Ueber das Formensystem eines Kreisbogenpolygons vom Geschlecht Null.

Von

Georg Pick in Prag.

Den Ecken eines Kreisbogenpolygons, welches zu einer „automorphen“ Function gehört, entsprechen gewisse ausgezeichnete transcendente Primformen.*) Es liegt nahe, nach den invariantentheoretischen Eigenschaften dieser Primformen zu fragen, welche ja in speciellen Fällen schon bekannt sind.**) Im Folgenden werden *die Functionaldeterminanten****) und Hesse'schen Covarianten solcher Formen für die Polygone vom Geschlecht Null untersucht und mit einer sehr zweckmässigen invariantentheoretischen Schreibweise der zugehörigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Verbindung gebracht.*†) Das Resultat, das sich ergiebt, scheint mir in einer besonderen Richtung interessant zu sein. Während nämlich die Relationen für die Functionaldeterminanten einzig und allein durch die Grösse der Polygonwinkel bestimmt

*) Ueber die Klein'sche Benennung „automorph“ und die von Schwarz, Halphén, Poincaré aufgestellten Grund- (od. Prim-) formen siehe die Dissertation von E. Ritter „Die eindeutigen automorphen Functionen vom Geschlecht Null“ diese Annalen XLI (insb. II, § 8).

**) Siehe bezüglich der algebraischen Fälle F. Klein „Das Ikosaeder und die Gleichung 5ten Grades“, bezüglich der elliptischen Modulfunctionen Klein-Fricke „Vorlesungen über die Theorie d. ell. Modulf.“ (I, 4. §§ 3 u. 5).

***) Die Functionaldeterminanten berechnet Hr. Schlesinger in der Abhandlung „Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen,“ Journal f. Math. 110. II (11). Die im Text gegebene Herleitung ist consequenter in der Verwendung homogener Veränderlicher, worauf ich im Zusammenhang mit Nachfolgendem Werth gelegt habe.

†) Siehe Waelsch „Zur Geometrie der linearen algebraischen Differentialgleichungen etc.“ (Mittheilungen der deutschen mathem. Gesellschaft in Prag — bei Tempsky), Pick „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (ebenda), Derselbe, „Ueber adjungirte lineare Differentialgleichungen“ (Wr. Ber. Juni 1892), Hirsch „Zur Theorie der linearen Differentialgleichung etc.“ (Dissertation, Königsberg 1892).

sind, hängen jene für die Hesse'schen Covarianten wesentlich ab von den übrigen Bestimmungsstücken des Polygons, welche sie andererseits auch wieder selbst bestimmen. Die Erkenntniss solcher Abhängigkeiten ist aber deshalb von Wichtigkeit, weil aus ihnen sich mit der Zeit wohl die Mittel ergeben können, die Beziehungen zwischen der Gestalt des Polygons und den Constanten der Differentialgleichung, welche ja noch im Dunkel sind, aufzudecken.

§ 1.

Ueber die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Im Folgenden werden durchwegs homogene binäre Veränderliche verwendet. Die Elemente eines Paares solcher Veränderlicher sollen, wenn nöthig, durch obere Accente unterschieden werden, um die bequemeren Indices der Unterscheidung verschiedener Werthereihen vorbehalten zu können. Dem entsprechend bezeichnen wir ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(A, \varphi)^2 + 2(B, \varphi) + C\varphi = 0 \tag{1}$$

mit φ', φ'', die unabhängigen Veränderlichen mit x', x''. Von diesen sind A, B, C Formen, deren Grade eine absteigende arithmetische Reihe der Differenz 2 bilden; der Grad von φ wird sich gleich nachher ergeben.*)

Von der Differentialgleichung (1) wollen wir voraussetzen, dass sie n singuläre Stellen $a_h (h = 1, 2, \ldots n)$ besitzt, denen beziehungsweise die Exponentenpaare $\left(0, \frac{1}{l_h}\right)$ entsprechen sollen. Wir wollen, um das einfache geometrische Bild eines Kreisbogen-n-Ecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{l_h}$ stets beibehalten zu können, die l_h als reelle, am besten gleich als positive ganze Zahlen voraussetzen, ob zwar im Grunde genommen alle folgenden analytischen Entwickelungen von jeder speciellen Voraussetzung über die l_h unabhängig sind.

Durch diese Angabe können nun die Formen A und B und der Grad von φ bestimmt werden. Zunächst können wir

$$A = \prod_h (a_h x) \tag{2}$$

setzen. Zu weiteren Bestimmungen dient der Abel'sche Satz, welcher hier die Form

$$(A, \Phi) + B \cdot \Phi = 0 \tag{3}$$

---

*) Man vergleiche die in der vierten Fussnote der Einleitung angegebenen Schriften.

annimmt, worin

$$\Phi = (\varphi', \varphi'')$$

die Functionaldeterminante eines Fundamentalsystems von (1) bedeutet. Den Werth von Φ kann man (bis auf einen willkürlichen constanten Factor) leicht aus den Entwickelungen der φ', φ'' um die einzelnen Stellen des x-Gebiets feststellen. Von Φ unterscheidet sich übrigens der Ausdruck

$$\frac{(\varphi\, d\varphi)}{(x\, dx)}$$

nur durch einen numerischen Factor. Wir wollen nun die Gleichung, die man erhält, folgendermassen normiren:

$$\frac{(\varphi\, d\varphi)}{(x\, dx)} = \prod_h (a_h x)^{\frac{1}{l_h}-1}. \tag{4}$$

Hierbei ist über einen willkürlichen Factor passend verfügt, den man natürlich durch proportinale Abänderung der φ', φ'', oder auch der x', x'' jederzeit wieder einführen kann.

Aus (4) entnehmen wir zunächst den Grad von φ in x, welcher sich

$$= \frac{\sum\limits_h \left(\frac{1}{l_h}-1\right)+2}{2} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

ergiebt, indem wir zur Abkürzung

$$\varepsilon = n - 2 - \sum_h \frac{1}{l_h} \tag{5}$$

setzen. Ferner setzen wir den gefundenen Werth von Φ in Gleichung (3) ein, welche sich auch in die Form setzen lässt

$$B = \frac{1}{n(\varepsilon+2)} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x''} - \frac{\partial A}{\partial x''} \frac{\partial \lg \Phi}{\partial x'} \right\}.$$

Bezeichnet man mit A_h die Polare der Form A in Bezug auf den Punkt a_h, so verwandelt sich die erhaltene Gleichung ohne Weiteres in

$$B = -\frac{1}{\varepsilon+2} \sum_h \left(1-\frac{1}{l_h}\right) \frac{A_h}{(a_h x)}, \tag{6}$$

oder zufolge der Identität

$$0 = \sum_h \frac{A_h}{(a_h\, x)}$$

in

$$B = \frac{1}{\varepsilon+2} \sum_h \frac{1}{l_h} \frac{A_h}{(a_h x)}. \tag{6*}$$

B zeigt sich als Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, wie es sein muss.

Die Form C bleibt willkürlich, nur ihr Grad ist bestimmt und zwar gleich $n-4$.

§ 2.

Die Primformen und ihre Functionaldeterminanten.

Die den Ecken des Kreisbogenpolygons der φ-Ebene entsprechenden Primformen P_h seien definirt durch die Gleichungen

$$P_h = (a_h x)^{\frac{1}{l_h}} \quad (h = 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

Einem beliebigen Punkte $x = y$ entspreche die Primform

$$P = (xy). \tag{8}$$

Aus den Formeln (2) und (4) des vorigen Paragraphen wird jetzt

$$A = \prod_h P_h^{l_h}, \tag{9}$$

$$\frac{(x\,dx)}{(\varphi\,d\varphi)} = \prod_h P_h^{l_h - 1}. \tag{10}$$

Sieht man die Grössen φ als unabhängige Veränderliche an, so ergiebt sich

$$\text{der Grad der } x = -\frac{2}{\varepsilon},$$

$$\text{der Grad von } P_h = -\frac{2}{\varepsilon l_h}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Bestimmung der Functionaldeterminanten je zweier von den Formen P_h in Bezug auf φ', φ'' als unabhängige Veränderliche. Zunächst ist

$$\left(P_r^{l_r},\ P_s^{l_s}\right) = P_r^{l_r - 1} P_s^{l_s - 1} (P_r, P_s).$$

Andererseits wird

$$\left(P_r^{l_r},\ P_s^{l_s}\right) \cdot (\varphi\,d\varphi) = -\frac{\varepsilon}{2} \begin{vmatrix} P_r^{l_r}, & d\left(P_r^{l_r}\right) \\ P_s^{l_s}, & d\left(P_s^{l_s}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \begin{vmatrix} (a_r x), & (a_r dx) \\ (a_s x), & (a_s dx) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} (a_r a_s)(x\,dx).$$

Aus diesen Gleichungen folgt in Verbindung mit (10) folgende Formel für die *Functionaldeterminante zweier Primformen*:

$$(P_r, P_s) = -\frac{\varepsilon}{2}(a_r a_s) \cdot \prod_{h \gtrless r, s} P_h^{l_h - 1}. \tag{11}$$

Wir benutzen diese Formel noch dazu, um die Form B durch die P_h auszudrücken. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, dass die Polare von A nach a_s sich folgendermassen ausdrückt:

$$A_s = \frac{A}{n} \sum_r \frac{(a_r a_s)}{(a_r x)}.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von A nach (9), den von $(a_r x)$ nach (7), den von $(a_r a_s)$ nach (11), so erhält man

$$A_s = -\frac{2}{\varepsilon} \frac{P_1 P_2 \ldots P_n}{n} \sum_r \frac{(P_r, P_s)}{P_r . P_s},$$

und wenn man diese Formel zur Umgestaltung von (6) § 2 benutzt, so ergiebt sich als *Ausdruck von B durch die Primformen*

$$(12) \qquad B = -\frac{2}{n\varepsilon(\varepsilon+2)} P_1 P_2 \ \ldots P_n \sum_{r,s} \left(\frac{1}{l_r} - \frac{1}{l_s}\right) \frac{(P_r, P_s)}{P_r . P_s}.$$

Die Summe ist über alle Combinationen der Indices r, s zu erstrecken.

§ 3.

Die Hesse'schen Covarianten der Primformen.

Zur Berechnung der Hesse'schen Formen der P_r dient folgende Ueberlegung*). Die partiellen Differentialquotienten irgend einer automorphen Form X der φ

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi''}, \quad -\frac{\partial X}{\partial \varphi'}$$

sind cogredient mit den φ', φ'' selbst. Es müssen also diese partiellen Differentialquotienten ein Fundamentalsystem einer gewissen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bilden, welche sich aus der gegebenen Gleichung (1) muss herleiten lassen. Bildet man die Ueberschiebung jener beiden Grössen in Bezug auf die φ', φ'' als unabhängige Veränderliche, so erhält man die Hesse'sche Form von X. Diese Ueberschiebung unterscheidet sich aber nur durch einen bekannten Factor von jener, welche in Bezug auf x', x'' als unabhängig Veränderliche gebildet wird, und letztere kann nach dem Abel'schen Satze vermittelst der postulirten Differentialgleichung ausgewerthet werden.

Indess ist die wirkliche Ausrechnung der Differentialgleichung, wie man leicht sieht, nicht erforderlich. Vielmehr führt der obige Gedankengang auf ein kürzeres Verfahren, welches im Folgenden eingehalten ist. Wir wählen für X die Grösse (yx), in welcher y einen

*) Dieselbe entspricht der Ableitung der Hesse'schen Determinante von $\log \Delta$ mittelst der Perioden zweiter Gattung in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Vgl. Klein-Fricke. a. a. O.

beliebigen Punkt bedeutet, den wir zum Schlusse mit a_4 zusammenfallen lassen. Die Grössen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen sind, lauten dann

$$\left(y\frac{\partial x}{\partial \varphi'}\right) \quad \text{und} \quad \left(y\frac{\partial x}{\partial \varphi''}\right).$$

Wir wollen nun die x als unabhängige Veränderliche einführen. Gleichzeitig soll von folgender abkürzenden Bezeichnung Gebrauch gemacht werden: Wenn f eine Form der Veränderlichen ξ', ξ'' vom Grade g ist, setzen wir

$$f_1 = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial \xi'}, \quad f_2 = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial \xi''},$$

$$f_{11} = \frac{1}{g(g-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2}, \quad f_{12} = \frac{1}{g(g-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi' \partial \xi''}, \quad f_{22} = \frac{1}{g(g-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi''^2}.$$

In solcher Weise bezeichnen wir auf der linken Seite der folgenden Gleichungen die Differentialquotienten nach φ', φ'', auf der rechten diejenigen nach x', x''. Zu Verwechslungen wird dabei kein Anlass gegeben.

Nach bekannten Elementarformeln wird

$$(yx_1) = -\frac{y'\varphi_1'' + y''\varphi_2''}{(\varphi', \varphi'')},$$

$$(yx_2) = +\frac{y'\varphi_1' + y''\varphi_2'}{(\varphi', \varphi'')}.$$

Wir bilden die Differenz der totalen logarithmischen Differentiale dieser beiden Gleichungen. Es ergiebt sich links

$$\frac{1}{(yx_1)(yx_2)}\begin{vmatrix} (yx_1), & d(yx_1) \\ (yx_2), & d(yx_2) \end{vmatrix},$$

rechts

$$\frac{-1}{(y'\varphi_1'+y''\varphi_2')(y'\varphi_1''+y''\varphi_2'')}\begin{vmatrix} y'\varphi_1' + y''\varphi_2', & d(y'\varphi_1' + y''\varphi_2') \\ y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'', & d(y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'') \end{vmatrix}.$$

Nach Gleichsetzung beider Seiten erhält man mit Benützung der ursprünglichen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} (yx_1), & d(yx_1) \\ (yx_2), & d(yx_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{[(\varphi', \varphi'')]^2}\begin{vmatrix} y'\varphi_1' + y''\varphi_2', & d(y'\varphi_1' + y''\varphi_2') \\ y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'', & d(y'\varphi_1'' + y''\varphi_2'') \end{vmatrix}.$$

Links führen wir die angezeigten Differentiationen mit Hilfe der φ, rechts mit Hilfe der x als unabhängiger Veränderlicher aus. Es ergiebt sich links

$$\left(-\frac{2}{s} - 1\right)\left((yx_1), (yx_2)\right)(\varphi\, d\varphi),$$

rechts

$$\frac{\left(-\frac{\varepsilon}{2}-1\right)}{[(\varphi',\varphi'')]^2}\cdot\begin{vmatrix} y'\varphi'_{11}+y''\varphi'_{12}, & y'\varphi'_{12}+y''\varphi'_{22} \\ y'\varphi''_{11}+y''\varphi''_{12}, & y'\varphi''_{12}+y''\varphi''_{22}\end{vmatrix}\cdot(x\,dx)$$

$$=\frac{\left(-\frac{\varepsilon}{2}-1\right)}{[(\varphi',\varphi'')]^2}\begin{vmatrix} \varphi'_{11}, & \varphi'_{12}, & \varphi'_{22} \\ \varphi''_{11}, & \varphi''_{12}, & \varphi''_{22} \\ y''^2, & -y'y'', & y'^2\end{vmatrix}(x\,dx).$$

Es ist nun

$$(\varphi',\varphi'')=-\frac{2}{\varepsilon}\,\frac{(\varphi\,d\varphi)}{(x\,dx)};$$

Ferner ist die Functionaldeterminante $\big((yx_1),(yx_2)\big)$ nichts anderes als die Hesse'sche Covariante von (yx) zur Hälfte genommen. Somit erhält man

$$\big((yx),(yx)\big)^2=-\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{(x\,dx)^2}{(\varphi\,d\varphi)^2}\cdot\frac{1}{(\varphi',\varphi'')}\cdot\begin{vmatrix} \varphi'_{11}, & \varphi'_{12}, & \varphi'_{22} \\ \varphi''_{11}, & \varphi''_{12}, & \varphi''_{22} \\ y''^2, & -y'y'', & y'^2\end{vmatrix}.$$

Es erübrigt jetzt nur noch, die rechts stehende Determinante vermittelst der Differentialgleichung (1) auszuwerthen. Zu diesem Zwecke drücken wir in der Differentialgleichung nach dem Euler'schen Satze φ und die ersten Ableitungen von φ durch die zweiten Ableitungen aus, wodurch die Gleichung die Form erhält

$$\begin{aligned}&(A_{22}-2B_2x'+Cx'^2)\varphi_{11}\\ -&2(A_{12}-B_1x'+B_2x''-Cx'x'')\varphi_{12}\\ +&\ (A_{11}+2B_1x''+Cx''^2)\varphi_{22}=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für jede der Grössen φ',φ'' und es folgt also, dass die Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{11}, & \varphi'_{12}, & \varphi'_{22} \\ \varphi''_{11}, & \varphi''_{12}, & \varphi''_{22}\end{vmatrix}$$

sich verhalten wie

$(A_{22}-2B_2x'+Cx'^2):-2(A_{12}-B_1x'+B_2x''-Cx'x''):(A_{11}+2B_1x''+Cx''^2)$.

Bekanntlich ist aber

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{11}, & \varphi'_{12}, & \varphi'_{22} \\ \varphi''_{11}, & \varphi''_{12}, & \varphi''_{22} \\ x''^2, & -x'x'', & x'^2\end{vmatrix}=(\varphi',\varphi''),$$

so dass sich der hinzutretende Proportionalitätsfactor gleich $\frac{A}{(\varphi',\varphi'')}$ ergiebt.

Die fragliche Determinante ist jetzt leicht zu berechnen. Man erhält

$$\frac{1}{(\varphi',\varphi'')}\begin{vmatrix} \varphi'_{11}, & \varphi'_{12}, & \varphi'_{22} \\ \varphi''_{11}, & \varphi''_{12}, & \varphi''_{22} \\ y''^2, & -y'y'', & y'^2\end{vmatrix}=\frac{A_{yy}+2(yx)B_y+(yx)^2C}{A},$$

worin durch die angehängten y Polarisationen nach y angezeigt sind. Somit ergiebt sich für die Hesse'sche Covariante von $P = (yx)$ die Relation

$$(13)\quad (P, P)^2 = \big((yx), (yx)\big)^2 = -\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{(x\,dx)^2}{(\varphi\,d\varphi)^2}\frac{A_{yy} + 2(yx)B_y + (yx)^2 C}{A}.$$

Wir setzen hierin an Stelle von y a_r, und führen gleichzeitig für die rechts vorkommende Grösse $\frac{(x\,dx)}{(\varphi\,d\varphi)}$ und den Nenner A ihre Werthe nach (10) und (9) § 2 ein; es ergiebt sich so für die *Hesse'sche Form der Primform* P_r*)

$$(14)\quad (P_r, P_r)^2 = -\frac{\varepsilon^2(\varepsilon+2)}{2\left(\varepsilon+\frac{2}{l_r}\right)}\prod_h P_h^{l_h-2}\cdot\frac{A_{rr} + 2(a_r x)B_r + (a_r x)^2 C}{P_r^{2l_r-2}}.$$

Wir unterlassen es in dieser Formel die Grössen A_{rr} und B_r auch noch durch ihre Ausdrücke in den P_r zu ersetzen, weil die Schlussformel ziemlich complicirt ausfällt.

Die gefundene Relation macht die gegenseitige Abhängigkeit der Hesse'schen Covarianten der Primformen einerseits und der Form C andrerseits deutlich.

Alle aufgestellten Formeln bedürfen leicht angebbarer Modificationen für den Fall, dass von den l_h einige oder alle gleich Unendlich werden (Fall „parabolischer Ecken" des Polygons). Auf diese Modificationen soll nicht näher eingegangen werden.

Prag, October 1892.

---

*) Bei diesen Umgestaltungen hat man von folgender Formel Gebrauch zu machen, welche ich bei flüchtiger Umsicht nirgends angegeben finden konnte: Es sei f eine Form g^{ten} Grades von ξ', ξ'', so ist

$$(f^m, f^m)^2 = \frac{g-1}{mg-1} f^{2m-2}(f, f)^2.$$

Analog ist

$$2\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi'^2}, & \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi' \partial \xi''} \\ \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi' \partial \xi''}, & \frac{\partial^2 \lg f}{\partial \xi''^2} \end{vmatrix} = -g^2(g-1)f^{-2}(f, f)^2.$$