Ueber trigonometrische Reihen.

Von CANTOR in HALLE a. d. S.

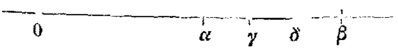
Im 72. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik leite ich einen Satz her, welcher zum Gegenstande hat das Unendlichkleinwerden der Coefficienten trigonometrischer Reihen unter gewissen Voraussetzungen. Ich möchte eine Darstellung des dazu erforderlichen Beweises geben, welche vielleicht in Bezug auf Uebersichtlichkeit und Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen wird. In der Reihe der Sätze, welche ich im Folgenden ableiten werde, ist es der letzte, um den es sich hier handelt, während die übrigen als Hülfssätze auftreten.

I. „*Ist* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ *eine gegebene unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen, welche nur an die Bedingungen gebunden ist, dass:*

$$x_2 \geqq k x_1, \quad x_3 \geqq k^2 x_2, \quad x_n > k^{n-1} x_{n-1}, \ldots,$$

wo $k > 1$ *ist, so giebt es Zahlengrössen* Ω, *welche eine solche Beziehung zur Zahlenreihe* $x_1, x_2, \cdots$ *haben, dass das Product* $x_n \Omega$ *sich von einer ungeraden ganzen Zahl* $2y_n + 1$ *um eine Grösse* Θ_n *unterscheidet, welche unendlich klein wird, wenn man* n *ins Unendliche wachsen lässt, und zwar kann die Zahlengrösse* Ω *innerhalb eines willkührlich vorgegebenen Intervalles* $(\alpha\,.\,.\,\beta)$ *gefunden werden.*"

Beweis: Ich will die Grösse des Intervalles $(\alpha\,.\,.\,\beta)$ mit i bezeichnen und dasselbe im Positiven voraussetzen, was erlaubt ist, da, wenn eine Zahlengrösse Ω die behauptete Eigenschaft hat, auch $-\Omega$ dieselbe Eigenschaft behält,



wenn nur statt $2y_n + 1$ die Zahl $-(2y_n + 1)$ genommen wird. Man theile das Intervall in drei gleiche Theile; seien γ und δ die Theilpunkte, so dass: $\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{i}{3}$.

Sei x_ν die erste der Zahlen x_n, welche grösser ist, als die grösste der beiden Grössen $\frac{3}{(k-1)\,i}$ und $\frac{6}{i}$.

Wir nehmen die ungerade Zahl $2y_\nu + 1$ so an, dass der Bruch $\frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ in das Intervall $\gamma\delta$ fällt; dies ist möglich, weil $x_\nu > \frac{6}{i}$; alsdann denken wir uns die ungeraden Zahlen $2y_{\nu+1}+1$, $2y_{\nu+2}+1$, ... so bestimmt, dass:

$$\text{(A)}\quad \begin{array}{l} \left(2y_{\nu+1}+1-(2y_\nu+1)\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}\right) \leqq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(2y_{n+1}+1-(2y_n+1)\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \leqq 1^{*)}. \end{array}$$

Ich füge noch hinzu, dass, wenn hierbei irgend wo eine Zweideutigkeit für die Zahl $2y_n+1$ eintreten sollte, stets die kleinere Zahl genommen werden soll; alsdann ist durch das Bedingungssystem (A) eine Reihe ungerader Zahlen $2y_n+1$, von $n=\nu$ an, eindeutig definirt; für kleinere Werthe von n setze man der Gleichförmigkeit wegen für $2y_n+1$ irgend welche ungerade Zahlen fest.

Die Zahlen x_n und y_n bestimmen nun eine unendliche Reihe von Brüchen:

$$\text{(A)}\qquad \frac{2y_1+1}{x_1},\quad \frac{2y_2+1}{x_2},\ \dots\dots\ \frac{2y_n+1}{x_n},\ \dots\dots$$

welche sich mit wachsendem n einer bestimmten Grenze Ω nähern; denn wegen des Bedingungssystems (A) und da die Reihe $\frac{1}{x_\nu}+\frac{1}{x_{\nu+1}}+\dots\dots$ convergent ist, sieht man leicht, dass die Differenz:

$$\frac{2y_{n+m}+1}{x_{n+m}}-\frac{2y_n+1}{x_n}$$

unendlich klein wird, wenn, was auch m sei, n unendlich gross wird.

Aus (A) ergiebt sich nun, wenn $n>\nu$, für Ω die Relation:

$$\left(\Omega-\frac{2y_n+1}{x_n}\right) \leqq \frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_{n+2}}+\dots\dots\dots$$

oder:

$$(\Omega x_n-2y_n-1)<\frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_n}{x_{n+1}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}+\dots\dots\dots;$$

es ist aber:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}\leqq\frac{1}{k^n},\quad \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\leqq\frac{1}{k^{n+1}},\ \dots\dots$$

Daraus folgt:

$$(\Omega x_n-2y_n-1)<\frac{1}{k^n}+\frac{1}{k^{2n+1}}+\frac{1}{k^{3n+3}}+\dots\dots$$

und umsomehr:

$$\text{(B)}\qquad (\Omega x_n-2y_n-1)<\frac{1}{k^n-1}.$$

Hieraus ersieht man, dass, da $k>1$, die Differenz $\Theta_n=x_n\Omega-2y_n-1$ mit wachsendem n unendlich klein wird, und es ist somit der erste Theil des Satzes bewiesen.

---

*) Unter (z) verstehe ich immer den absoluten Werth der Grösse z.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die hier gefundene Zahlengrösse Ω im Intervalle $(\alpha \,..\, \beta)$ liegt; dies ergiebt sich aus (B), wenn man darin $n = \nu$ setzt; man hat:

$$\left(\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right) < \frac{1}{x_\nu (k^\nu - 1)}$$

und umsomehr:

$$\left(\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right) < \frac{1}{x_\nu (k - 1)}.$$

Es war aber x_ν so angenommen, dass: $\frac{1}{x_\nu (k-1)} < \frac{i}{3}$; man hat also:

$$\text{(C)} \qquad \left(\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right) < \frac{i}{3}.$$

Der Bruch $\frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ liegt, wie zu Anfang festgesetzt wurde, im Intervalle $(\gamma \,..\, \delta)$; die Grösse Ω liegt also wegen (C) jedenfalls im Intervalle $(\alpha \,..\, \beta)$.

II. „*Ist eine unendliche Grössenreihe:*

$$c_1\,,\quad c_2\,,\;\ldots\,,\; c_n\,,\;\ldots$$

so beschaffen, dass man aus jeder in ihr enthaltenen unendlichen Reihe:

$$c_{\nu_1}\,,\quad c_{\nu_2}\,,\;\ldots\,,\quad c_{\nu_n}\,,\;\ldots\,,$$

eine neue Grössenreihe:

$$c_{\nu_{\mu_1}}\,,\quad c_{\nu_{\mu_2}}\,,\;\ldots\,,\quad c_{\nu_{\mu_n}}\,,\;\ldots\ldots$$

ausheben kann, deren Glieder $c_{\nu_{\mu_n}}$ mit wachsendem n unendlich klein werden, so werden auch die Glieder c_n der ursprünglichen Reihe mit wachsendem n unendlich klein.“

Beweis. Ist ε eine beliebig angenommene positive Grösse, so ist die Anzahl der Glieder in der Reihe c_n, welche ihrem absoluten Betrage nach grösser als ε sind, endlich; denn würde sie unendlich sein, so hätte man eine in der ersten enthaltene unendliche Reihe c_{ν_n}, deren Glieder sämmtlich grösser wären als ε, aus welcher sich daher keine Grössenreihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ ausheben liesse, deren Glieder mit wachsendem n unendlich klein würden.

Wenn aber in einer Reihe c_n die Anzahl der Glieder, welche grösser als eine willkürlich angenommene Grösse ε sind, endlich ist, so heisst dies nichts anders als, dass $\lim c_n = 0$ für $n = \infty$.

III. „*Wenn für jeden Werth von x zwischen* 0 *und* $\frac{i}{2}$ *(wo i eine beliebige positive Grösse ist):*

$$\lim c_n \sin nx = 0, \qquad \textit{so ist:}$$

$$\lim c_n = 0.\text{“}$$

Beweis. Sei c_{ν_n} irgend eine in der Reihe c_n enthaltene unendliche Reihe; dann will ich zeigen, dass sich aus der Reihe c_{ν_n} eine neue Reihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ ausheben lässt, so dass $\lim c_{\nu_{\mu_n}} = 0$ für $n = \infty$.

Die Reihe $c_{\nu_{\mu_n}}$ werde so aus c_{ν_n} gehoben, dass, bei irgend einer festgenommenen Zahl $k > 1$, stets:

$$\nu_{\mu_n} \geq k^{n-1}\, \nu_{\mu_{n-1}}. \tag{1}$$

Eine solche Aushebung ist immer möglich.

Man bestimme nun nach I. eine Zahlengrösse Ω im Intervalle $\left(0 \,.\,.\, \frac{i}{\pi}\right)$ so, dass:

$$\Omega \nu_{\mu_n} - (2y_n + 1) = \Theta_n$$

mit wachsendem n unendlich klein wird, wobei y_n eine ganze Zahl ist.

Die Zahlengrösse $\Omega' = \Omega\frac{\pi}{2}$ (wo unter π die Verhältnisszahl des Umfangs zum Durchmesser beim Kreise ist), liegt alsdann im Intervalle $\left(0 \,.\,.\,.\, \frac{i}{2}\right)$ und es wird:

$$\Omega' \nu_{\mu_n} - \frac{\pi}{2}(2y_n + 1) = \Theta'_n \tag{2}$$

mit wachsendem n unendlich klein.

Wenden wir nun die Voraussetzung, welche dem Satze zu Grunde liegt (dass nämlich:

$$\lim c_n \sin nx = 0$$

für jeden Werth von x im Intervalle $\left(0 \,.\,.\, \frac{i}{2}\right)\Big)$, auf den Fall $x = \Omega'$ an, so hat man:

$$\lim c_n \sin n\Omega' = 0$$

und daher auch:

$$\lim c_{\nu_{\mu_n}} \sin \nu_{\mu_n} \Omega' = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Wegen (2) kann man hier $\sin \nu_{\mu_n} \Omega'$ durch $\pm \cos \Theta'_n$ ersetzen und man hat also:

$$\lim c_{\nu_{\mu_n}} \cos \Theta'_n = 0 \text{ für } n = \infty. \tag{3}$$

Da nun aber Θ'_n mit wachsendem n unendlich klein wird, so folgt ohne Weiteres aus (3):

$$\lim c_{\nu_{\mu_n}} = 0 \text{ für } n = \infty.$$

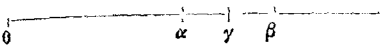
Mit Zuhülfenahme des Satzes II. schliesst man nun, dass:

$$\lim c_n = 0 \text{ für } n = \infty.$$

IV. *„Wenn für jeden reellen Werth von x zwischen gegebenen Grenzen $\alpha \,.\,.\, \beta$ die Bedingung erfüllt ist:*

$$\lim (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0,$$

so ist sowohl $\lim a_n = 0$, *wie* $\lim b_n = 0$."



Beweis. Sei γ der in der Mitte zwischen $\alpha \,.\,.\, \beta$ gelegene Werth; die Grösse des Intervalles will ich hier wieder i nennen. Setzen wir:

$$a_n \cos n\gamma - b_n \sin n\gamma = c_n$$
$$a_n \sin n\gamma + b_n \cos n\gamma = d_n \quad \text{so ist:}$$
$$a_n = c_n \cos n\gamma + d_n \sin n\gamma$$
$$b_n = -c_n \sin n\gamma + d_n \cos n\gamma.$$

Wenn wir nun zeigen könnten, dass $\lim c_n = 0$, $\lim d_n = 0$, so würde daraus folgen, dass $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$. Es ist aber wegen der Voraussetzung, welche dem Satze zu Grunde liegt, wenn man sie auf $x = \gamma$ anwendet:

$$\lim d_n = 0$$

und es verbleibt daher nur noch zu beweisen, dass $\lim c_n = 0$.

Dies geschieht auf folgende Weise.

Man hat für jeden positiven Werth von $x < \frac{i}{2}$ die beiden Relationen:

$$\lim \big(a_n \sin n(\gamma + x) + b_n \cos n(\gamma + x)\big) = 0$$
$$\lim \big(a_n \sin n(\gamma - x) + b_n \cos n(\gamma - x)\big) = 0,$$

aus welchen durch Subtraction (wenn man ausserdem durch 2 dividirt) hervorgeht:

$$\lim c_n \sin nx = 0 \text{ für } n = \infty,$$

wenn x irgend ein positiver Werth, kleiner als $\frac{i}{2}$ ist. Wegen des Satzes III. ist also:

$$\lim c_n = 0. \quad \text{q. e. d.}$$

Berlin, den 21. April 1871.