Sulla teoria delle coordinate curvilinee.

(*del Prof.* FRANCESCO BRIOSCHI, *a Milano*).

In una breve nota pubblicata nel secondo volume degli *Annali di Matematica* (anno 1859), in occasione di alcune ricerche sulle linee di curvatura della superficie delle onde, abbiamo data l'equazione differenziale di quelle linee per una superficie qualunque, formata per mezzo dei parametri del piano tangente, supponendo i parametri stessi funzioni di due coordinate curvilinee. Il sig.r OSSIAN BONNET nella sua interessante memoria « *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* » (1) ha esposto una teorica completa delle superficie curve (non sviluppabili) fondata sulla considerazione delle variabili che servono a fissare la posizione del piano tangente. Rappresentando con Ox, Oy, Oz i tre assi ortogonali, le variabili del sig.r BONNET sono: 1.° l'angolo che il piano passante per la normale alla superficie parallelamente all'asse delle x comprende col piano xz; 2.° il logaritmo-tangente della metà dell'angolo che la normale fa coll'asse delle x; 3.° la distanza dall'origine alla traccia del piano tangente sul piano yz. Le due prime variabili determinano due sistemi di linee sulla superficie e ponno assumersi come parametri delle medesime ossia come coordinate curvilinee.

Ma, sebbene questo sistema di variabili si presti assai opportunamente alla trattazione di molti ed importanti quistioni geometriche, come lo provarono il sig.r BONNET nella citata memoria e più recentemente il Prof. DINI nella sua nota « *Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante* » (2), pure pensiamo che il concetto più

(1) LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques.* Deuxième série, tome V, année 1860.

(2) *Annali di Matematica,* tomo VII, anno 1865.

generale adombrato nel breve nostro lavoro rammentato più sopra, di fondare cioè la teoria delle superficie sulla considerazione di variabili che determinino la posizione del piano tangente, senza fissare a priori quali debbano essere queste variabili, presenti il vantaggio di far dipendere la scelta del sistema di variabili dal problema che si ha di mira. Il presente lavoro non è che un saggio di questa maniera di considerazioni nelle ricerche d'analisi applicata alla geometria delle superficie.

1.° Se con x, y, z si indicano le coordinate rettangolari dei punti di una superficie, con u, v le curvilinee, adottando le ordinarie denominazioni:

$$(1)\qquad \begin{aligned} e &= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 , \\ f &= \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} , \\ g &= \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 , \end{aligned}$$

e $\delta = eg - f^2$; è noto che i valori dei coseni degli angoli α, β, γ, che la normale alla superficie fa coi tre assi, si deducono dalle due equazioni:

$$\alpha\frac{dx}{du} + \beta\frac{dy}{du} + \gamma\frac{dz}{du} = 0 \quad , \qquad \alpha\frac{dx}{dv} + \beta\frac{dy}{dv} + \gamma\frac{dz}{dv} = 0 \ ,$$

e dalla $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Per queste relazioni, indicando con A, B, C i primi membri delle equazioni che seguono, si hanno le:

$$(2)\qquad \begin{aligned} A &= \alpha\frac{d^2x}{du^2} + \beta\frac{d^2y}{du^2} + \gamma\frac{d^2z}{du^2} = -\left[\frac{d\alpha}{du}\frac{dx}{du} + \frac{d\beta}{du}\frac{dy}{du} + \frac{d\gamma}{du}\frac{dz}{du}\right] , \\ B &= \alpha\frac{d^2x}{du\,dv} + \beta\frac{d^2y}{du\,dv} + \gamma\frac{d^2z}{du\,dv} = -\left[\frac{d\alpha}{dv}\frac{dx}{du} + \cdots\right] = -\left[\frac{d\alpha}{du}\frac{dx}{dv} + \cdots\right] , \\ C &= \alpha\frac{d^2x}{dv^2} + \beta\frac{d^2y}{dv^2} + \gamma\frac{d^2z}{dv^2} = -\left[\frac{d\alpha}{dv}\frac{dx}{dv} + \frac{d\beta}{dv}\frac{dy}{dv} + \frac{d\gamma}{dv}\frac{dz}{dv}\right] . \end{aligned}$$

Ora le (1), (2) danno:

$$\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}+\frac{dy}{du}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{dz}{du}\frac{d^2z}{du^2}=\frac{1}{2}\frac{de}{du}\ ,$$

$$\frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{du^2}+\frac{dy}{dv}\frac{d^2y}{du^2}+\frac{dz}{dv}\frac{d^2z}{du^2}=\frac{df}{du}-\frac{1}{2}\frac{de}{dv}\ ,$$

$$\alpha\frac{d^2x}{du^2}+\beta\frac{d^2y}{du^2}+\gamma\frac{d^2z}{du^2}=A\ ,$$

dalle quali e dalle analoghe si deducono pei differenziali secondi di x, y, z rispetto ad u, v le seguenti espressioni:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2x}{du^2}&=\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}-q\right)\frac{dx}{du}+r\frac{dx}{dv}+A\alpha\ ,\\ \frac{d^2x}{du\,dv}&=p\frac{dx}{du}+q\frac{dx}{dv}+B\alpha\ ,\\ \frac{d^2x}{dv^2}&=w\frac{dx}{du}+\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}-p\right)\frac{dx}{dv}+C\alpha\ ,\end{aligned}$$

nelle quali:

$$(4)\qquad p=\frac{1}{2\delta}\left(g\frac{de}{dv}-f\frac{dg}{du}\right),\qquad q=\frac{1}{2\delta}\left(e\frac{dg}{du}-f\frac{de}{dv}\right),$$

$$r=\frac{1}{2\delta}\left(2e\frac{df}{du}-e\frac{de}{dv}-f\frac{de}{du}\right),\quad w=\frac{1}{2\delta}\left(2g\frac{df}{dv}-g\frac{dg}{du}-f\frac{dg}{dv}\right).$$

Se inoltre si considera che dalle relazioni (2) e dalle seguenti:

$$\alpha\frac{d\alpha}{du}+\beta\frac{d\beta}{du}+\gamma\frac{d\gamma}{du}=0\ ,\qquad \alpha\frac{d\alpha}{dv}+\beta\frac{d\beta}{dv}+\gamma\frac{d\gamma}{dv}=0$$

si derivano per $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$ i seguenti valori:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\delta\cdot\frac{d\alpha}{du}&=\left(fB-gA\right)\frac{dx}{du}+\left(fA-eB\right)\frac{dx}{dv}\ ,\\ \delta\cdot\frac{d\alpha}{dv}&=\left(fC-gB\right)\frac{dx}{du}+\left(fB-eC\right)\frac{dx}{dv}\ ,\end{aligned}$$

ed analogamente mutando α in β, γ ed x in y, z; si fa evidente per le equazioni (3) che i differenziali di x di qualunque ordine rispetto ad u, v sono funzioni lineari di $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, α. Ma differenziando la prima delle equazioni (3) rispetto a v, la seconda rispetto ad u, i primi membri diventano identici, quindi sottraendo l'una equazione dall'altra, si giungerà ad un risultato della forma:

$$L\frac{dx}{du}+M\frac{dy}{du}+N\alpha=0,$$

il quale, dovendo sussistere col mutare la x in y, z e la α in β, γ, dà luogo alle:

$$L=0, \qquad M=0, \qquad N=0.$$

Così derivando la seconda delle (3) rispetto a v, e la terza rispetto ad u, si arriverà a tre equazioni:

$$L'=0, \quad M'=0, \quad N'=0;$$

ma siccome eseguendo le calcolazioni indicate trovasi essere $L=M'$, quelle sei equazioni si ridurranno alle tre seguenti:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{f}{\delta}(AC-B^2)=pq-rw+\frac{dp}{du}+\frac{dq}{dv}-\frac{1}{2}\frac{d^2\log.\delta}{du\,dv}, \\ \frac{e}{\delta}(AC-B^2)=\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}q+\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}r+\frac{dr}{dv}-\frac{dq}{du}-2q^2-2pr, \\ \frac{g}{\delta}(AC-B^2)=\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}p+\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}w+\frac{dw}{du}-\frac{dp}{dv}-2p^2-2qw, \end{cases}$$

ed alle due:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{dA}{dv}-\frac{dB}{du}=pA+\left(2q-\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}\right)B-rC, \\ \frac{dB}{dv}-\frac{dC}{du}=wA-\left(2p-\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}\right)B-qC. \end{cases}$$

Notiamo che la seconda e la terza delle (6), osservando essere:

$$2\left(q^2+pr\right)=\frac{1}{e}\left(r\frac{de}{dv}-q\frac{de}{du}\right)+\frac{q}{\delta}\frac{d\delta}{du},$$

$$2\left(p^2+qw\right)=\frac{1}{g}\left(w\frac{dg}{du}-p\frac{dg}{dv}\right)+\frac{p}{\delta}\frac{d\delta}{dv},$$

si semplificano e danno le:

$$(8)\qquad \frac{AC-B^2}{\sqrt{\delta}}=\frac{d}{dv}\left(\frac{r\sqrt{\delta}}{e}\right)-\frac{d}{du}\left(\frac{q\sqrt{\delta}}{e}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{w\sqrt{\delta}}{g}\right)-\frac{d}{dv}\left(\frac{p\sqrt{\delta}}{g}\right).$$

Le equazioni (6) non costituiscono effettivamente che una sola equazione sotto differenti forme, equazione che fornisce il valore di $A\,C-B^2$, ed in conseguenza quello del prodotto dei raggi di curvatura della superficie in funzione di $e,\ f,\ g$ e delle loro derivate prime e seconde rispetto ad u ed a v, come pel primo ha dimostrato Gauss.

I valori dei coseni α,β,γ:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv}-\frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right),\ \beta=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv}-\frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}\right),\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)$$

danno evidentemente:

$$(9)\qquad \beta^2+\gamma^2=\frac{1}{\delta}\left[\,g\left(\frac{dx}{du}\right)^2-2f\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv}+e\left(\frac{dx}{dv}\right)^2\right]\ ;$$

quindi essendo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, sarà α esprimibile in funzione di e,f,g e dei differenziali primi di x rispetto ad u ed a v. Così per $\beta,\ \gamma$ mutando x in y,z.

2.° Sebbene estranee all'argomento principale di questo scritto, aggiungiamo alcune applicazioni delle formole superiori, per mostrare come la generalità delle medesime non diminuisca la semplicità dei risultati. Se in ciascuna delle equazioni (3) si trasportano tutti i termini del secondo membro, ad eccezione dell'ultimo, nel primo membro, quindi si moltiplicano fra loro la prima e la terza, e si sottrae dal prodotto il quadrato della seconda, si ottiene la equazione:

$$\left[\frac{d^2x}{du^2}-\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{du}-q\right)\frac{dx}{du}-r\frac{dx}{dv}\right]\left[\frac{d^2x}{dv^2}-w\frac{dx}{du}-\left(\frac{1}{2\delta}\frac{d\delta}{dv}-p\right)\frac{dx}{dv}\right]-$$
$$-\left[\frac{d^2x}{du\,dv}-p\frac{dx}{du}-q\frac{dx}{dv}\right]^2=(AC-B^2)\,\alpha^2\ ,$$

la quale, posto per $AC-B^2$ uno dei valori (6) e per α^2 il valore dato dalla (9), diventa una equazione ai differenziali parziali del secondo ordine, i coefficienti della quale sono funzioni di e,f,g e dei loro differenziali. Ora, se queste ultime sono note, la equazione differenziale superiore, e le altre due che ottengonsi mutando la x in y, z, daranno, integrate, i valori di x, y, z; cioè daranno le equazioni delle superficie applicabili a quella definita dagli stessi valori di e, f, g.

Il metodo generale suesposto per la ricerca di quelle equazioni si modifica però nei casi particolari, e si può talvolta giungere ad equazioni differenziali meno complicate. Per esempio, se le A, B, C fossero legate dalla equazione:

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0 \ ,$$

nella quale le λ, μ, ν siano coefficienti numerici od espressioni conosciute di u e di v, l'equazione differenziale si otterrebbe moltiplicando le (3) per λ, μ, ν e sommandole. Converrà quindi per determinare quelle equazioni ricorrere nei casi particolari alle relazioni (3).

Così, siccome supponendo $e = g$, $f = 0$, donde $\delta = e^2$, $p = -r = = \frac{1}{2e}\frac{de}{dv}$, $q = -w = \frac{1}{2e}\frac{de}{du}$, la prima e la terza delle equazioni (3) sommate danno:

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = (A + C)\,\alpha ;$$

se $A + C = 0$, cioè se la superficie che si considera ha i raggi di curvatura eguali e di segno contrario, l'equazione differenziale risulterà la:

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = 0 ,$$

e le equazioni (7) daranno:

$$\frac{dA}{dv} = \frac{dB}{du} , \qquad \frac{dA}{du} = -\frac{dC}{du} = -\frac{dB}{dv} ,$$

quindi anche:

$$\frac{d^2B}{du^2} + \frac{d^2B}{dv^2} = 0 .$$

3.° Nelle formole e nelle applicazioni precedenti si sono supposti noti i valori delle e, f, g in funzione di u e di v. Supporrò nel seguito che i coseni α, β, γ degli angoli che la normale alla superficie fa cogli assi ortogonali sieno funzioni conosciute delle coordinate curvilinee. In questa ipotesi pongasi:

$$l = \left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{du}\right)^2,$$

$$m = \frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv} + \frac{d\beta}{du}\frac{d\beta}{dv} + \frac{d\gamma}{du}\frac{d\gamma}{dv},$$

$$n = \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dv}\right)^2,$$

e sostituendo per $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\beta}{du}$, ... i valori dati dalle equazioni (5), si avranno le:

$$\begin{aligned} \delta l &= eB^2 - 2fAB + gA^2, \\ \delta m &= eBC - f(AC+B^2) + gAB, \\ \delta n &= eC^2 - 2fBC + gB^2, \end{aligned}$$

dalle quali si deducono le reciproche:

$$\begin{aligned} ke &= lB^2 - 2mAB + nA^2, \\ kf &= lBC - m(AC+B^2) + nAB, \\ kg &= lC^2 - 2mBC + nB^2, \end{aligned} \tag{10}$$

essendo $k = ln - m^2$. L'una o l'altra di queste due terne d'equazioni danno anche le due relazioni:

$$\delta k = (AC - B^2)^2$$

$$k(2Bf - Ag - Ce) = (AC - B^2)(2Bm - An - Cl);$$

e siccome indicando con R_1, R_2 i raggi di curvatura principale della superficie si hanno, come è noto, le:

$$R_1 R_2 = \frac{\delta}{AC - B^2}, \qquad R_1 + R_2 = \frac{2Bf - Ag - Ce}{AC - B^2},$$

si avranno altresì le seguenti:

$$R_1 R_2 = \sqrt{\frac{\delta}{k}} = \frac{AC - B^2}{k}, \quad R_1 + R_2 = \frac{2Bm - An - Cl}{k}. \tag{11}$$

Così, siccome per le relazioni superiori si hanno le (12):

$$k(Bf-Ce)=(AC-B^2)(Bm-An),\quad k(Af-Be)=(AC-B^2)(Bl-Am),$$

$$k(Bf-Ag)=(AC-B^2)(Bm-Cl),\quad k(Cf-Bg)=(AC-B^2)(Bn-Cm),$$

dalle equazioni (5) si deducono le:

$$(13)\qquad \begin{aligned} k\frac{dx}{du}&=(Bm-An)\frac{d\alpha}{du}+(Am-Bl)\frac{d\alpha}{dv},\\ k\frac{dx}{dv}&=(Cm-Bn)\frac{d\alpha}{du}+(Bm-Cl)\frac{d\alpha}{dv},\end{aligned}$$

e le analoghe, mutando x in y, z ed α in β, γ.

Infine, osservando che per le (2) si ha:

$$\frac{dA}{dv}-\frac{dB}{du}=\frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{dx}{dv}+\frac{d^2\beta}{du^2}\frac{dy}{dv}+\frac{d^2\gamma}{du^2}\frac{dz}{dv}-\frac{d^2\alpha}{du\,dv}\frac{dx}{du}-\frac{d^2\beta}{du\,dv}\frac{dy}{du}-\frac{d^2\gamma}{du\,dv}\frac{dz}{du},$$

sostituendo nella medesima i valori superiori di $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, si ottiene la:

$$(14)\qquad \frac{dA}{dv}-\frac{dB}{du}=p_{\prime}A+\left(2q_{\prime}-\frac{1}{2k}\frac{dk}{du}\right)B-r_{\prime}C,$$

e nello stesso modo la seconda:

$$\frac{dB}{dv}-\frac{dC}{du}=w_{\prime}A-\left(2p_{\prime}-\frac{1}{2k}\frac{dk}{dv}\right)B-q_{\prime}C,$$

nelle quali le $p_{\prime}, q_{\prime}, r_{\prime}, w_{\prime}$ si deducono dalle p, q, r, w mutando ordinatamente le e, f, g nelle l, m, n.

4.° Raccogliamo in questo paragrafo alcune formole colle quali, dati i valori delle l, m, n, si ponno nei casi particolari dedurre quelli delle α, β, γ.

Per le espressioni di l, m, n si hanno evidentemente le equazioni:

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{du^2}+\beta\frac{d^2\beta}{du^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{du^2}=-l,$$

$$\frac{d\alpha}{du}\frac{d^2\alpha}{du^2}+\frac{d\beta}{du}\frac{d^2\beta}{du^2}+\frac{d\gamma}{du}\frac{d^2\gamma}{du^2}=\frac{1}{2}\frac{dl}{du},$$

$$\frac{d\alpha}{dv}\frac{d^2\alpha}{du^2}+\frac{d\beta}{dv}\frac{d^2\beta}{du^2}+\frac{d\gamma}{dv}\frac{d^2\gamma}{du^2}=\frac{dm}{du}-\frac{1}{2}\frac{dl}{dv},$$

dalle quali si ottengono analogamente alle (3) del § 1.° le seguenti:

$$\frac{d^2\alpha}{du^2}=\left(\frac{1}{2k}\frac{dk}{du}-q_{\prime}\right)\frac{d\alpha}{du}+r_{\prime}\frac{d\alpha}{dv}-l\,\alpha$$

e nello stesso modo:

$$(15)\qquad \frac{d^2\alpha}{du\,dv}=p_{\prime}\frac{d\alpha}{du}+q_{\prime}\frac{d\alpha}{dv}-m\,\alpha\,,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2}=w_{\prime}\frac{d\alpha}{du}+\left(\frac{1}{2k}\frac{dk}{dv}-p_{\prime}\right)\frac{d\alpha}{dv}-n\,\alpha.$$

Così i valori di α, β, γ dedotti dalle:

$$\alpha\frac{d\alpha}{du}+\beta\frac{d\beta}{du}+\gamma\frac{d\gamma}{du}=0\,,\qquad \alpha\frac{d\alpha}{dv}+\beta\frac{d\beta}{dv}+\gamma\frac{d\gamma}{dv}=0,\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

conducono a relazioni simili alle (9):

$$(16)\qquad \beta^2+\gamma^2=\frac{1}{k}\left[n\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2-2m\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}+l\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2\right]$$

ed i valori stessi danno altre tre relazioni della forma:

$$(17)\qquad \alpha\beta=\frac{1}{k}\left[m\left(\frac{d\beta}{du}\frac{d\alpha}{dv}+\frac{d\beta}{dv}\frac{d\alpha}{du}\right)-l\frac{d\alpha}{dv}\frac{d\beta}{dv}-n\frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du}\right].$$

5.° Passiamo ora a mostrare come le formole trovate sopra si prestino opportunamente nella trattazione di varie quistioni speciali. Consideriamo dapprima le superficie per le quali la somma dei raggi di curvatura è costante, cioè:

$$R_1+R_2=2h\,,$$

essendo h costante.

La seconda delle equazioni (11) dà:

$$2Bm-An-Cl=2hk$$

alla quale si soddisfà supponendo:

1.° $\qquad l=n=0,\qquad B=-mh,$

2.° $\qquad l=n,\ m=0,\qquad A+C=-2lh.$

Nel 1.° caso, essendo $p_{,}=q_{,}=r_{,}=w_{,}=0$, le formole (15) danno:

$$\frac{d^2\alpha}{du^2}=\frac{1}{m}\frac{dm}{du}\frac{d\alpha}{du}, \qquad \frac{d^2\alpha}{du\,dv}=-m\alpha, \qquad \frac{d^2\alpha}{dv^2}=\frac{1}{m}\frac{dm}{dv}\frac{d\alpha}{dv}$$

e la (16) diventa:

$$2\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}=m(1-\alpha^2).$$

Dalla prima di queste, integrando, si ottiene $\frac{d\alpha}{du}=m\phi(v)$, per la quale la quarta si muta nella:

$$\frac{2\,d\alpha}{1-\alpha^2}=\phi(v)\,dv,$$

da cui:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=f(u)\,F(v)$$

Supponendo per maggiore semplicità:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}=u\,v,$$

si avranno:

$$\alpha=\frac{uv-1}{uv+1}, \qquad m=\frac{2}{(uv+1)^2}.$$

La (17), pei valori superiori di l, m, n, α, diventa:

$$u\frac{d\beta}{du}+v\frac{d\beta}{dv}=-\alpha\beta,$$

da cui:

$$\beta=\frac{u+v}{uv+1};$$

ed infine, essendo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, si ha $\gamma=i\,\frac{u-v}{uv+1}$.

Determinati così i valori di α, β, γ in funzione di u, v, i quali annullano l ed n, osserviamo che, essendo $B=-mh$ le equazioni (14) danno le:

$$\frac{dA}{dv}=0, \qquad \frac{dC}{du}=0,$$

cioè:

$$A = \phi(u) \quad , \quad C = \psi(v);$$

ed infine dalle (12) si deducono le:

$$\frac{dx}{du} = h\frac{d\alpha}{du} - u\phi(u); \frac{dy}{du} = h\frac{d\beta}{du} - \frac{1}{2}(1-u^2)\phi(u); \frac{dz}{du} = h\frac{d\gamma}{du} + \frac{i}{2}(1+u^2)\phi(u),$$

ed analoghi valori per $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dz}{dv}$, mutando u in v, ϕ in ψ, ed i in $-i$ nell'ultima.

Si hanno così le equazioni differenziali della superficie:

$$dx = h\,d\alpha - u\phi(u)\,du - v\psi(v)\,dv,$$

$$dy = h\,d\beta - \frac{1}{2}(1-u^2)\phi(u)\,du - \frac{1}{2}(1-v^2)\psi(v)\,dv,$$

$$dz = h\,d\gamma + \frac{i}{2}(1+u^2)\phi(u)\,du - \frac{i}{2}(1+v^2)\psi(v)\,dv.$$

Se $h=0$, cioè se la superficie che si considera è quella d'area minima, le relazioni (10) danno le:

$$e = g = 0 \quad , \quad f = \frac{1}{2}\phi(u)\psi(v)(uv+1)^2 \quad ,$$

ed il differenziale dell'arco sarà espresso dalla formola:

$$\overline{dS}^2 = 2f\,du.\,dv.$$

Da questo sistema di coordinate simmetriche u, v, passando all'altro sistema pure simmetrico, dato dalle relazioni:

$$u = s - it \;, \quad v = s + it\,,$$

si avrà:

$$\overline{dS}^2 = 2f\left(\overline{ds}^2 + \overline{dt}^2\right),$$

e le equazioni differenziali superiori si potranno porre sotto la forma data ad esse dal sig. Weierstrass, in un recente lavoro presentato all'Accademia delle scienze di Berlino «*Ueber die Flächen, in denen die mittlere Krümmung überall gleich Null ist*».

Nel secondo caso che intendiamo esaminare, se si suppone che l e quindi n sieno funzioni sóltanto di v, si hanno le:

$$p_{,} = - r_{,} = \frac{1}{2l} \frac{dl}{dv} , \quad q_{,} = w_{,} = 0 ,$$

e la seconda delle (14) dà:

$$\frac{d\alpha}{du} = \phi'(u) \sqrt{l} , \qquad \text{donde} \qquad \alpha = \phi(u) \sqrt{l} + \psi(v);$$

il quale valore sostituito nella terza delle stesse (15), ossia nella:

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2} - \frac{1}{2l} \frac{dl}{dv} \frac{d\alpha}{dv} + l\alpha = 0$$

conduce alla

$$\phi(u) \left[\frac{d^2 \sqrt{l}}{dv^2} - \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{d\sqrt{l}}{dv} \right)^2 + l \sqrt{l} \right] + \psi''(v) - \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{d\sqrt{l}}{dv} \psi'(v) + l \psi(v) = 0,$$

per la quale l viene determinata dalla:

$$\frac{d^2\sqrt{l}}{dv^2} - \frac{1}{l} \left(\frac{d\sqrt{l}}{dv} \right)^2 + l \sqrt{l} = 0,$$

e si ha $\psi(v) = \pm \sqrt{l}$. Quest' ultima equazione differenziale è soddisfatta ponendo $\sqrt{l} = \frac{1}{\cos. iv}$; si avrà quindi:

$$\alpha = \frac{1}{\cos. iv} \left[\phi(u) \pm 1 \right] ;$$

e siccome sostituendo questo valore di α nella (16) si giunge alla:

$$\phi'^2(u) + \left[\phi(u) \pm 1 \right]^2 = 1 ,$$

si ha $\alpha = \frac{\text{sen.}\, u}{\cos.\, iv}$, e la (17) riducesi per questi valori di α, l alla seguente:

$$\text{cotang.}\, u. \frac{d\beta}{du} + i \,\text{tang.}\, iv. \frac{d\beta}{dv} = - \frac{1}{\cos.^2 iv} \cdot \beta ,$$

la quale è subito integrata e dà pel valore di β:

$$\beta = \frac{\cos. u}{\cos. iv} \quad \text{e quindi} \quad \gamma = i \text{ tang.}\, iv.$$

cioè le coordinate curvilinee u, v corrispondono alle prime due variabili del sistema considerato dal sig.[r] Bonnet nella memoria citata.

Ottenuti così i valori di α, β, γ pei quali $l = n$, $m = 0$ ed l funzione della sola v, osservando che le (14) riduconsi in questo caso alle:

$$\frac{dA}{dv} - \frac{dB}{du} = i \text{ tang.}\, i\, v. (A + C), \quad \frac{dB}{dv} - \frac{dC}{du} = 0,$$

nel problema che si ha di mira essendo:

$$A + C = -2lh, \quad \text{per cui} \quad \frac{dA}{du} + \frac{dC}{du} = 0,$$

si avrà anche:

$$\frac{d^2 A}{du^2} + \frac{d^2 A}{dv^2} = -h \frac{d^2 l}{dv^2},$$

ossia:

$$A = f(s) + F(t) - \frac{h}{\cos.^2 iv},$$

posto $s = u + iv$, $t = u - iv$. Così avremo:

$$C = -f(s) - F(t) - \frac{h}{\cos.^2 iv}$$

e:

$$B = i\Big[f(s) - F(t)\Big];$$

i quali valori sostituiti nelle (13) danno le equazioni differenziali della superficie richiesta, ossia:

$$dx = h d\alpha - f(s) \cos. s ds - F(t) \cos. t dt,$$

$$dy = h d\beta + f(s) \text{ sen.} s ds + F(t) \text{ sen.} t dt,$$

$$dz = h d\gamma + i\Big[f(s)\, ds - F(t)\, dt\Big].$$

Notiamo che per le (11) essendo:

$$k^2(R_1-R_2)^2=(Al-Cn)^2+4B^2ln+4m(ACm-BCl-ABn),$$

per le superficie nelle quali $R_1=R_2$, nel primo sistema di coordinate deve essere $AC=0$, e nel secondo:

$$A-C=2iB;$$

e le formole superiori si prestano nell'un caso e nell'altro alla ricerca delle equazioni differenziali delle superficie stesse.

6.° Abbiamo dimostrato nel precedente paragrafo come le formole e le considerazioni esposte nei paragrafi terzo e quarto conducono facilmente alla scelta di quel sistema di coordinate u, v che si presenta più opportuno nel problema particolare che si ha di mira. Potremmo aggiungere altri esempi, ma ci limiteremo ad alcune osservazioni sulla equazione generale delle linee di curvatura, giacchè la introduzione delle variabili l, m, n nella equazione stessa conduce ad alcuni risultati di qualche interesse.

È noto che la equazione delle linee di curvatura in coordinate curvilinee u, v è la seguente:

$$(eB-fA)\overline{du}^2+(eC-gA)\,du\,dv+(fC-gB)\overline{dv}^2=0\ ,$$

la quale per le relazioni (12) si trasforma nella:

$$(mA-lB)\overline{du}^2+(nA-lC)\,du\,dv+(nB-mC)\overline{dv}^2=0\,. \tag{18}$$

Questa equazione nell'ipotesi di $l=n=0$ riducesi alla:

$$A\overline{du}^2=C\overline{dv}^2\ ;$$

ed essendo per le superficie nelle quali la somma dei raggi di curvatura è costante $A=\phi(u)$, $C=\psi(v)$, la equazione stessa è ridotta alle quadrature da quel sistema di coordinate u, v.

Così se si suppone $l=n$, $m=0$, si ottiene la:

$$\overline{dv}^2+\frac{A-C}{B}\,du\,dv-\overline{du}^2=0\ ,$$

la quale pei valori di A, B, C trovati per le superficie suddette nel sistema di coordinate che ora consideriamo, si trasforma nella:

$$f(s)\,\overline{ds}^2 = F(t)\,\overline{dr}^2.$$

È noto che per una linea di curvatura si hanno le:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma},$$

e che la condizione necessaria e sufficiente perchè una linea nello spazio sia piana è la:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0\ ;$$

quindi affinchè una linea di curvatura sia piana, dovrà sussistere la equazione seguente:

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} d\alpha & d\beta & d\gamma \\ d^2\alpha & d^2\beta & d^2\gamma \\ d^3\alpha & d^3\beta & d^3\gamma \end{vmatrix} = 0\ ;$$

Quest' ultima integrata dà:

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = h,$$

essendo λ, μ, ν, h quattro costanti: proprietà dimostrata da Joachimsthal per una linea di curvatura piana; ma supponendo le α, β, γ funzioni di u, v, la equazione stessa condurrà ad una equazione differenziale del terzo ordine, i coefficienti della quale sono funzioni di l, m, n e delle loro derivate. Allorquando questa equazione sia integrabile, si otterrà la relazione che deve sussistere fra le u, v lungo quella linea di curvatura.

Sia $s(u, v) = c$ questa relazione, indicando con c una delle costanti introdotte dalla integrazione; essa potrà evidentemente rappresentare un sistema di linee di curvatura piane; e se con $t(u, v) = c_1$ si indica il sistema ortogonale, dovranno le s, t soddisfare alle due equazioni:

$$e\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}-f\left(\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}\right)+g\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}=0,$$

$$A\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}-B\left(\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}\right)+C\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}=0,$$

i primi membri delle quali, fatta astrazione da un fattore, sono i valori delle f, B, corrispondenti al sistema di coordinate curvilinee s, t. Da queste equazioni, rammentando le relazioni (12), deducesi facilmente l'eguaglianza dei rapporti:

$$\frac{\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}}{Bn-Cm}=\frac{\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}}{An-Cl}=\frac{\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}}{Am-Bl}. \tag{20}$$

Nei due casi considerati al § 5.° la ricerca delle equazioni differenziali considerate sopra e la loro integrazione non presenta alcuna difficoltà; ponendo in fatti $\frac{dv}{du}=v'$ si ottengono le:

$$2v'v'''-3v''^2=0\ ,\qquad (1+v'^2)v'''+(1+v'^2)^2v'-3v'v''^2=0\ ,$$

le quali integrate danno:

$$v'=\frac{b}{(u+a)^2}\ ,\qquad v'=\frac{a\,\text{sen.}(u+b)}{\sqrt{1-a^2\,\text{sen.}^2(u+b)}}, \tag{21}$$

essendo a, b le costanti dell'integrazione. Inoltre dalle equazioni (20) si deducono le seguenti:

$$\begin{aligned}&\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}=0\ ,\qquad A\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}=-C\frac{ds}{du}\frac{dt}{du},\\ &\frac{ds}{du}\frac{dt}{du}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}=0\ ,\quad (A-C)\frac{ds}{dv}\frac{dt}{dv}=B\left(\frac{ds}{du}\frac{dt}{dv}+\frac{ds}{dv}\frac{dt}{du}\right);\end{aligned} \tag{22}$$

dalla prima e terza delle quali, supponendo noto s, si otterrà colla integrazione la $t(u,v)=c_1$. Infine, se quest'ultima equazione sarà un integrale particolare della equazione ai differenziali del terzo ordine considerata sopra, anche le linee di curvatura del secondo sistema saranno piane.

Ora trasformando la seconda delle (21) col porre:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\cos.(u+b)=i\cos.\xi$$

si ottiene la $dv=id\xi$, per la quale, indicando con c una costante, si deduce:

$$\frac{\cos.(u+b)}{\cos.i(v+c)}=\frac{i\sqrt{1-a^2}}{a}=h;$$

cioè supponendo:

$$s=\frac{\cos.(u+b)}{\cos.i(v+c)},$$

la equazione $s=h$ rappresenta un sistema di linee di curvatura piane. Sostituendo questo valore di s nella seconda delle (22) si ottiene facilmente per t il valore seguente:

$$t=\frac{\text{sen.}(u+b)}{i\,\text{sen.}\,i(v+c)},$$

e la equazione $t=h_{\prime}$ rappresenta l'altro sistema di linee di curvatura. Ma siccome mutando la b in $b-\frac{\pi}{2}$ nella seconda delle (21), e ponendo $\frac{1-a^2}{a^2}=h_{\prime}^2$ si ha la:

$$v'=-\frac{\cos.(u+b)}{\sqrt{h_{\prime}^2+\text{sen.}^2(u+b)}},$$

di cui l'integrale è appunto $t=h_{\prime}$, se ne deduce che le linee rappresentate da quest'ultima equazione sono anche linee piane. Le coordinate curvilinee s, t saranno perciò le più opportune nello studio delle superficie nelle quali le linee di curvatura dell'uno e dell'altro sistema sono linee piane. Supponendo $b=0$, otteniamo per s, t i valori trovati dal sig.r Bonnet nella memoria succitata, considerando le trasformate sferiche delle linee di curvatura, e dal medesimo applicati allo studio delle superficie nelle quali tutte le linee di curvatura sono piane. Questa ricerca si rende assai semplice se osservasi che, indicando l'equazione del piano della linea di curvatura $s=h$ con:

$$\lambda x+\mu y+\nu z=\rho,$$

si ha:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=\theta,$$

essendo $\lambda, \mu, \nu, \rho, \theta$ funzioni di s; e che conoscendosi i valori di α, β, γ in funzioni di s, t, dalla seconda di queste equazioni e dai differenziali della medesima rispetto a t si deducono i valori di λ, μ, ν. Così si ha:

$$\text{per le linee } s=h \quad : \quad x-atz=\phi(t)\,, \qquad \alpha-at\gamma=bt\,,$$

$$\text{per le linee } t=h_{\prime} \quad : \quad y-bsz=\psi(s)\,, \qquad \beta-bs\gamma=as\,,$$

a, b essendo due costanti, cioè $a=\cos.ic$, $b=\cos.ic$. Il sig.[r] Serret ha già dimostrato nelle sue memorie sulle superficie a linee di curvatura piane, come da queste equazioni si giunga facilmente a quella delle superficie stesse.

7.° Nelle ricerche sulle linee di curvatura delle superficie il problema che d'ordinario ci occupa è il diretto, data, cioè, l'equazione di una superficie, determinare quelle delle sue linee di curvatura; ma le difficoltà che incontransi nella integrazione della equazione delle linee stesse non lasciano lusinga di molti risultati seguendo quella via. In questi ultimi tempi si prese anche a considerare il problema reciproco, nel quale si domandano le superficie di cui un sistema od i due sistemi di linee di curvatura sono linee di una data famiglia; ed i risultamenti ottenuti nelle ricerche sulle superficie aventi le linee di curvatura piane o sferiche, già importanti per sè stessi, mostrano la convenienza di limitare ancora più il problema onde giungere per gradi ad una soluzione completa. Per esempio, ristringendoci al caso di linee piane, quali sono le superficie nelle quali uno dei sistemi di linee di curvatura sono linee piane di cui le coordinate si esprimano in funzioni razionali di un parametro, ed in funzioni elittiche od abeliane?

Siano X, Y le coordinate di un punto di una linea piana, e:

$$\lambda_2 x+\mu_2 y+\nu_2 z=\omega$$

l'equazione del piano di essa linea, riferito a tre assi ortogonali. Se con x, y, z denotiamo le coordinate di quel punto rispetto a questi ultimi assi si hanno le:

$$(23) \qquad x=a+\lambda X+\lambda_1 Y\,; \quad y=b+\mu X+\mu_1 Y\,; \quad z=c+\nu X+\nu_1 Y\,;$$

purchè fra i coseni $\lambda, \lambda_1 \cdots$ sussistano le sei ordinarie equazioni, e perciò sia:

$$\lambda_2 a+\mu_2 b+\nu_2 c=\omega\,.$$

Suppongasi che le a, b, c ed i nove coseni $\lambda, \mu \cdots$ sieno funzioni di una variabile u, e le coordinate X, Y funzioni della stessa u e di un'altra variabile v. Le x, y, z date dalle (23) ponno così considerarsi come coordinate rettangolari, e le u, v come coordinate curvilinee di una superficie; le linee per le quali $u =$ cost. essendo linee piane. Ora siccome ponendo:

$$(24)\quad \begin{array}{lll} \Sigma \lambda \dfrac{da}{du} = l, & \Sigma \lambda_1 \dfrac{da}{du} = l_1, & \Sigma \lambda_2 \dfrac{da}{du} = l_2, \\[2ex] \Sigma \lambda_1 \dfrac{d\lambda_2}{du} = p, & \Sigma \lambda_2 \dfrac{d\lambda}{du} = q, & \Sigma \lambda \dfrac{d\lambda_1}{du} = r, \end{array}$$

e:

$$P = l + rY + \frac{dX}{du}, \quad Q = l_1 - rX + \frac{dY}{du}, \quad R = l_2 + qX - pY,$$

dalle (23) si deducono le seguenti:

$$\frac{dx}{du} = \lambda P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R, \qquad \frac{dx}{dv} = \lambda \frac{dX}{dv} + \lambda_1 \frac{dY}{dv},$$

e da queste la:

$$\frac{d^2 x}{du dv} = \lambda \frac{dP}{dv} + \lambda_1 \frac{dQ}{dv} + \lambda_2 \frac{dR}{dv};$$

le condizioni perchè le linee $u =$ cost.^{e}, $v =$ cost.^{e} sieno linee di curvatura prenderanno la forma:

$$\Sigma \frac{dx}{du} \frac{dx}{dv} = P \frac{dX}{dv} + Q \frac{dY}{dv} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dz}{du} \\[2ex] \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dz}{dv} \\[2ex] \dfrac{d^2x}{du\,dv} & \dfrac{d^2y}{du\,dv} & \dfrac{d^2z}{du\,dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q & R \\[2ex] \dfrac{dX}{dv} & \dfrac{dY}{dv} & 0 \\[2ex] \dfrac{dP}{dv} & \dfrac{dQ}{dv} & \dfrac{dR}{dv} \end{vmatrix} = 0,$$

la seconda delle quali per l'antecedente si riduce alla:

$$R \Sigma P \frac{dP}{dv} = \frac{dR}{dv} \Sigma P^2;$$

e questa integrata dà:

$$P^2+Q^2+R^2=\rho^2 R^2, \tag{25}$$

essendo ρ una funzione della sola variabile u. Le X, Y delle equazioni (23) dovranno quindi verificare le due equazioni:

$$P\frac{dX}{dv}+Q\frac{dY}{dv}=0, \qquad P^2+Q^2=\psi^2 R^2, \tag{26}$$

posto $\psi^2=\rho^2-1$. La seconda di esse è soddisfatta supponendo:

$$P=R\psi\,\text{sen.}\eta, \qquad Q=R\psi\cos.\eta, \tag{27}$$

ed η una funzione di u e di v da determinarsi; e per queste dalla prima delle (26) si deducono le:

$$\frac{dX}{dv}=-\zeta\cos.\eta, \qquad \frac{dY}{dv}=\zeta\,\text{sen.}\eta, \tag{28}$$

essendo ζ una seconda funzione indeterminata. Differenziando le equazioni (27) rispetto a v, avuto riguardo alle (28) si ottengono le due seguenti:

$$\zeta\,\text{sen.}\eta\left[\frac{d\eta}{du}+r+\psi(q\cos.\eta+p\,\text{sen.}\eta)\right]=\cos.\eta\left[\frac{d\zeta}{du}+R\psi\frac{d\eta}{dv}\right],$$

$$\zeta\cos.\eta\left[\frac{d\eta}{du}+r+\psi(q\cos.\eta+p\,\text{sen.}\eta)\right]=-\text{sen.}\eta\left[\frac{d\zeta}{du}+R\psi\frac{d\eta}{dv}\right],$$

per le quali saranno:

$$\frac{d\eta}{du}+r+\psi(q\cos.\eta+p\,\text{sen.}\eta)=0, \qquad \frac{d\zeta}{du}+R\psi\frac{d\eta}{dv}=0. \tag{29}$$

Ora se con ϕ si indica una funzione di u e di v, e si pone:

$$\zeta=\frac{d\varphi}{dv}+\phi\frac{d\eta}{dv}\text{cotang.}\eta,$$

la seconda delle equazioni (28) dà $Y=\phi\,\text{sen.}\eta$, e dalla prima risultando:

$$\frac{dX}{dv}=-\left[\frac{d\varphi}{dv}\cos.\eta-\phi\frac{d\eta}{dv}\text{sen.}\eta+\frac{\varphi}{\text{sen.}\eta}\cdot\frac{d\eta}{dv}\right],$$

si deduce la:

$$X = -\xi - \phi \cos.\eta\,,$$

supponendo la funzione ϕ determinata mediante la:

$$(30) \qquad \phi \frac{d\eta}{dv} = \frac{d\xi}{dv} \operatorname{sen}.\eta\,,$$

e ξ simbolo di una nuova funzione da determinarsi.

Alle X, Y si sono così sostituite due nuove variabili ξ, η legate alle prime per le:

$$(31) \qquad X = -\xi - \phi \cos.\eta\,, \qquad Y = \phi \operatorname{sen}.\eta\,,$$

essendo ϕ una funzione di ξ, η data dalla (30), ed η una funzione di u, v determinata dalla prima delle (29). La equazione differenziale che determina la funzione ξ può dedursi dalla seconda delle (29) o più semplicemente sostituendo questi valori delle X, Y nelle (27). In questo modo si ottengono le seguenti:

$$l - \frac{d\xi}{du} - \frac{d\varphi}{du}\cos.\eta - \psi(l_2 - q\xi)\operatorname{sen}.\eta = 0\,, \quad l_1 + r\xi + \frac{d\varphi}{du}\operatorname{sen}.\eta - \psi(l_2 - q\xi)\cos.\eta = 0\,,$$

dalle quali eliminando $\frac{d\varphi}{du}$ si ha:

$$(32) \qquad \left(l - \frac{d\xi}{du}\right)\operatorname{sen}.\eta + \left(l_1 + r\xi\right)\cos.\eta - \psi\left(l_2 - q\xi\right) = 0\,,$$

colla quale determinasi ξ, conosciuto η per mezzo della prima delle (29).

Se nelle formole superiori si suppongono $l_1 = l_2 = q = 0$; $l = 1$, le (29) (32) diventano:

$$\frac{d\eta}{du} + r + \psi p \operatorname{sen}.\eta = 0\,, \quad 1 - \frac{d\xi}{du} + r\xi \operatorname{cotang}.\eta = 0\,,$$

e scrivendo $a', b' \cdots$ in luogo di $\frac{da}{du}, \frac{db}{du} \cdots$ si deducono facilmente le seguenti:

$$\lambda = a'\,, \quad -r\lambda_1 = \lambda' = a''\,, \cdots$$

per le quali:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1\,, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = r^2\,,$$

ed infine:

$$x = a - a'\left(\xi + \phi \cos.\eta\right) - \frac{a''}{r}\,\phi\ \mathrm{sen.}\eta\,,$$

ed analogamente per y, z mutando la a in b, c. Sono queste le equazioni già trovate per mezzo di considerazioni geometriche da JOACHIMSTHAL, per le superficie nelle quali le linee di curvatura di un sistema sono piane.

Notisi che, continuando a rappresentare con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale alle superficie fa cogli assi delle $x, y, z,$ si ha:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\left(\lambda_2 \psi - \lambda\,\mathrm{sen.}\,\eta - \lambda_1 \cos.\eta\right),$$

o ponendo $$\rho = -\frac{1}{\mathrm{sen.}\,\theta}\,,\quad \psi = \rho\cos.\theta\,,\quad \text{sarà:}$$

$$\alpha = \lambda\,\mathrm{sen.}\,\theta\,\mathrm{sen.}\eta + \lambda_1\,\mathrm{sen.}\,\theta\cos.\eta + \lambda_2\cos.\theta\,;$$

e quindi θ è l'angolo compreso dal piano tangente e da quello della linea di curvatura, ed η l'angolo che la projezione della normale sopra quest'ultimo piano comprende coll'asse delle Y. Queste espressioni pei coseni degli angoli che la normale, alla superficie considerata, forma cogli assi ortogonali, e quelle che dalle medesime si ponno dedurre per $A, B, C,$ e le altre quantità delle quali si fece uso nei paragrafi precedenti, ci offrirebbero un mezzo facile allorquando si volessero determinare le proprietà generali a questa classe di superficie.

Ma nella trattazione del problema speciale che abbiamo enunciato al principio di questo paragrafo conviene ritornare alle equazioni (26), contenendo esse le coordinate X, Y della linea piana. A queste equazioni aggiungendo quelle che esprimono le proprietà caratteristiche indicate per le coordinate medesime, si otterranno da una parte per le sei quantità (24) valori i quali, si potrebbe dire, limitano i movimenti del piano della linea, e si giungerà dall'altra a stabilire le relazioni che devono sussistere fra i parametri della linea stessa, considerati come funzioni della variabile $u,$ affinchè essa possa essere linea di curvatura.