_i} = \prod_{i=1}^{l} \left(y - \frac{r(x)}{f_i(x+1) - 1}\right)^{m_i} \tag{30}$$

Dabei ist keine der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_l(x)$ identisch gleich 1, und offenbar auch keine identisch gleich null, da rechts der Faktor $y$ nicht vorkommt. Bezeichnet also $\eta(x)$ eine der Funktionen $f_1(x)$, ... $f_l(x)$ und bildet man mit $\eta(x)$ als Anfangsfunktion die zugehörige Reihe (29), so kann diese Reihe keine identisch verschwindende Funktion enthalten und es muß daher in derselben die Funktion $\eta(x)$ einmal wiederkehren. Wir können also sagen: Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_l(x)$ ordnen sich in Perioden derart, daß zwei aufeinanderfolgende Funktionen $f_j(x)$, $f_k(x)$ einer Periode der Gleichung

$$f_k(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_j(x-1)}$$

genügen. An die letzte Funktion einer Periode schließt sich vermöge derselben Beziehung wieder die erste Funktion an. Einer früheren Bemerkung zufolge muß jede Periode mindestens zwei Funktionen umfassen.

Es soll nun, wieder mit Verwendung der Voraussetzung, daß $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, gezeigt werden, daß eine Identität von der Form (30) unmöglich ist. Zu dem Zwecke bilden wir die mit $f_1(x)$ beginnende Funktionenreihe. Dieselbe sei

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots f_\vartheta(x)$$

wobei $\vartheta \geqq 2$, und

$$f_{i+1}(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_i(x-1)}, \qquad f_1(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_\vartheta(x-1)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots \vartheta - 1)$$

Man sieht nun sofort, daß $f_1(x)$ im Unendlichen weder unendlich groß werden, noch einen endlichen von null und eins verschiedenen Wert annehmen, noch von geringerer Ordnung null werden kann, als $r(x)$. Denn in allen diesen Fällen würden $f_2(x)$ und alle folgenden Funktionen der mit $f_1(x)$ beginnenden Funktionenreihe im Unendlichen den Wert 1 annehmen und die Funktion $f_1(x)$ könnte also nicht wiederkehren. Desgleichen ergibt sich, daß $f_1(x)$ im Unendlichen nicht von höherer Ordnung null werden kann, als $r(x)$; denn dies hätte zur Folge, daß $f_2(x)$ im Unendlichen einen unendlich großen Wert und alle folgenden Funktionen $f_3(x), \ldots$ den Wert 1 hätten. Für das Verhalten von $f_1(x)$ im Unendlichen bleiben also nur die beiden Möglichkeiten:

*a)* $f_1(x)$ hat im Unendlichen den Wert 1; dann haben natürlich auch alle Funktionen $f_2(x), \ldots f_\vartheta(x)$ im Unendlichen den Wert 1.

*b)* $f_1(x)$ verschwindet im Unendlichen von derselben Ordnung wie $r(x)$. Soll aber die Funktion $f_1(x)$ in der mit $f_1(x)$ beginnenden Funktionenreihe wiederkehren, so muß auch $f_2(x)$ im Unendlichen verschwinden, und zwar von derselben Ordnung wie $r(x)$. Denn andernfalls würden, wie die verhergehenden Betrachtungen zeigen, die auf $f_2(x)$ folgenden Funktionen von einer gewissen Stelle ab alle im Unendlichen den Wert 1 annehmen; $f_1(x)$ könnte also nicht sich wiederholen. In gleicher Weise schließt man, daß alle Funktionen $f_2(x), \ldots f_\vartheta(x)$ im Unendlichen von derselben Ordnung wie $r(x)$ verschwinden müssen.

Es läßt sich nun zeigen, daß auch diese zwei Fälle *a)* und *b)* auf Widersprüche führen. Es kann nämlich aus den gemachten Annahmen der Schluß gezogen werden, daß die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_\vartheta(x)$ in der Umgebung der unendlich fernen Stelle beliebig weit übereinstimmen. Da aber die Funktionenreihe $f_1(x), \ldots f_\vartheta(x)$ mindestens zwei verschiedene Funktionen enthalten muß, so enthält die genannte Folgerung einen Widerspruch. Der Beweis gestaltet sich in den beiden Fällen *a)* und *b)* etwa folgendermaßen:

*a)* Es mögen folgende Entwicklungen bestehen

$$r(x-1) = \frac{r_0}{x^\tau} + \frac{r_1}{x^{\tau+1}} + \frac{r_2}{x^{\tau+2}} + \cdots, \qquad r_0 \neq 0, \tau > 0$$

$$f_i(x) = a_{i0} + \frac{a_{i1}}{x} + \frac{a_{i2}}{x^2} + \cdots, \qquad a_{i0} = 1$$

$$(i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

Ferner wollen wir annehmen, die Koeffizienten $a_{i0}, a_{i1}, \ldots a_{ik}$ seien von $i$ unabhängig, also

$$a_{1p} = a_{2p} = \cdots = a_{\vartheta p} = b_p \; (p = 0, 1, \cdots k)$$

eine Annahme, die für $k=0$ sicher erfüllt ist. Da dieser Voraussetzung gemäß die Koeffizienten von $1, \frac{1}{x}, \ldots \frac{1}{x^k}$ für alle Funktionen $f_i(x)$ dieselben sind, so stimmen auch in den Entwicklungen aller Funktionen $f_i(x-1)$ die Koeffizienten von $1, \frac{1}{x}, \ldots \frac{1}{x^k}$ überein. Dann lehrt aber die Gleichung

$$f_{i+1}(x) = 1 + \frac{r(x-1)}{f_i(x-1)}, \quad (f_{\vartheta+1}(x) = f_1(x))$$
$$(i = 1, 2, \ldots \vartheta.)$$

daß in den Entwicklungen aller Funktionen $f_{i+1}(x)$ (d. h. der Funktionen $f_2(x), \ldots f_\vartheta(x), f_1(x)$) die Koeffizienten von $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^{k+\tau}}$ übereinstimmen. Die Funktionen $f_1(x), \ldots f_\vartheta(x)$ haben also beliebig weit übereinstimmende Entwicklungskoeffizienten.

*b*) An Stelle der Funktionen $f_i(x)$ mögen die Funktionen $g_i(x)$ betrachtet werden, die aus den ersteren durch die Gleichungen

$$g_i(x) = -\frac{f_{\vartheta+1-i}(x)}{r(x)}, \quad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

hervorgehen. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Funktionen $g_i(x)$ besteht dann die Relation

$$g_{i+1}(x-1) = \frac{1}{1 + r(x) g_i(x)}, \quad (g_{\vartheta+1}(x) = g_1(x))$$
$$i = 1, 2, \ldots \vartheta.$$

Dabei haben alle Funktionen $g_i(x)$ im Unendlichen den Wert 1. Daraus und aus der eben angeschriebenen Rekursionsformel für die Funktionen $g_i(x)$ schließt man nun analog wie in *a*), daß die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $g_i(x)$ um die unendlich ferne Stelle beliebig weit übereinstimmen. Natürlich gilt dann das gleiche von den Funktionen $f_i(x)$.

Die letzten Betrachtungen zusammenfassend, können wir sagen: Die Gleichung (25) kann nicht anders identisch erfüllt sein, als daß $\lambda = 0$ ist und $P(x, y)$ sich auf ein von $y$ unabhängiges Polynom und daher auf eine Konstante reduziert.

Somit kann die Gleichung (24) nur bestehen, wenn $\lambda = 0$ ist und $N(x, y)$ sich auf ein Polynom $\chi(x)$ von $x$ allein reduziert. Wir hatten nun aus der Gleichung (20) die Folgerung gezogen, daß das Polynom $N(x, y)$ eine Relation von der Gestalt (24) erfüllen muß. Aus (20) folgt aber auch eine ganz analoge Relation für das Polynom $M(x, y)$. Es muß also auch $M(x, y)$ eine Funktion von $x$ allein sein. Dies besagt aber, daß eine Gleichung von der Gestalt (19) nicht anders identisch erfüllt sein kann, als daß $R(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ eine rationale Funktion $q(x)$ von $x$ allein ist. (19) nimmt also die Form an:

$$q(x) - \left(-\frac{r(x)}{y^2}\right)^\gamma q(x+1) = 0,$$

und da $R(x, y) = q(x)$ als nicht identisch null vorausgesetzt wurde, so kann diese Gleichung nur so erfüllt sein, daß $\gamma = 0$ und $q(x)$ eine Konstante ist.

Der Beweis unseres mehrfach im § 2 verwendeten Hilfssatzes ist damit erbracht.

## § 4.

Es wurden im § 2 noch zwei weitere Hilfssätze verwendet, die jetzt bewiesen werden sollen. Diese Sätze besagen, daß unter der Voraussetzung, $r(x)$ sei eine im Unendlichen verschwindende rationale Funktion, die sich nicht in die Gestalt $\varphi(x)(\varphi(x+1) - 1)$ setzen läßt, wenn $\varphi(x)$ eine rationale Funktion sein soll, Gleichungen von der Form

$$S(x, y) + \frac{r(x)}{y^2}\, S\left(x+1, \frac{r(x)}{y} + 1\right) + \frac{C}{y} = 0 \tag{31}$$

und

$$S(x, y) + \frac{y^2}{r(x)}\, S\left(x+1, \frac{r(x)}{y} + 1\right) + C\,\frac{r'(x)}{r(x)}\, y = 0 \tag{32}$$

nicht identisch bestehen können, wenn $S(x, y)$ eine beliebige rationale Funktion von $x$, $y$ und $C$ eine von null verschiedene Konstante ist. Dabei kann man $C = 1$ annehmen, wenn man für $\frac{1}{C} S(x, y)$ wieder $S(x, y)$ schreibt.

Zunächst handelt es sich darum, die Annahme, es bestehe eine Identität (31), ad absurdum zu führen. Setzen wir nun

$$r(x) = \frac{s(x)}{t(x)},\ S(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},\ N(x, y) = y^\lambda N_1(x, y),$$

wobei $s(x)$, $t(x)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$, $N_1(x, y)$ Polynome und $y^\lambda$ die höchste in $N(x, y)$ aufgehende Potenz von $y$ bedeuten ($\lambda \geqq 0$), bezeichnen wir ferner mit $\mu$ beziehungsweise $\nu$ die Gradzahlen von $M(x, y)$ und $N(x, y)$ bezüglich $y$, so gewinnt (31) die Gestalt

$$(33)\qquad \frac{M(x,y)}{y^{\lambda}\, N_1(x,y)} = -\frac{1}{y} - \frac{s(x)}{t(x)^{\mu-\nu+1}\, y^{\mu-\nu+2}} \cdot \frac{\left[t(x)^{\mu}\, y^{\mu}\, M\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)\right]}{\left[t(x)^{\nu}\, y^{\nu}\, N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)\right]}$$

Dabei sind, wie früher (§ 3) gezeigt wurde, die beiden in Klammern [ ] eingeschlossenen Ausdrücke Polynome, welche keinen gemeinsamen von $y$ abhängigen Faktor haben und nicht durch $y$ teilbar sind. Wenn also die Gleichung (33) identisch erfüllt sein soll, so können sich die beiden Polynome $N_1(x, y)$ und

$$t(x)^{\nu}\, y^{\nu}\, N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$$

nur um einen Faktor unterscheiden, der von $x$ allein, aber nicht von $y$ abhängt. Es muß also

$$N(x,y) = y^{\lambda} f(x)\, t(x)^{\nu}\, y^{\nu}\, N\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$$

sein, unter $f(x)$ eine rationale Funktion von $x$ verstanden. Unter den über $r(x)$ gemachten Voraussetzungen wurde aber im § 3 gezeigt, daß eine Gleichung, wie die eben angeschriebene nur dann identisch erfüllt sein kann, wenn $\lambda = 0$ und $N(x, y)$ eine Funktion von $x$ allein ist. Die Gleichung (33) erhält also die Gestalt:

$$Q(x,y) = -\frac{1}{y} - \frac{r(x)}{y^2}\, Q\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right),$$

wobei $Q(x, y)$ ein Polynom in $y$ mit in $x$ rationalen Koeffizienten bedeutet. In diesem Falle erhält aber die rechte Seite der Gleichung die Gestalt

$$-\frac{1}{y} + \frac{Q_2(x)}{y^2} + \frac{Q_3(x)}{y^3} + \cdots$$

und die Gleichung kann offenbar keine Identität sein. Damit ist bewiesen, daß eine Gleichung von der Form (31) nicht identisch bestehen kann.

Betrachten wir jetzt die Gleichung (32) und nehmen wir an, dieselbe sei eine Identität. Dieselbe Überlegung, die wir an der Gleichung (31) durchgeführt haben, zeigt dann, daß eine Identität (32) nicht anders möglich ist, als wenn $S(x, y)$ ein Polynom in $y$ mit in $x$ rationalen Koeffizienten ist. Bezeichnet ferner $\mu$ den Grad von $S(x, y)$ bezüglich $y$, so ist $S\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$ ein Polynom $\mu^{\text{ten}}$ Grades in $\frac{1}{y}$. Anderseits folgt aus (32)

$$S\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)=-\frac{r(x)}{y^2} S(x, y)-\frac{r'(x)}{y},$$

und somit kann $S\left(x+1, \frac{r(x)}{y}+1\right)$ höchstens vom zweiten Grad in $\frac{1}{y}$ sein. Es ist also $\mu \leqq 2$ und wir können setzen

$$S(x, y)=A(x) y^2+B(x) y+C(x), \tag{34}$$

wobei $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ rationale Funktionen von $x$ bedeuten, von denen einige auch identisch null sein können. An die Stelle von Gleichung (32) treten dann die 3 Gleichungen

$$\begin{aligned}
& C(x)+r(x) A(x+1)=0 \\
& B(x)+B(x+1)+2 A(x+1)+\frac{r'(x)}{r(x)}=0 \\
& r(x) A(x)+A(x+1)+B(x+1)+C(x+1)=0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Aus denselben lassen sich $A(x)$ und $C(x)$ eliminieren, wodurch man für $B(x)$ folgende Relation erhält:

$$\begin{aligned}
& r(x+2) B(x+3)+\big(r(x+2)+1\big) B(x+2)- \\
& -\big(r(x+1)+1\big) B(x+1)-r(x+1) B(x)- \\
& -r(x+1) \frac{r'(x)}{r(x)}+r'(x+2)-\frac{r'(x+1)}{r(x+1)}=0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Die Lösbarkeit dieser Gleichung durch eine rationale Funktion $B(x)$ ist nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung dafür, daß es eine Funktion $S(x, y)$ von der Gestalt (34) gibt, die der Gleichung (32) genügt. Wenn nämlich der Gleichung (36) eine rationale Funktion $B(x)$ genügt, so lassen sich zu derselben zwei Funktionen $A(x)$ und $C(x)$ so bestimmen, daß die Gleichungen (35) erfüllt sind.

Es läßt sich nun unter Benützung der Annahme, daß $r(x)$ im Unendlichen verschwindet, leicht zeigen, daß der Gleichung (36) durch keine rationale Funktion $B(x)$ genügt werden kann,[1]) ja überhaupt durch keine Funktion, die im Unendlichen durch eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$, in welcher keine

[1]) Das Bestehen der Gleichungen (35) und somit auch die Lösbarkeit von (36) durch eine rationale Funktion, ist, wie man sich leicht überzeugt, eine notwendige Bedingung dafür, daß es nicht-rationale Lösungen der Funktionalgleichung (2) gibt, die einer Riccatischen Gleichung

$$y'+A(x) y^2+B(x) y+C(x)=0$$

mit rationalen Koeffizienten $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ genügen. Ein weiterer Fall, in dem sich die Unlösbarkeit von (36) durch eine rationale Funktion $B(x)$ unoder nur eine endliche Anzahl positiver Potenzen von $x$ vorkommen, darstellbar ist. Wir schreiben zunächst (36) in der Form

$$V = W,$$

wobei gesetzt ist:

$$V = V_1 + V_2, \quad W = W_1 + W_2,$$

$$V_1 = r(x+2)B(x+3) + r(x+2)B(x+2) - r(x+1)B(x+1) - \\ - r(x+1)B(x),$$

$$V_2 = B(x+2) - B(x+1),$$

$$W_1 = r(x+1)\frac{r'(x)}{r(x)} - r'(x+2),$$

$$W_2 = \frac{r'(x+1)}{r(x+1)}.$$

Seien nun

$$r(x) = r_0 x^\varrho + r_1 x^{\varrho-1} + \dots \qquad (r_0 \neq 0)$$
$$B(x) = b_0 x^\beta + b_1 x^{\beta-1} + \dots \qquad (b_0 \neq 0)$$

die Reihenentwicklungen von $r(x)$ und $B(x)$ in der Umgebung der unendlich fernen Stelle, so ergeben sich für $V_1$, $V_2$, $W_1$, $W_2$ die Entwicklungen

$$V_1 = (4\beta + 2\rho)b_0 r_0 x^{\beta+\varrho-1} + \dots, \quad V_2 = \beta b_0 x^{\beta-1} + \dots,$$
$$W_1 = -\rho(\rho-2)r_0 x^{\varrho-2} + \dots, \qquad W_2 = \rho x^{-1} + \dots$$

Wegen $\rho < 0$ verschwindet somit $W_1$ im Unendlichen von höherer Ordnung als $W_2$ und es beginnt also die Entwicklung von $W$ mit dem Glied $\rho x^{-1}$. Soll also die Gleichung (36) durch die Funktion $B(x)$ befriedigt werden, so muß man $\beta$ so bestimmen, daß ebenso wie die Funktion $W$ auch die Funktion $V$ im Unend-

---

schwer zeigen läßt, liegt vor, wenn unter der Gesamtheit $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ der im Endlichen gelegenen Nullstellen und Pole von $r(x)$ wenigstens eine Stelle, etwa $\xi_1$, sich findet, so daß keine der Stellen $\xi_1 \pm 1, \xi_1 \pm 2, \dots$ unter den Stellen $\xi_2, \dots \xi_m$ vorkommt. In diesem Falle muß also jede Lösung von (2), die einer Riccatischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt, eine rationale Funktion sein.

Daß es aber Fälle gibt, in denen (36) eine rationale Lösung hat, ersieht man aus dem Beispiel der Anm. 3 auf der zweiten Seite der Einleitung. Setzt man unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen $u(x) = e^{2\pi i x}$, $2\pi i R(x) - R'(x) = U(x)$, so genügt $y = \varphi(x)$ der Gleichung

$$y' = \frac{Q(x)U(x)}{P(x)P(x+1)}y^2 - \left\{\frac{Q'(x)}{Q(x)} - \frac{P'(x)}{P(x)} + \frac{U(x+1)+U(x)}{P(x+1)}\right\}y + \frac{P(x)U(x+1)}{P(x+1)Q(x)},$$

und der Ausdruck in den Klammern $\{\ \}$ genügt für $B(x)$ gesetzt der Gleichung (36).

lichen genau von der ersten Ordnung verschwindet. Es ist aber sofort ersichtlich, daß die Funktion $V$ dieser Bedingung nicht genügt, wie immer man auch die ganze Zahl $\beta$ wählen mag. Wenn nämlich $\beta \neq 0$ ist, so hat $V$ die Entwicklung

$$V = \beta b_0 x^{\beta-1} + \dots .$$

und unsere Behauptung ist evident. Ist aber $\beta = 0$, so verschwinden sowohl $V_1$ wie $V_2$ im Unendlichen mindestens von der zweiten Ordnung und es verschwindet also auch $V$ sicher von höherer als der ersten Ordnung.

Der Gleichung (36) kann somit durch keine rationale Funktion $B(x)$ genügt werden. Damit ist unter den am Beginn dieses Paragraphen über $r(x)$ gemachten Voraussetzungen die Unmöglichkeit einer Identität (32) nachgewiesen.

## § 5.

Es möge der im § 1 ausgesprochene und im vorstehenden bewiesene Satz auf ein paar Beispiele angewendet werden.

1. Die ganze transzendente Funktion [1])

$$f_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(x+\nu)}$$

genügt der Differenzengleichung

$$a f_a(x+2) + x f_a(x+1) - f_a(x) = 0$$

und folglich genügt die Funktion $\psi(x) = \dfrac{f_a(x+1)}{f_a(x)}$ der Relation

$$a\,\psi(x+1) = \frac{1}{\psi(x)} - x.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß diese Relation durch keine rationale Funktion $\psi(x)$ befriedigt werden kann. Denn jeder im Endlichen gelegenen Nullstelle $x = \xi$ von $\psi(x)$ würde in $x = \xi + 1$ ein Pol von gleicher Ordnung entsprechen, und umgekehrt jedem Pol in $x = \xi + 1$ eine Nullstelle in $x = \xi$. $\psi(x)$ hätte also im Endlichen gleich viele Nullstellen wie Pole und müßte somit im Unendlichen endlich und von null verschieden sein, was mit der Relation für $\psi(x)$ unvereinbar ist. Ferner genügt die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{a f_a(x+1)}{(1-x) f_a(x)} = \frac{a}{1-x}\,\psi(x)$$

[1]) Es bedeutet $a$ eine von null verschiedene Konstante. Für $a = 0$ geht $f_a(x)$ in die längst als transzendental-transzendent bekannte Funktion $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ über (s. Einl.).

der Gleichung

$$\varphi(x+1) = 1 + \frac{a}{x(x-1)} \frac{1}{\varphi(x)} \tag{37}$$

und es hat also offenbar auch diese Gleichung keine rationale Lösung. Nach dem oben zitierten Satze ist daher $\varphi(x)$ eine transzendental-transzendente Funktion. Daraus folgt im Hinblick auf einen von Stadigh bewiesenen Satz (s. § 1), daß auch die Funktion $f_a(x)$ keine algebraische Differentialgleichung befriedigen kann.

2. Die Funktion

$$\Phi_a(x) = 1 + \frac{a}{1.x} + \frac{a^2}{1.2.x(x+1)} + \cdots \qquad (a \neq 0)$$

die als Funktion von $a$ einen bekannten Grenzfall der hypergeometrischen Reihe darstellt, genügt der Relation [1])

$$\frac{a}{x(x+1)} \Phi_a(x+2) + \Phi_a(x+1) - \Phi_a(x) = 0$$

und daher genügt die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{a}{x(1-x)} \frac{\Phi_a(x+1)}{\Phi_a(x)}$$

der Funktionalgleichung (37), ist also transzendental-transzendent. Somit ist auch $\Phi_a(x)$ transzendental-transzendent. Es ergibt sich dies auch aus der Relation $\Phi_a(x) = f_a(x)\Gamma(x)$, die die Beziehung zur Funktion $f_a(x)$ des vorigen Beispiels herstellt und aus der hervorgeht, daß $\varphi(x)$ mit der gleichbezeichneten Funktion im Beispiel 1 identisch ist.

3. Betrachten wir die Besselsche Funktion

$$J_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n+\nu+1)}$$

als Funktion des Index $n$. Dabei möge der Größe $z$ ein fester von null verschiedener Wert $b$ beigelegt und unter $\left(\frac{b}{2}\right)^n$ so viel wie $e^{n \log \frac{b}{2}}$ mit einer beliebigen, jedoch festzuhaltenden Determination des Logarithmus verstanden werden. Ersetzt man nun $n$ durch $x$ und $J_x(b)$ durch $\Psi_b(x)$, so besteht die Relation

[1]) Es hat Professor G. v. Escherich in seinem Seminar die Vermutung ausgesprochen, daß man aus dieser Relation würde folgern können, daß die betrachtete Funktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann. Das Bestreben, dies durch den Beweis zu bestätigen, hat den Verfasser zu der vorliegenden Arbeit geführt.

$$\Psi_b(x+1)+\Psi_b(x-1)=\frac{2x}{b}\Psi_b(x),$$

aus welcher folgt, daß

$$\varphi(x)=\frac{b}{2(x-1)}\,\frac{\Psi_b(x)}{\Psi_b(x-1)}$$

der Gleichung (37) genügt, wenn man in derselben $a=-\frac{b^2}{4}$ setzt und daß also $\varphi(x)$ und daher auch $\Psi_b(x)$ transzendental-transzendent ist. Man bekommt das gleiche Resultat aus dem Zusammenhang von $\Psi_b(x)$ mit der Funktion $f_a(x)$ des ersten Beispiels. Setzt man nämlich $a=-\frac{b^2}{4}$, so ist bekanntlich

$$\Psi_b(x)=\left(\frac{b}{2}\right)^x f_a(x+1),$$

wobei $\varphi(x)$ in die gleichbezeichnete Funktion des Beispiels 1 übergeht. Man erhält also den Satz:

Die Besselsche Funktion $J_n(z)$ als Funktion des Index $n$ kann keiner algebraischen Differentialgleichung genügen.