

"American Journal of Mathematics, Pure and Applied" (published under the auspices of the Johns Hopkins University), Vol. i., Nos. 1, 2; Baltimore, 1878.

*Sur la Théorie des Caractéristiques pour les Coniques.*

Par M. HALPHEN.

[Read June 13th, 1878.]

Dans deux communications adressées à l'Académie des Sciences de Paris,\* j'ai indiqué des modifications qu'il est nécessaire de faire subir à la théorie connue des caractéristiques pour les coniques. Je me propose de donner ici un aperçu des résultats que j'ai obtenus dans l'étude de cette théorie, et que j'ai développés dans un mémoire qui n'a pu être publié jusqu'à présent.

I. *Position de la question.*

1. On donne, je le rappelle, le nom de *système* de coniques dans un plan à l'ensemble des coniques de ce plan qui satisfont à quatre conditions communes. Le problème principal auquel se rapporte la théorie des caractéristiques est de trouver le nombre des coniques, appartenant à un système donné, qui satisfont, d'autre part, à une condition également donnée. En conséquence, cette théorie doit enseigner quels sont les éléments numériques, ou *caractéristiques*, qu'il faut connaître pour le système et pour la condition, et comment on doit combiner ces éléments numériques afin d'obtenir le nombre cherché. Pour qu'il y ait lieu à une théorie sur ce sujet, il faut évidemment supposer entre ces deux données, le système et la condition, une certaine *indépendance*; et on n'a jamais manqué de le faire. Mais cette indépendance doit être définie avec précision, et c'est par là que j'entrerai en matière.

2. Disons tout d'abord que la question est portée sur le terrain de la géométrie projective; par suite, toute condition imposée à une conique devra être mise sous forme projective. Pour la mettre sous une telle forme, on peut convenir d'employer un procédé unique, comme je vais l'expliquer.

Soient, dans un plan, quatre points fixes  $t, u, v, w$  et un autre point  $\alpha$ , et désignons par  $t, t', \dots X, X'$  les coordonnées de ces points par rapport à deux axes. Pour abrégé, employons la notation

$$(tuv) = \begin{vmatrix} t & t' & 1 \\ u & u' & 1 \\ v & v' & 1 \end{vmatrix},$$

\* 4 Septembre et 13 Novembre 1876. V. Comptes Rendus, T. lxxxiii., pp. 537 et 586.

et posons :

$$(1) \dots\dots\dots x = \frac{(vwX)(uvt)}{(uvX)(vwt)}, \quad x' = \frac{(wuX)(uvt)}{(uvX)(wvt)}.$$

Si les quatre points fixes occupaient des positions particulières, savoir  $u$  à l'infini sur l'axe des  $X$ ,  $v$  à l'infini sur l'axe des  $X'$ ,  $w$  à l'origine des coordonnées, et que  $t$  eût ses deux coordonnées égales à l'unité, il résulterait de cette hypothèse :  $x = X$ ,  $x' = X'$ . D'autre part,  $x$  et  $x'$  sont les rapports anharmoniques de deux faisceaux de droites obtenus en joignant soit  $v$ , soit  $u$ , aux quatre autres points. Si donc on fait le changement de coordonnées marqué par les équations (1),  $x$ ,  $x'$  étant les anciennes coordonnées et  $X$ ,  $X'$  les nouvelles, on exécute ainsi une transformation homographique quelconque en introduisant, à cet effet, quatre points  $t$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  arbitraires, mais fixes. Donc une condition quelconque imposée à une figure peut être traduite, sous forme projective, par une relation numérique entre les coordonnées de cette figure et celles de quatre points.

3. Revenons maintenant aux coniques, et posons la question :

Soit  $\Phi$  une condition projective donnée entre une conique et quatre points  $t$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ;

Soit, d'autre part,  $S$  un système de coniques donné ;

On envisage les coniques du système  $S$  qui satisfont à la condition  $\Phi$ , et l'on demande de discuter le problème de la recherche de ces coniques, en examinant :

1°. S'il y a des solutions indépendantes des points  $t$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , et quelles sont ces solutions ;

2°. Quel est le nombre des solutions distinctes qui dépendent de ces points, lorsqu'ils restent indéterminés.

La discussion complète exigerait, en troisième lieu, l'examen des diverses particularités que peuvent présenter ces dernières solutions, en se réunissant soit entre elles, soit avec les précédentes, lorsque les points arbitraires de  $\Phi$  occupent des positions particulières. Cette dernière partie de la discussion est formellement exclue de notre programme, et c'est en quoi consiste l'indépendance supposée entre le système  $S$  et la condition  $\Phi$ .

4. A l'égard de la première catégorie de solutions, on peut dès l'abord être fixé sur leur nature. Par une transformation homographique, une conique  $a$  peut être transformée en une autre conique arbitraire  $a'$ . Soit  $a$  une conique, qui, dans un système  $S$ , satisfasse à une condition  $\Phi$ . Par une transformation homographique, changeons  $a$  en  $a'$  et, en même temps, les points  $t$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de  $\Phi$  en  $t'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ . La conique  $a'$  satisfait à la condition  $\Phi$  ainsi transformée. Si maintenant on suppose que  $a$  satisfasse à  $\Phi$ , quels que soient  $t$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , il en est de même de  $a'$ . Donc une conique arbitraire  $a'$  satisfait à la condition  $\Phi$ , ce qui est

impossible. Donc  $a$  ne peut être une conique. Donc les solutions qui sont indépendantes des arbitraires de la condition  $\Phi$  ne sont pas des coniques, mais des figures particulières, limites de coniques dans le système, ou coniques dégénérées.

En second lieu, si  $S$  est un système de véritables coniques, les solutions qui dépendent des arbitraires de  $\Phi$ , et qui, en conséquence, varient dans le système avec ces arbitraires, sont de véritables coniques. Ainsi la distinction ci-dessus des solutions en deux catégories, revient exactement à la distinction des solutions étrangères fournies par les coniques dégénérées, et des solutions fournies par de véritables coniques. C'est de ces dernières qu'il s'agit de déterminer le nombre. Je vais exposer ici la solution du problème dans un cas particulier, pour lequel les résultats se démontrent avec une extrême facilité, et ont exactement la même forme que dans le cas le plus général. En ce qui concerne le cas général, je renverrai, pour la démonstration, au mémoire dont j'ai parlé plus haut, et qui sera publié ultérieurement.

II. *Systèmes de coniques, et coniques dégénérées.*

5. Considérons d'abord, pour plus de simplicité, des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe. Soient  $Q = 0, R = 0, S = 0$  les équations des côtés de ce triangle, dont je désignerai par  $g, r, s$  les sommets respectivement opposés à ces côtés. L'équation d'une quelconque de ces coniques est :

$$(2) \dots\dots\dots g_1 Q^2 + g_2 R^2 + g_3 S^2 = 0.$$

Cette conique dégénère en deux droites ou en une droite suivant que un ou deux des coefficients  $g$  deviennent nuls. Mais, si l'on envisage un système de coniques (2), cette observation ne suffit pas. Les  $g$  sont alors des fonctions d'une variable  $\omega$ , et il est nécessaire d'examiner quelles sont les diverses manières dont ces fonctions parviennent à la limite zéro. De là trois modes de dégénérescence à distinguer :

1°. *Dégénérescence A.*—Un seul coefficient devient nul, par exemple  $g_1$ . La conique se réduit à deux droites passant en  $q$ . Il est aisé de voir que, pour  $g_1$  infiniment petit, les tangentes menées à la conique par un point arbitraire la touchent en deux points infiniment voisins de  $q$ . Ainsi ce mode de dégénérescence est caractérisé par ce fait que les tangentes menées d'un point quelconque à la conique font entre elles un angle infiniment petit.

2°. *Dégénérescence A'.*—Deux coefficients infiniment petits, mais d'un même ordre ; par exemple  $g_1$  et  $g_2$ . La conique-limite est la droite  $S$ . Ce mode de dégénérescence est caractérisé par ce fait que la conique est rencontrée par une droite quelconque en deux points infiniment voisins ; mais les tangentes issues d'un point quelconque ne coïncident pas.

3°. *Dégénérescence B.* — Deux coefficients infiniment petits, mais d'ordres différents; par exemple  $g_1$  du 1<sup>er</sup> ordre, et  $g_2$  d'ordre supérieur,  $1+h$ . Les deux caractères précédents existent alors simultanément. Une droite quelconque coupe la conique en deux points dont la distance  $d$  est infiniment petite. Les tangentes issues d'un point quelconque font entre elles un angle  $\delta$  infiniment petit. Il y a alors lieu de considérer un nombre positif  $h$ , tel que  $d^h : \delta$  ait une limite finie, différente de zéro.

On remarquera que, d'après les propriétés des fonctions algébriques, il existe toujours un tel nombre  $h$  commensurable, si, comme nous le supposons, le système est algébrique.

6. En même temps que le système  $(a)$ , contenant la conique dégénérée  $a$ , considérons un système corrélatif  $(a')$ , et soit  $a'$  la conique qui y correspond à  $a$ . Soient, pour  $a'$ , désignés par  $d', \delta', h'$  les éléments analogues. Il est visible que  $d'$  est du même ordre infinitésimal que  $\delta$ , et  $\delta'$  du même ordre que  $d$ . Donc  $h'$  est l'inverse de  $h$ . Donc : dans deux systèmes corrélatifs, deux coniques dégénérées suivant le mode B se correspondent, et leurs nombres caractéristiques  $h$  sont réciproques. Les coniques dégénérées suivant le mode A correspondent à des coniques dégénérées suivant le mode A'.

Ces résultats sont d'ailleurs mis en évidence au moyen de l'équation :

$$g_2 g_1 Q^2 + g_2 g_2 R^2 + g_1 g_2 S^2 = 0,$$

qui représente la polaire réciproque de (2) par rapport à une conique fixe.

7. Cette étude, faite pour un système de coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, s'applique à un système quelconque, en vertu d'une remarque très-simple.

Soit, dans un système  $(a)$ , une conique  $a$  qui dégénère. Je prends arbitrairement un point  $s$  et une droite  $Q$  passant en  $s$ . Les points  $y, z$ , où  $a$  coupe  $Q$ , peuvent être différents ou infiniment voisins; mais, en tous cas, leurs limites diffèrent de  $s$ , qui est arbitraire sur  $Q$ . Donc le conjugué harmonique de  $s$  par rapport à  $y, z$ , a une limite différente de  $s$ . On peut répéter le même raisonnement pour toute droite  $Q$  menée par  $s$ , et conclure que la polaire de  $s$  a une limite qui ne passe par  $s$ . De même aussi le pôle de  $Q$  a une limite qui n'est pas sur  $Q$ . Donc, dans la série des triangles respectivement conjugués par rapport à chacune des coniques d'un système, et ayant un sommet fixe ainsi qu'un des côtés aboutissant à ce sommet, le triangle qui répond à une conique dégénérée est un triangle véritable, c'est-à-dire non dégénéré. On peut donc encore raisonner sur l'équation (2) comme ci-dessus, et en tirer les mêmes conclusions, que ne modifie en rien la mobilité du triangle *grs*.

8. Pour la question qui nous occupe, ce n'est pas le nombre  $h$  lui-

même, caractéristique du mode B de dégénérescence, qui doit intervenir, mais deux nombres entiers, dont  $h$  est le quotient.

Ayant un système algébrique ( $\alpha$ ) de coniques  $a$ , on peut d'une infinité de manières trouver une courbe ( $k$ ), telle que ses points  $k$  correspondent *uniformément* aux coniques  $a$  du système. M. Clebsch a, par exemple, démontré\* que la courbe, lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques  $a$  satisfait à cette condition. Ayant une pareille courbe, on peut lui substituer une quelconque de celles qui lui correspondent *point par point*, et varier ainsi à l'infini le mode de représentation du système ( $\alpha$ ) au moyen d'une courbe ( $k$ ).

Soit  $K$  un point d'une telle courbe ( $k$ ), et, s'il est singulier, considérons une des branches superlinéaires ou linéaires, disons abrégativement un des *cycles* ( $k_1$ ), entre lesquels se répartissent les branches de la courbe en ce point. Si le point  $k$  se déplace sur ce cycle ( $k_1$ ) aux environs de  $K$ , la conique  $a$  du système ( $\alpha$ ) varie aux environs de la conique limite  $A_1$  qui correspond à  $K$ . Aux divers cycles dont l'origine est en  $K$  peuvent correspondre des limites diverses  $A$  de la conique  $a$ , comme aussi ces limites peuvent coïncider. De même aussi une pareille conique  $A$  peut correspondre à divers points  $K$  de la ligne ( $k$ ). Mais ces diverses circonstances n'importent pas pour la question actuelle: le point  $k$  variant sur deux cycles différents ( $k_1$ ), ( $k_2$ ) de la courbe ( $k$ ), la conique  $a$  aura deux limites  $A_1$ ,  $A_2$ , qui, même si elles coïncident, devront être envisagées comme distinctes.

Supposons maintenant que  $A_1$  soit une conique dégénérée suivant le mode B, et qu'ainsi deux des coefficients de (2),  $g_1$ ,  $g_2$ , soient nuls. Soit  $\lambda$  l'ordre de multiplicité du cycle ( $k_1$ ). Plaçons  $k$  sur ce cycle à une distance de  $K$  infiniment petite d'ordre  $\lambda$ . Pour ce point  $k$ ,  $g_1$  et  $g_2$  sont infiniment petits. Soient  $m$  et  $m+n$  leurs ordres respectifs. Ces deux nombres sont entiers, d'après la théorie des fonctions algébriques. Le quotient  $n : m$  n'est autre que le nombre  $h$  ci-dessus défini. Mais les nombres  $m$ ,  $n$  eux-mêmes sont caractéristiques de la conique dégénérée  $A_1$ . En effet, ils restent inaltérés si l'on change arbitrairement la courbe ( $k$ ), comme cela résulte de la proposition suivante, † appartenant à la théorie générale des fonctions algébriques :

*Soient ( $k$ ), ( $k'$ ) deux courbes algébriques se correspondant point par point; à un cycle ( $k_1$ ) de l'une correspond un seul cycle ( $k'_1$ ) de l'autre. Soient  $\lambda$ ,  $\lambda'$  les ordres de multiplicité de deux cycles correspondants: à un point placé sur ( $k_1$ ) à distance infiniment petite d'ordre  $\lambda$  de l'origine de ce cycle correspond un point placé sur ( $k'_1$ ) à distance infiniment petite d'ordre  $\lambda'$  de l'origine de ce dernier cycle.*

\* *Mathematische Annalen*, T. vi. p. 4.

† *Bulletin de la Société Math. de France*, T. iv. p. 32.

J'appellerai le nombre  $m$  l'ordre et le nombre  $n$  la classe de la conique dégénérée. On peut résumer comme il suit la définition de ces deux nombres :

Soit  $(k)$  une courbe dont les points  $k$  correspondent uniformément aux coniques  $a$  d'un système  $(a)$ . Soit  $K$  un point de cette courbe, et soit aussi  $(k_1)$  un cycle de branches ayant son origine en  $K$ , et d'ordre de multiplicité  $\lambda$ . Prenons, sur ce cycle, à distance infiniment petite l'ordre  $\lambda$  un point  $k$ , et soit  $a$  la conique qui correspond à ce point. Soit  $\frac{1}{2}m$  l'ordre infinitésimal du segment intercepté par  $a$  sur une droite arbitraire, et  $\frac{1}{2}n$  l'ordre infinitésimal de l'angle des tangentes menées à  $a$  par un point arbitraire. Les nombres  $m, n$  ne changent pas si l'on change la courbe  $(k)$ . Ils seront appelés, le premier l'ordre, le second la classe de la conique dégénérée  $a$ .

D'après cette définition, il n'est plus besoin de considérer trois modes de dégénérescence des coniques, mais un seul; car le mode  $A$  de dégénérescence correspond au cas où l'ordre est nul, et le mode  $A'$  au cas où la classe est nulle. Enfin, suivant le raisonnement du No. 6, on aperçoit que dans deux systèmes corrélatifs, l'ordre d'une conique dégénérée de l'un quelconque d'entre eux est égal à la classe de la conique dégénérée correspondante dans l'autre.

9. Pour bien préciser ces notions, prenons immédiatement un exemple que suggère naturellement le mode actuel d'exposition. Envisageons un système composé de coniques (2) conjuguées par rapport à un triangle fixe  $qrs$ , et, en outre, unicursal; c'est-à-dire que les rapports des variables  $g$  sont des fonctions rationnelles d'une variable indépendante  $\omega$ . Il est manifeste qu'on peut choisir cette variable  $\omega$  de telle sorte, 1°, qu'en égalant chacun des  $g$  à un polynôme entier en  $\omega$ , les trois polynômes soient d'un même degré; 2°, qu'à chaque système de valeurs des  $g$  ne corresponde qu'une seule valeur de  $\omega$ . Enfin il ne doit exister aucune racine commune à la fois aux trois polynômes, puisqu'il ne s'agit que des rapports des quantités  $g$ .

Ceci entendu, on aperçoit immédiatement qu'à une racine n'appartenant qu'à un seul polynôme correspond une conique dont la classe est précisément l'ordre de multiplicité de cette racine, et dont l'ordre est nul, ou, en d'autres termes, une conique dégénérée suivant le mode  $A$ . A une racine commune à deux polynômes et  $y$  ayant le même ordre de multiplicité, correspond une conique dégénérée suivant le mode  $A'$ , c'est-à-dire dont la classe est nulle et dont l'ordre est égal à l'ordre de multiplicité de la racine. Enfin, d'une manière générale, à une racine multiple d'ordre  $m$  dans un des polynômes, et d'ordre  $m+n$  dans un autre, correspond une conique dégénérée d'ordre  $m$  et de classe  $n$ .

Dans cet exemple où l'on peut créer des coniques dégénérées en aussi grand nombre qu'on voudra, il est à remarquer que toutes celles

du mode B se superposent à un nombre limité d'entre elles, sans que cependant il y ait aucune difficulté à les distinguer les unes des autres.

III. *Nombres caractéristiques relatifs à une condition pour une conique.*

10. Ainsi que je l'ai montré plus haut (No. 2), une condition quelconque  $\Phi$  pour une conique peut être envisagée comme une relation numérique entre cette conique et quatre points  $t, u, v, w$ , cette relation étant, en outre, projective. Supposons-la exprimée au moyen des coefficients de l'équation ponctuelle de la conique. Alors  $\Phi$  est représentée par l'évanouissement d'un covariant de  $a_x^2$ , contenant les coordonnées de quatre points indépendants. Quelques-uns de ces points peuvent y manquer. S'ils manquent tous, on a un invariant de  $a_x^2$ , c'est-à-dire son discriminant. Je le mets de côté, et il demeure entendu qu'il ne s'agit ici que de covariants. En outre, l'équation  $\Phi = 0$ , entière par rapport aux coordonnées de  $t, \dots, w$  et aux coefficients de  $a_x^2$ , doit être indécomposable en facteurs de même forme. En d'autres termes, il s'agit de conditions indécomposables.

Dans l'équation  $\Phi = 0$  supposons que le triangle de référence soit conjugué par rapport à la conique  $a$ , c'est-à-dire supprimons tous les termes contenant les coefficients des rectangles,  $a_{12}, \dots$ . Comme ci-dessus, appelons  $g$  les coefficients des trois carrés; groupons les termes par rapport à ces quantités; designant par  $\Phi_1$  ce que devient  $\Phi$ , écrivons alors :

$$(3) \dots \dots \dots \Phi_1 = \Sigma H g_1^\pi g_2^\chi g_3^\sigma.$$

Les coefficients tels que  $H$  sont des fonctions des coordonnées de  $t, u, v, w$ . Comme  $\Phi$  est un covariant, il est visible que  $\Phi_1$  est symétrique par rapport aux  $g$ , quant aux exposants, c'est-à-dire qu'au terme mis en évidence dans (3) correspondent, comme existant effectivement, ceux qui s'en déduisent par la permutation des exposants, le coefficient  $H$  étant d'ailleurs changé. Considérons l'ensemble de ces divers termes, et caractérisons-le par les exposants, en l'appelant le groupe  $(\pi, \chi, \sigma)$ , et convenant de supposer  $\pi \geq \chi \geq \sigma$ . Entre ces trois nombres existe d'ailleurs la relation

$$(4) \dots \dots \dots \pi + \chi + \sigma = c = \text{constante.}$$

Ce sont ces groupes d'exposants qui vont jouer ici le rôle prépondérant, et je dois entrer dans quelques détails à leur sujet.

11. Parmi les groupes  $(\pi, \chi, \sigma)$ , il en est un au moins pour lequel  $\sigma$  est nul. Sans quoi,  $\Phi_1$  contiendrait le facteur  $g_1 g_2 g_3$ , et, par suite,  $\Phi$  contiendrait en facteur le discriminant de  $a_x^2$ , ce qui est contre l'hypothèse.

En même temps que  $\Phi$ , considérons une condition corrélatrice  $\Phi'$ . On pourra exprimer cette condition en remplaçant dans  $\Phi$  les coefficients de l'équation ponctuelle de la conique par ceux de l'équation tangentielle, en même temps que les coordonnées de  $t, u, v, w$  par les coordonnées de quatre droites. On aura donc  $\Phi'_1$  en remplaçant, dans  $\Phi_1$ , les  $g$  par leurs inverses, et chassant les dénominateurs. Pour obtenir le résultat définitif, imaginons d'abord que nous multiplions par  $(g_1, g_2, g_3)^c$ . Alors au terme  $g_1^\pi g_2^\chi g_3^\sigma$  correspond le terme  $g_1^{c-\pi} g_2^{c-\chi} g_3^{c-\sigma}$ . Si  $\Pi$  est le maximum de  $\pi$ , l'équation obtenue contient alors le facteur  $(g_1, g_2, g_3)^{c-\Pi}$ . Ce facteur doit être supprimé. Si l'on pose alors :

$$\beta = \text{minimum de } (\chi + \sigma), \quad \Pi = c - \beta,$$

on trouve qu'au groupe  $(\pi, \chi, \sigma)$  correspond le groupe  $(\pi', \chi', \sigma')$  ainsi défini :

$$(5) \dots\dots\dots \begin{cases} \pi' = \pi + \chi - \beta, \\ \chi' = \pi + \sigma - \beta, \\ \sigma' = \chi + \sigma - \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} c' = \pi' + \chi' + \sigma' = 2c - 3\beta, \\ \pi' \geq \chi' \geq \sigma'. \end{cases}$$

On passera de même de  $(\pi', \chi', \sigma')$  à  $(\pi, \chi, \sigma)$  par des équations analogues :

$$(6) \dots\dots\dots \begin{cases} \pi = \pi' + \chi' - a, \\ \chi = \pi' + \sigma' - a, \\ \sigma = \chi' + \sigma' - a, \end{cases} \quad \begin{cases} c' = 2a + \beta, \\ c = 2\beta + a. \end{cases}$$

Ces équations conduisent à définir autrement les groupes d'exposants, en introduisant les nombres qui s'échangent entre eux par dualité. On considérera pour  $\Phi$  les deux nombres  $a, \beta$  et pour chaque groupe de termes les deux nombres  $\sigma, \sigma'$ . On dira alors, au lieu du groupe  $(\pi, \chi, \sigma)$ , le groupe  $(\sigma, \sigma')$ . On aura d'ailleurs d'après (5) et (6)

$$(7) \dots\dots\dots \chi = \sigma' - \sigma + \beta, \quad \pi = a + \beta - \sigma',$$

et on remarquera que la condition  $\sigma \geq \chi \geq \sigma$  donne :

$$(8) \dots \beta \geq \text{maximum de } (2\sigma - \sigma'), \quad a \geq \text{maximum de } (2\sigma' - \sigma).$$

12. Parmi les groupes  $(\sigma, \sigma')$ , quelques-uns sont à distinguer comme devant seuls jouer un rôle. Ce sont ceux que l'on peut appeler *minima*. Je dirai qu'un groupe  $(\sigma_1, \sigma'_1)$  est *non-minimum* s'il en existe un autre  $(\sigma, \sigma')$  tel que l'on ait à la fois

$$\sigma < \sigma_1, \quad \sigma' < \sigma'_1,$$

une des deux inégalités pouvant se réduire à l'égalité. Tous les groupes non-minima éliminés, il en reste quelques-uns. Ce sont les derniers que j'appelle *minima*. On peut les obtenir ainsi : rangeons les divers groupes dans l'ordre croissant relativement à  $\sigma$ . Parmi ceux où  $\sigma$  est le même, prenons seulement celui où  $\sigma'$  est le plus petit, et omettons les autres. Puis, dans ceux qui restent, ne retenons que ceux qui se trou-



vent, à partir du premier, rangés par rapport à  $\sigma'$  dans l'ordre décroissant. Les groupes qui restent sont minima. Comme on l'a observé (No. 11), une des valeurs de  $\sigma$  est zéro. Il en est de même de  $\sigma'$ . Les groupes minima ainsi rangés forment donc une suite telle que

$$(9) \dots\dots\dots (0 \sigma'_0) (\sigma_1 \sigma'_1) (\sigma_2 \sigma'_2) \dots (\sigma \sigma') \dots (\sigma_k 0),$$

$$\sigma_i < \sigma_{i+1}, \quad \sigma'_i > \sigma'_{i+1},$$

et, en outre, les inégalités (8) ont lieu.

13. Je vais maintenant montrer que si l'on donne à volonté la suite (9) et les deux nombres  $\alpha, \beta$  satisfaisant aux inégalités (8), il existe des covariants  $\Phi$  ayant les nombres caractéristiques  $\alpha, \beta$  et les groupes minima donnés.

Je prouve cette proposition en formant un tel covariant  $\Phi$  comme il suit. Soit  $P(\rho)$  une fonction homogène, de degré  $\rho$ , des coefficients de  $a_x^2$ , et à coefficients arbitraires. Soit de même  $\Pi(\rho)$  une fonction homogène, de degré  $\rho$ , des coefficients de l'équation tangentielle de la conique, équation dont le premier membre est représenté par le symbole  $(ab\xi)^2$ . Soit enfin  $D$  le discriminant de  $a_x^2$ . Pour chacun des groupes donnés (9), par exemple pour le groupe  $(\sigma, \sigma')$ , considérons la fonction

$$(10) \dots\dots H(\sigma, \sigma') = D^\sigma \cdot \Pi(\beta - 2\sigma + \sigma') \cdot P(\alpha - 2\sigma' + \sigma),$$

dans laquelle, d'après (8), les degrés sont positifs, comme il convient. Pour chacun des groupes, nous varions, bien entendu, à volonté les coefficients des fonctions  $P$  et  $\Pi$ . Je fais maintenant

$$\Phi = \Sigma H(\sigma, \sigma'),$$

et je dis que la condition  $\Phi=0$  satisfait aux conditions demandées.

1°.  $\Phi$  est homogène par rapport aux coefficients de  $a_x^2$ . Car  $D$  est du 3<sup>me</sup> degré, les coefficients de l'équation tangentielle sont du 2<sup>d</sup> degré; donc le degré de  $H(\sigma, \sigma')$  est :

$$(11) \dots\dots\dots 3\sigma + 2(\beta - 2\sigma + \sigma') + \alpha - 2\sigma' + \sigma = 2\beta + \alpha.$$

Donc  $\Phi=0$  exprime une condition pour la conique  $a_x^2$ .

2°. Un changement de coordonnées tel que (1) n'altère pas la forme des fonctions envisagées, mais rend seulement leurs coefficients des fonctions de  $t, u, v, w$ . La forme de l'équation  $\Phi=0$  est donc inaltérée par une substitution homographique.

3°. Les groupes minima de  $\Phi$  coïncident avec la suite (9), et les nombres caractéristiques sont  $\alpha, \beta$ . C'est là le point le plus important à prouver. L'égalité (11) prouve déjà que le degré de  $\Phi$  est  $(2\beta + \alpha)$ . Si maintenant on remplace dans  $\Phi$  les coefficients  $a$  de l'équation ponctuelle par ceux  $\alpha$  de l'équation tangentielle, il faut comme on sait remplacer

	$a_{ij},$	$\alpha_{ij},$	$D$
par	$\alpha_{ij},$	$Da_{ij},$	$D^2.$

Les degrés de  $P$  et  $\Pi$  dans (10) s'échangent entre eux, et  $D$  est affecté de l'exposant  $(\beta + \sigma')$ , dont le minimum est  $\beta$ . Le facteur  $D^{\sigma}$  supprimé, on a le degré de  $\Phi'$  en transposant les lettres dans celui de  $\Phi$ . Donc le degré  $\sigma'$  de  $\Phi'$  est  $(2\alpha + \beta)$ . Donc  $\alpha, \beta$  sont bien les nombres caractéristiques de  $\Phi$  que définissent les équations (5) et (6).

En ce qui concerne les groupes minima de  $\Phi$ , annulons, conformément au No. 10, les coefficients des rectangles de  $a^2$ , et remplaçons les coefficients des carrés par les lettres  $g$ . Au lieu de (10) nous pouvons alors écrire :

$$(11) \dots H_1(\sigma, \sigma') = (g_1 g_2 g_3)^{\sigma} (g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6)^{(\beta - 2\sigma + \sigma')} \times (g_1 g_2 g_3)^{(\alpha - 2\sigma' + \sigma)}$$

Dans ce produit il existe évidemment un groupe de termes dans lesquels les exposants sont, en ordre croissant,  $\sigma, \beta - \sigma + \sigma', \alpha + \beta - \sigma'$ , c'est-à-dire, d'après (7), un groupe  $(\sigma, \sigma')$ . Il reste à montrer que, relativement à tous les autres groupes déduits du même produit, le groupe  $(\sigma, \sigma')$  est minimum. Or deux lettres au moins, dans un terme quelconque, ont simultanément des exposants non inférieurs à la somme  $(\beta - \sigma + \sigma')$  des deux premiers exposants dans (11). Soit donc  $(\sigma_1, \sigma'_1)$  un autre groupe déduit de (11). L'exposant moyen  $\chi$ , dans ce groupe, est, suivant (7),  $\beta - \sigma_1 + \sigma'_1$ . Il n'est pas moindre que  $\beta - \sigma + \sigma'$ . Donc :

$$\sigma_1 - \sigma_1 \geq \sigma' - \sigma$$

Mais aucune lettre ne peut avoir un exposant moindre que  $\sigma$ . Donc  $\sigma_1$  est au moins égal à  $\sigma$ . Donc aussi, d'après la dernière inégalité,  $\sigma'_1$  n'est pas moindre que  $\sigma'$ . Donc le groupe  $(\sigma_1, \sigma'_1)$  différent de  $(\sigma, \sigma')$  n'est pas minimum. Donc  $(\sigma, \sigma')$  est le seul groupe minimum provenant de  $H(\sigma, \sigma')$ ; ce qui démontre la proposition annoncée.

14. On peut former d'une manière plus géométrique un covariant  $\Phi$  ayant des groupes minima choisis à volonté. A cet égard, je me contenterai ici d'un énoncé facile à démontrer au moyen des résultats du No. 13.

Soit, sur une droite  $L$ , trois points donnés  $y, z, t$ ; soient  $x, x'$  les points où  $L$  est rencontrée par une conique  $a$ . Considérons les deux rapports anharmoniques  $(y, z, t, x)$  et  $(y, z, t, x')$ , et soit  $r$  leur différence.

Soit aussi, par un point  $l$ , trois droites données  $Y, Z, T$ ; soient  $X, X'$  les tangentes menées par  $l$  à  $a$ . Considérons de même la différence  $R$  des deux rapports anharmoniques  $(Y, Z, T, X)$ ,  $(Y, Z, T, X')$ .

Soit maintenant, pour une conique  $a$ , la condition

$$\Phi = f(r^2, R^2) = \Sigma A r^{2\tau'} R^{2\tau} = 0,$$

$f$  étant un polynôme entier. Les groupes d'exposants minima  $(\sigma, \sigma')$  de la condition  $\Phi$  coïncident avec les groupes minima formés avec les nombres  $r$  et  $r'$ . Les nombres  $\alpha, \beta$  sont égaux respectivement au double du maximum de  $\tau'$  et de  $\tau$ .

On peut, dans l'énoncé de cette dernière condition, substituer à  $r$  la longueur de la corde interceptée par  $a$  sur  $L$ , et à  $R$  le sinus ou la tangente trigonométrique de l'angle des tangentes issues de  $L$ . Les conclusions ne seront pas altérées. Mais, de la sorte, la condition n'est plus énoncée sous forme projective.

15. Revenons maintenant à la considération d'un covariant  $\Phi$  quelconque, et de la fonction  $\Phi$ , qui s'en déduit (No. 10). Les coefficients  $H$  de cette fonction dépendent des arbitraires  $t, u, v, w$ . Si, comme on en est convenu (No. 3), on laisse ces arbitraires indéterminées, les quantités  $H$  jouissent de la propriété suivante, qu'il est essentiel de mentionner pour la rigueur des démonstrations subséquentes :

*Entre les quantités  $H$  il n'existe aucune relation linéaire et homogène identique*

$$(12) \dots\dots\dots pH + p'H' + p''H'' + \dots = 0,$$

dans laquelle  $p, p', p'' \dots$  soient des constantes indépendantes de  $t, u, v, w$ .

Pour le prouver, rappelons-nous comment  $\Phi$  a été supposé déduit d'une équation quelconque à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation d'une conique. C'est en faisant dans cette équation le changement de coordonnées (1). Or il est visible que ceci revient à remplacer dans les coefficients  $a_{ij}$ , symboliquement écrits  $a_i a_j$ , les symboles

$$\begin{array}{ccc} a_1, & a_2, & a_3 \\ \text{par} & (tuv) a_u, & (tuv) a_v, \quad (tuv) a_w. \end{array}$$

Puis, pour obtenir  $\Phi_1$ , on supprime les termes qui contiennent les coefficients des rectangles, et on remplace les coefficients des carrés par les lettres  $g$ . D'après cette observation, on se convaincra aisément que la quantité  $H$ , coefficient du terme mis en évidence dans (3), est par rapport aux lettres  $u, v, w$  affectées de l'indice 1 (en appelant  $u_1, u_2, u_3$  les coordonnées de  $u, \dots$ ), homogène et du degré  $2c + 2\pi$ ; par rapport à ces mêmes lettres, affectées de l'indice 2, du degré  $2c + 2\chi$ ; et par rapport à ces lettres affectées de l'indice 3, du degré  $2c + 2\sigma$ . Donc les coefficients  $H$  de deux termes qui diffèrent entre eux par les exposants des  $g$ , diffèrent eux-mêmes par leur composition en égard aux indices des lettres  $u, v, w$ . Donc l'identité (12) est impossible.

IV. *Du nombre des coniques d'un système, qui satisfait à une condition.*

16. Comme je l'ai annoncé au No. 4, je vais traiter le problème pour un cas particulier. La condition  $\Phi$  sera quelconque, mais le système sera un de ceux dont la définition a été donnée au No. 9; il sera composé de coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et unicur-

sal. Les trois quantités  $g$  sont alors des polynômes entiers d'une variable  $\omega$ , et d'un même degré. Remplaçant les  $g$  par ces polynômes dans  $\Phi_1$ , j'ai un nouveau polynôme entier en  $\omega$ , dont les racines répondent aux coniques du système qui satisfont à  $\Phi$ . La question proposée (No. 3) est donc ici ramenée à la discussion des racines de ce polynôme.

J'examinerai d'abord quelles sont les racines indépendantes des arbitraires  $t, u, v, w$  de la condition  $\Phi$ , et quel est leur nombre. Je démontrerai ensuite que les autres racines sont simples; elles répondent, comme on sait, aux véritables solutions cherchées. Le nombre de ces racines sera donc celui des solutions. J'obtiendrai d'ailleurs le nombre de ces racines comme la différence entre le degré du polynôme et le nombre des racines de la 1<sup>ère</sup> catégorie.

17. Soit  $\Omega$  une racine du polynôme, que je continuerai à désigner par  $\Phi_1$ ; et supposons que cette racine ne varie pas avec  $t, u, v, w$ . En désignant par  $p$  la valeur de  $g_1^\pi g_2^\chi g_3^\sigma$  (No. 10) pour  $\omega = \Omega$ , et de même par  $p', p'' \dots$  les valeurs des autres termes, on a, d'après l'hypothèse :

$$pH + p'H' + p''H'' + \dots = 0,$$

qui doit être une identité. D'après le No. 15, cette identité est impossible. Donc  $p, p', p'' \dots$  sont nuls séparément. Mais, parmi ces quantités, il en est qui ne contiennent pas le facteur  $g_1 g_2 g_3$  (No. 11). Donc deux au moins des quantités  $g$  sont nulles. D'ailleurs les trois  $g$  ne sont pas nuls à la fois (No. 9). Donc la racine  $\Omega$  correspond à une conique dégénérée dans le mode  $A'$  ou le mode  $B$ , ce qui est conforme aux observations du No. 4. Il s'agit maintenant de calculer l'ordre de multiplicité de cette racine. Soient  $m, m+n$  les ordres de multiplicité de la racine  $\Omega$  dans deux des polynômes  $g$ . Parmi les termes du groupe  $(\pi, \chi, \sigma)$  (No. 10), celui qui contient le facteur  $(\omega - \Omega)$  avec l'exposant le moindre, le contient au degré  $\sigma(m+n) + \chi m$ . Si maintenant, comme au No. 12, on introduit au lieu de  $\pi, \chi, \sigma$  les nombres  $\alpha, \beta, \sigma, \sigma'$ , on a d'après (7) :

$$\sigma(m+n) + \chi m = \sigma(m+n) + (\sigma' - \sigma + \beta)m = \sigma n + \sigma' m + \beta m.$$

Si donc, considérant les divers groupes  $(\sigma, \sigma')$  de  $\Phi_1$ , on pose

$$(13) \dots \dots \dots \gamma = \text{minimum de } (\sigma n + \sigma' m),$$

on en conclut que  $\Phi_1$  contient le facteur  $(\omega - \Omega)$  au moins au degré  $\beta m + \gamma$ . Mais je dis aussi que  $\Phi_1$  ne contient pas ce facteur à un degré plus élevé. En effet, ce facteur étant supprimé  $(\beta m + \gamma)$  fois, il reste dans  $\Phi_1$  des termes qui séparément ne contiennent plus le facteur  $(\omega - \Omega)$ . L'ensemble de ces termes ne peut pas le contenir de nouveau; car en faisant  $\omega = \Omega$ , on aurait encore une identité telle que (12), et

qui est impossible, quand  $t, u, v, w$  restent indéterminés. Ainsi l'ordre de multiplicité de la racine  $\Omega$  dans  $\Phi_1$  est précisément  $\beta m + \gamma$ .

Que l'on prenne successivement chacune des racines  $\Omega$  qui appartiennent à deux des polynômes  $g$ , et que pour chacune d'elles on forme le nombre analogue à  $\gamma$ , que l'on fasse ensuite la somme  $\Gamma$  de ces nombres  $\gamma$ ; que l'on désigne ensuite par  $M$  la somme des nombres  $m$ , c'est-à-dire la somme des ordres de multiplicité de ces racines  $\Omega$  pris pour chacune d'elles dans celui des deux polynômes  $g$  où cette racine entre effectivement, mais le moins de fois; la somme des ordres de multiplicité de ces racines  $\Omega$  dans  $\Phi_1$  est égale à  $\beta M + \Gamma$ .

On remarquera: 1°, que les nombres  $m, n$  sont l'ordre et la classe de la conique dégénérée qui répond à  $\omega = \Omega$ ; 2°, que les groupes minima  $(\sigma, \sigma')$  de  $\Phi_1$  concourent seuls à former les nombres tels que  $\gamma$ , ce qui justifie l'introduction des groupes minima dont j'ai parlé plus haut; 3°, parmi les valeurs de  $\sigma, \sigma'$  il y a toujours les valeurs zéro. Donc, si l'un des nombres  $m, n$  est nul,  $\gamma$  l'est aussi, c'est-à-dire que les coniques dégénérées suivant le mode  $B$  concourent seules à la formation du nombre  $\Gamma$ ; 4°, enfin, si  $\Phi_1$  ne contient qu'un seul groupe minimum, qui est alors  $(0, 0)$ ,  $\gamma$  est toujours nul, et par suite aussi  $\Gamma$ .

18. Démontrons maintenant que les autres racines du polynôme entier  $\Phi_1$  sont simples. S'il en était autrement, ce polynôme pourrait se décomposer en  $\Psi^2\Theta$ ,  $\Psi$  et  $\Theta$  ayant pour coefficients des fonctions entières des coefficients de  $\Phi_1$ , par suite des fonctions entières des coordonnées de  $t, u, v, w$ . Ainsi  $\Phi_1$  se décomposerait de la sorte toutes les fois qu'on y mettrait pour la conique qui y figure une conique du système envisagé; par suite, en raisonnant comme au No. 4, on en conclurait que cette décomposition a lieu pour une conique quelconque. Donc la condition  $\Phi$  serait décomposable, ce qui est contre l'hypothèse.

19. Les trois polynômes  $g$  sont, par hypothèse, d'un même degré  $a$ . En conséquence, le degré le plus élevé des termes de  $\Phi_1$  est  $a(\pi + \chi + \sigma)$  ou (Nos. 10 et 11)  $a(2\beta + a)$ . C'est précisément le degré de  $\Phi_1$ ; car un abaissement de ce degré exigerait une identité telle que (12) et qui est impossible. Donc le nombre des racines variables avec  $t, u, v, w$  est:

$$N = a(2\beta + a) - \beta M - \Gamma = aa + \beta(2a - M) - \Gamma.$$

Pour obtenir la signification géométrique des nombres  $a$  et  $(2a - M)$  qui dépendent du système seul, il suffit de choisir deux exemples:

1°. Soit  $\Phi$  la condition de passer par un point  $u$ . On a alors:

$$\Phi_1 = g_1u_1^2 + g_2u_2^2 + g_3u_3^2.$$

Ici (Nos. 10 et 11)  $a = 1, \beta = 0$ ; et il y a un seul groupe d'exposants

minima  $(0, 0)$ . Donc  $\Gamma = 0$ . Si donc  $\mu$  est le nombre des coniques du système qui passent par le point arbitraire  $u$ , on a  $\mu = a$ .

2°. Envisageons maintenant la condition corrélatrice, toucher une droite. D'après le No. 11, il suffit d'échanger  $\alpha, \beta$  et  $\sigma, \sigma'$ . Donc  $\Gamma = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Donc, si  $\nu$  est le nombre des coniques qui touchent une droite arbitraire, on a  $\nu = 2a - M$ . La formule devient ainsi

$$(14) \dots\dots\dots N = \alpha\mu + \beta\nu - \Gamma,$$

et satisfait explicitement au principe de dualité. Dans cette formule, les éléments relatifs à la condition  $\Phi$  ont été ici définis pour une condition quelconque. La démonstration précédente a trait à un système particulier. Mais j'ai donné (Nos. 7 et 8) les définitions des nombres  $m, n$  relatifs à une conique dégénérée d'un système quelconque; d'autre part, les caractéristiques  $\mu, \nu$  ont une définition qui s'applique aussi à un système quelconque. Il n'y a donc aucune difficulté à appliquer à un tel système la formule (14). J'énonce ici, sans le démontrer, que cette application est légitime, et je renvoie, comme je l'ai dit précédemment, pour cette extension à un mémoire plus étendu qui sera publié ultérieurement.

20. Deux cas particuliers de la formule (14) sont à signaler, en se conformant aux remarques du No. 17.

**THÉORÈME I.**—*Si un système de coniques, dont les caractéristiques sont  $\mu, \nu$ , ne contient aucune conique dégénérée suivant le mode B, le nombre des coniques de ce système qui satisfont, d'autre part, à une condition projective quelconque, dont les arbitraires restent indéterminées, est  $\alpha\mu + \beta\nu$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux nombres entiers qui ne dépendent que de cette condition.*

*Remarque.*—Les nombres  $\alpha, \beta$  ont été définis par une représentation algébrique de la condition (No. 11); mais le théorème I en donne maintenant une définition géométrique, que l'on obtiendra en appliquant ce théorème à la condition envisagée et à deux systèmes différents, qui n'aient point de coniques dégénérées du mode B.

Le second cas particulier à signaler est celui où la fonction  $\Phi$ , ne contient qu'un groupe minimum  $(0, 0)$ . Dans ce cas, la formule (14) se réduit encore à  $\alpha\mu + \beta\nu$ , quel que soit le système. Pour substituer à ce critérium algébrique un critérium géométrique, il suffit de considérer un système particulier contenant une conique dégénérée du mode B. En se plaçant à ce point de vue, on verra aisément que l'on peut dire :

**THÉORÈME II.**—*Soit S le faisceau des coniques qui ont, en un point donné, des contacts du 3<sup>m</sup>e ordre avec une courbe donnée. Si le nombre des coniques de ce faisceau, qui satisfont à une condition  $\Phi$  est  $\alpha + \beta$ , le nombre des coniques d'un système quelconque  $(\mu, \nu)$  qui satisfont à cette même condition  $\Phi$  est toujours  $\alpha\mu + \beta\nu$ .*

Ajoutons maintenant que : *Si un système S envisagé ne satisfait pas à la restriction énoncée au Th. I, et si une condition  $\Phi$  ne satisfait pas à la restriction énoncée au Th. II, le nombre des coniques de S qui satisfont à  $\Phi$  est inférieur à  $\alpha\mu + \beta\nu$ , et en diffère d'un terme complémentaire  $\Gamma$ .*

21. Il reste maintenant à donner à ce terme complémentaire  $\Gamma$  une forme géométrique. Imaginons une fonction entière  $\Psi$  de deux variables  $x, y$ , ainsi composée

$$\Psi = \sum A x^\sigma y^{\sigma'}$$

les coefficients  $A$  y étant arbitrairement choisis, et les exposants  $\sigma, \sigma'$  étant les exposants minima de  $\Phi_1$ . L'équation  $\Psi = 0$  représente, en coordonnées rectilignes, une courbe qui passe à l'origine des coordonnées, sauf au cas où existe le groupe  $(0, 0)$ . Dans tout autre cas, la nature de ses branches à l'origine des coordonnées définit complètement les groupes minima  $(\sigma, \sigma')$ , et en donne une *image*. Appelons cette courbe  $\Psi$  *attachée* à la condition  $\Phi$ .

Envisageons maintenant le cycle de branches de courbe représentés par les équations :

$$(15) \dots\dots\dots x = \omega^n f(\omega), \quad y = \omega^m \phi(\omega),$$

où  $f$  et  $\phi$  sont des développements arbitraires suivant les puissances entières et ascendantes de  $\omega$ , commençant par des termes de degré zéro. Le nombre des intersections des branches de ce cycle et de  $\Psi$ , réunies à l'origine des coordonnées est évidemment égal au minimum de  $(\sigma n + \sigma' m)$ . C'est justement l'expression (13) de l'élément  $\gamma$ . Composons donc une courbe  $\Sigma$  qui, pour chaque conique dégénérée, d'ordre  $m$  et de classe  $n$ , d'un système  $S$ , contienne un cycle de branches tel que (15). Alors le terme complémentaire  $\Gamma$  sera représenté par le nombre des points qu'ont en commun, à l'origine des coordonnées, les courbes  $\Psi$  et  $\Sigma$ . On peut varier à l'infini les courbes  $\Psi$  et  $\Sigma$  pour une même condition  $\Phi$  et un même système  $S$ , puisque c'est la nature de leurs branches autour d'un point qui seule intervient. Je prendrai, par exemple, les définitions suivantes :

*Pour chaque conique d'un système considérons les deux nombres  $R^2$  et  $r^2$  définis dans l'énoncé du No. 14, et prenons-les, le premier pour l'abscisse, le second pour l'ordonnée d'un point. La conique varie dans le système, ce point décrit une courbe, que nous dirons attachée au système. (On peut, suivant la remarque du No. 14, remplacer  $R$  et  $r$  par un sinus et une longueur.)*

*Soit une condition  $\Phi$  pour une conique. Supposons une conique conjuguée par rapport à un triangle  $abc$ ; soit  $p$  un des points où cette conique rencontre  $bc$ , et soit  $q$  un des points où elle rencontre  $ab$ . Pour cette*

conique, la condition peut s'exprimer par une relation  $\psi(x, y) = 0$  entre

$$x = \left(\frac{qa}{qb}\right)^2, \quad y = \left(\frac{pb}{pc}\right)^2.$$

La courbe représentée par l'équation  $\psi(x, y) = 0$  sera dite attachée à la condition  $\Phi$ .

Ces définitions posées, on peut dire alors :

**THÉORÈME III.**—*Le terme complémentaire relatif à un système et à une condition est égal au nombre des points qu'ont en commun à l'origine des coordonnées la courbe attachée au système et la courbe attachée à la condition.*

### V. Exemples.

22. Je vais donner ici quelques exemples du calcul de la formule (14) en envisageant des conditions  $\Phi$ , données sous des formes géométriques.

Je suppose que la condition  $\Phi$  consiste en une relation projective entre la conique  $a$  et une conique donnée  $b$ . Cette condition s'exprime, comme on sait, par une relation entre les coefficients du discriminant de  $a + \lambda b$ , et cette relation est homogène par rapport aux coefficients de  $a$ , ainsi que par rapport à ceux de  $b$ . Il en résulte aisément que cette relation peut aussi être envisagée comme une équation symétrique et homogène entre les trois racines  $\lambda, \lambda', \lambda''$  de ce discriminant, et réciproquement. Je suppose la relation mise sous cette dernière forme, et, sans la transformer, je vais faire le calcul de la formule (14) relatif à cette condition et à un système arbitraire.

En premier lieu, le degré de l'équation, par rapport à  $\lambda, \lambda', \lambda''$ , est aussi celui de  $\Phi$ . Soit  $c$  ce degré, on a déjà

$$2\beta + \alpha = c,$$

suivant les formules (6). Si  $a$  est une conique dégénérée, d'ordre  $m$  et de classe  $n$ , il est visible que deux des  $\lambda$  sont infiniment petits, l'un d'ordre  $m$ , l'autre d'ordre  $m+n$ , exactement comme les  $g$  (No. 8). Faisons donc  $\lambda$  infiniment petit d'ordre  $m+n$ ,  $\lambda'$  infiniment petit d'ordre  $m$ . Si le premier membre de l'équation devient ainsi infiniment petit d'ordre  $p$ , on aura

$$p = \beta m + \gamma.$$

En choisissant de diverses manières les nombres  $m, n$ , on déterminera ainsi  $\beta$  et les groupes  $(\sigma, \sigma')$  de la condition.

Dans beaucoup de cas, la relation entre les  $\lambda$  n'est pas immédiatement donnée sous forme symétrique. Quand il en est ainsi, on la rend



symétrique en faisant le produit des facteurs dissymétriques différents, obtenus par la permutation des lettres. Il est clair qu'alors on peut faire porter le calcul sur un seul facteur. Ces généralités admises, je prends des exemples concrets.

23. Soit d'abord pour  $\Phi$  la condition que  $a$  touche  $b$ . Cette condition s'exprime par  $\phi = \lambda - \lambda' = 0$ .

Il y a six facteurs analogues à multiplier entre eux. Donc :

$$2\beta + \alpha = 6.$$

On en pourrait déduire  $\alpha = \beta = 2$ ; car il est manifeste que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres égaux. Mais appliquons ici notre méthode. Le facteur  $\phi$  n'est infiniment petit que si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont tous deux infiniment petits; et si les ordres respectifs de  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont  $m+n$  et  $m$ ,  $\lambda - \lambda'$  est d'ordre  $m$ . Donc deux des six facteurs sont infiniment petits d'ordre  $m$ , les autres restent finis. Donc

$$\beta m + \gamma = 2m.$$

Donc  $\gamma$  est toujours nul, et  $\beta$  est égal à 2. Donc, suivant un théorème bien connu : le nombre des coniques d'un système  $(\mu, \nu)$  quelconque qui touchent une conique donnée est égal à  $2(\mu + \nu)$ . C'est un exemple du théorème II.

24. Soit  $r$  le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de  $a$  avec une conique fixe  $b$ , considérés sur  $a$ ; soit  $s$  le rapport anharmonique des quatre mêmes points, considérés sur  $b$ , dans le même ordre; et envisageons successivement les deux conditions définies, pour la conique  $a$ , par les équations  $\phi = s^p - k r^q = 0$ ,  $\psi = s^p r^q - k = 0$ ,

$k$  étant un nombre donné et  $p, q$  des entiers premiers entre eux.

A l'égard de la condition  $\phi$ , on trouvera sans peine, si  $p > q$ , que le facteur type est :

$$\phi = \lambda'^q (\lambda' - \lambda'')^{p-q} - k \lambda^q (\lambda - \lambda'')^{p-q}.$$

En raisonnant, comme au No. 23, on trouvera que

Si  $p > q$ , le nombre des coniques d'un système  $(\mu, \nu)$  quelconque, qui satisfont à la condition  $\phi$ , est  $(6p - 4q)\mu + 2q\nu$ ; et aussi,

Si  $p < q$ , ce nombre se change en  $2p\mu + (6q - 4p)\nu$ .

Ces deux nombres se réduisent de moitié si  $k = -1$ ; et, si  $k = 1$ , ils doivent être diminués de  $2(\mu + \nu)$  et ensuite divisés par 2. Ces deux circonstances proviennent de ce que, dans le premier cas,  $\phi$  est

symétrique en  $\lambda, \lambda'$ , et que, dans le second, il devient symétrique après suppression du facteur  $(\lambda - \lambda')$ .

Ainsi la condition  $\phi$  donne encore exemple du théorème II.

Mais il n'en est plus de même de la condition  $\psi$ . Le facteur type est alors

$$\psi = (\lambda' - \lambda'')^{p+q} \lambda^q - k (\lambda - \lambda'')^{p+q} \lambda'^q,$$

et l'on en tire les conclusions suivantes :

Soient  $\mu, \nu$  les caractéristiques d'un système  $S$ ,  $N'$  la somme des classes de celles des coniques dégénérées de  $S$  pour chacune desquelles le rapport de la classe à l'ordre est inférieur à  $p : q$ , et  $M''$  la somme des ordres des autres coniques dégénérées. Le nombre des coniques de  $S$  qui satisfont à la condition  $\Psi$  est :

$$6(p\mu + q\nu) - 2N'q - 2M''p.$$

On voit qu'ici il y a un terme complémentaire  $2(N'q + M''p)$  qui est nul dans le cas seulement où le système  $S$  ne contient aucune conique dégénérée suivant le mode B.

On remarquera encore que, si  $k = -1$ , le résultat doit être divisé par 2, et, si  $k = 1$ , il doit être diminué de  $2(\mu + \nu)$  puis divisé par 2.

25. Voici un dernier exemple où le calcul se fait d'une manière analogue. On donne deux coniques fixes  $b, c$ , et l'on envisage, pour une conique  $a$ , la condition que le rapport anharmonique de ses points d'intersection avec  $b$ , pris sur  $a$ , soit égal au rapport anharmonique de ses points d'intersection avec  $c$ , pris sur  $c$ .

Soient  $\lambda, \lambda', \lambda''$  les racines du discriminant de  $a + \lambda b$ , et aussi  $l, l', l''$  les racines du discriminant de  $a + \lambda c$ . Le facteur est ici :

$$\phi = \lambda(\lambda' - \lambda'')(l - l'') - \lambda'(\lambda - \lambda'')(l' - l'').$$

Il faut permuter entre elles les lettres  $\lambda$  et aussi les lettres  $l$ , ce qui donne 36 combinaisons. Mais, ainsi que je vais le montrer, 12 seulement de ces combinaisons sont distinctes, en sorte qu'on aura :

$$2\beta + \alpha = 3 \times 12 = 36,$$

d'où l'on pourrait déjà conclure  $\alpha = \beta = 12$ .

Si l'on désigne par  $r, s$  les deux rapports anharmoniques, on obtiendra six facteurs distincts en donnant successivement à  $s$  six déterminations distinctes sans altérer  $r$ . Ces six facteurs dérivent donc de  $(r - s)$  par le changement de  $s$  seulement. Puis en changeant successivement  $r$  on aura six groupes de six facteurs chacun. Mais trois de ces groupes contiennent l'expression  $(r - s)$  et trois autres l'expression  $(s - r)$ , comme on le voit en faisant le même changement à la fois sur  $r$  et sur  $s$  dans  $(r - s)$ . Donc il y a en tout 12 facteurs, savoir les 6 fac-

teurs qu'on déduit de  $(r-s)$  par le changement de  $s$  seul, puis 6 facteurs respectivement égaux et de signes contraires aux précédents. Il suffira donc d'opérer sur 6 facteurs déduits de  $(r-s)$  par changement de  $s$  seulement, et de doubler les résultats. Ainsi je n'ai qu'à permuer les lettres  $l$  dans  $\phi$  en supposant, par exemple :

$$\begin{aligned} \lambda, l & \text{ infiniment petits d'ordre } m+n, \\ \lambda', l' & \text{ " " " } m, \\ \lambda'', l'' & \text{ finis.} \end{aligned}$$

Il est évident que les facteurs seront d'ordre  $m$ , à moins que le second terme, qui contient déjà  $\lambda'(\lambda-\lambda'')$ , ne contienne  $(l-l')$ . Donc 4 facteurs sont d'ordre  $m$ , et il y a exception pour les deux suivants :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \lambda(\lambda'-\lambda'')(l''-l') - \lambda'(\lambda-\lambda'')(l-l'), \\ \phi_2 &= \lambda(\lambda'-\lambda'')(l''-l) - \lambda'(\lambda-\lambda'')(l'-l), \end{aligned}$$

qui sont d'ordre  $m+n$  ou d'ordre  $2m$  suivant que  $n$  est inférieur ou supérieur à  $m$ . Delà enfin la conclusion suivante :

*Soient, pour un système de coniques,  $\mu, \nu$  les caractéristiques,  $N'$  la somme des classes de celles des coniques dégénérées pour chacune desquelles la classe est inférieure à l'ordre, et  $M''$  la somme des ordres des autres coniques dégénérées. Le nombre des coniques de ce système qui satisfont à la condition ci-dessus est  $12(\mu+\nu) - 4(M''+N')$ .\**

Si, au lieu de cette condition, on envisageait celle qui consisterait en ce que les deux mêmes rapports anharmoniques fussent égaux et de signes contraires, on verrait immédiatement que le résultat précédent devrait être simplement réduit de moitié.

26. Pour que l'on se rende compte des circonstances qui s'offrent dans les exemples précédents, j'ajoute ici quelques considérations géométriques au sujet du rapport anharmonique de quatre points, pris sur une conique qui dégénère.

Soient 1, 2, 3, 4 les points d'intersection de deux coniques  $a, b$ , et I, II, III, IV les points de contact de  $b$  avec les tangentes communes à  $a$  et  $b$ . On sait que le point de rencontre de deux cordes conjuguées quelconques du premier système est aussi un point de rencontre de deux cordes conjuguées du second. En conséquence, si à un point d'un des systèmes on associe un des points de l'autre, en le choisissant d'ailleurs à volonté, il en résulte une association parfaitement déterminée

---

\* Dans ma communication du 13 Nov. 1876, adressée à l'Académie des Sciences, j'ai énoncé fautivement ce résultat, en le divisant à tort par 2.

entre les points des deux systèmes, association définie par cette condition que deux cordes conjuguées quelconques d'un des systèmes concourent avec leurs associées.

Ceci entendu, on a cette proposition : *le rapport anharmonique des quatre points 1, 2, 3, 4, considérés sur la conique a dans un ordre quelconque, est égal au rapport anharmonique des points I, II, III, IV sur la conique b, pris dans l'ordre correspondant par association.*

Supposons que  $a$ , faisant partie d'un système, dégénère suivant le 3<sup>m</sup>e mode. Soient  $D$  et  $d$  la droite et le point, limites de  $a$ , le point  $d$  sur la droite  $D$ ;  $p, q$  les points de rencontre de  $b$  et  $D$ ;  $r, s$  les points de contact de  $b$  avec les tangentes issues de  $d$ . Les coniques  $a$  et  $b$  ont en commun deux points 1, 2 infiniment voisins de  $p$ , et deux points 3, 4, infiniment voisins de  $q$ . Leurs tangentes communes ont avec  $b$  deux points de contact infiniment voisins de  $r$ , et deux points de contact infiniment voisins de  $s$ . Si deux points associés portent le même numéro, on voit aisément que, suivant la disposition des points 1, 2, 3, 4, le point I étant censé voisin de  $r$ , ce sera en même temps le point III ou le point IV qui sera aussi voisin de  $r$ . Dans le premier cas, le rapport anharmonique

$$(I, II, III, IV) = \frac{I \ II}{I \ III} \cdot \frac{III \ IV}{II \ IV}$$

croît au-delà de toute limite; dans le second, il a l'unité pour limite. En même temps, le rapport anharmonique associé (1, 2, 3, 4), considéré sur  $b$ , a zéro pour limite. Par suite, le tableau suivant montre que ces deux cas n'en font qu'un, et qu'aux deux valeurs zéro du rapport anharmonique de 1, 2, 3, 4 sur  $b$  correspondent les valeurs 1 et  $\infty$  du rapport anharmonique de I, II, III, IV.

$\omega$	$\frac{1}{\omega}$	$1-\omega$	$\frac{1}{1-\omega}$	$\frac{\omega-1}{\omega}$	$\frac{\omega}{\omega-1}$
0	$\infty$	1	1	$\infty$	0
1	1	0	$\infty$	0	$\infty$

Mais, d'après la proposition rappelée plus haut, les rapports anharmoniques de I, II, III, IV coïncident avec ceux de 1, 2, 3, 4 envisagés sur  $a$ . Donc on voit que le rapport anharmonique de ces derniers points, envisagé sur l'une des coniques, devenant zéro, il devient 1 ou  $\infty$  quand on l'envisage sur l'autre. C'est là ce qui explique les circonstances rencontrées dans les exemples précédents.

## VI. Des équivalents.

27. Jusqu'ici j'ai considéré exclusivement des conditions indécomposables. J'introduis maintenant des conditions composées. Soient

$\Phi' = 0, \Phi'' = 0, \dots$  diverses conditions. L'équation  $0 = \Phi = \Phi' \Phi'' \dots$  définit une condition composée, que l'on pourra dire la *somme* des composantes pour la raison suivante. Soit  $N'$  le nombre des coniques d'un système  $(a)$  qui satisfont à  $\Phi'$ ; soit  $N''$  le nombre des coniques de  $(a)$  qui satisfont à  $\Phi''$ ; ... soit enfin  $\Phi$  le nombre des coniques de  $(a)$  qui satisfont à  $\Phi$ ; on a  $N = N' + N'' + \dots$

Soient  $\Phi$  et  $\Phi_1$  deux conditions telles que le nombre des coniques d'un système  $(a)$  qui satisfont à l'une ou à l'autre soit le même, et que cette circonstance ait toujours lieu, quel que soit  $(a)$ . Je dirai que  $\Phi$  et  $\Phi_1$  sont deux conditions *équivalentes*.

28. Considérons, comme au No. 21, une courbe  $\Psi$  attachée à une condition  $\Phi$ , supposons cette courbe décomposée, à l'origine des coordonnées, en ses branches linéaires ou superlinéaires, et soient

$$x = t^p, \quad y = t^q f(t)$$

les équations qui représentent une de ces branches. La lettre  $f$  désigne un développement suivant les puissances entières et ascendantes de  $t$ , commençant par un terme constant; et  $p$  et  $q$  sont deux nombres entiers positifs. De plus, les coefficients  $A$  de l'équation qui définit  $\Psi$  (No. 21) restant indéterminés, on sait par la théorie des courbes algébriques que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux. Soient  $(p, q), (p', q') \dots$  les couples de nombres analogues, l'identité de deux couples étant d'ailleurs possible.

Pour l'objet actuel, on peut remplacer la courbe  $\Psi$  par la courbe composée

$$0 = \Psi_1 = (x^p - By^q)(x^{p'} - B'y^{q'}) \dots$$

En effet, en vertu de l'indétermination des coefficients  $A, B, \dots$  le nombre des intersections confondues à l'origine, avec une courbe quelconque, sera le même pour  $\Psi$  ou pour  $\Psi_1$ .

Or, d'après un résultat du No. 14,  $\Psi_1$  est composée des courbes attachées aux diverses conditions

$$r^{2q} = OR^{2p}, \quad r^{2q'} = O'R^{2p'}, \quad \dots$$

Désignons par  $(p, q)$  une telle condition *élémentaire*. Nous avons ce premier résultat, que la courbe attachée à  $\Phi$  est la superposition ou la *somme* des courbes attachées à plusieurs conditions élémentaires.

D'après le No. 14 encore, les nombres analogues à  $\alpha$  et  $\beta$  sont, pour la condition  $(p, q)$ , respectivement  $2q$  et  $2p$ . Donc, pour la condition  $\Phi_1$ , sommée de  $(p, q), (p', q'), \dots$ , on a :

$$\alpha_1 = 2(q + q' + \dots), \quad \beta_1 = 2(p + p' + \dots).$$

Mais, suivant le No. 12, ces deux derniers nombres sont précisément égaux respectivement à  $2\sigma_0$  et  $2\sigma_1$ . Si l'on fait

$$a = \alpha - \alpha_1, \quad b = \beta - \beta_1,$$

les inégalités (8) montrent alors que  $a$  et  $b$  sont des nombres positifs.

Designons par  $P$  et par  $D$  la condition, pour une conique, de passer par un point ou de toucher une droite; il résulte de ce qui précède l'équivalence  $\Phi \equiv aP + bD + (p, q) + (p', q') + \dots$

En effet, la condition composée, représentée par le second membre, a la même courbe attachée et les mêmes nombres  $\alpha, \beta$  que la condition  $\Phi$ . Donc elle lui est équivalente. Donc

**THÉORÈME IV.**—*Une condition quelconque est équivalente à la somme d'un nombre limité de conditions élémentaires.*

On peut dès lors remplacer les propositions précédentes par le Théorème IV et le suivant:

**THÉORÈME V.**—*Soit, dans un système, de caractéristiques  $\mu, \nu$ , une conique dégénérée d'ordre  $m$  et de classe  $n$ ; soit, pour cette figure,  $\gamma$  le plus petit des deux produits  $m\mu, n\nu$ . Soit enfin  $\Gamma$  la somme des nombres analogues à  $\gamma$  pour toutes les coniques dégénérées du système. Le nombre des coniques de ce système qui satisfont à la condition  $(p, q)$  est  $2(q\mu + p\nu) - \Gamma$ .*

On pourra conventionnellement mettre au nombre des conditions  $(p, q)$  les deux conditions  $P, D$ , en supposant:

$$P \equiv (0, \frac{1}{2}), \quad D \equiv (\frac{1}{2}, 0).$$

Pour tout autre cas,  $p, q$  seront des entiers premiers entre eux. La convention précédente a l'avantage de réduire à sa plus simple expression la formule qui donne le nombre des coniques satisfaisant à cinq conditions séparées, formule dont la recherche fait la suite naturelle du mémoire actuel.

29. Les exemples envisagés au paragraphe V revêtiront maintenant les formes suivantes:

Pour la condition  $\phi$  du No. 24, on aura:

$$\text{Si } p > q, \quad \phi \equiv (6p - 4q)P + 2qD.$$

$$\text{Si } p < q, \quad \phi \equiv 2pP + (6q - 4p)D.$$

Pour la condition  $\psi$  de ce même No. 24, on a:

$$\psi \equiv 2pP + 2qD + 2(q, p);$$

et pour celle du No. 25,

$$\Phi \equiv 4P + 4D + 4(1, 1).$$

Ces exemples me paraissent suffire à éclaircir les théories exposées dans ce mémoire.