# 41.

# Ueber die Functionen welche der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$ genugthun.

(Von Herrn *N. H. Abel.*)

---

Der Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

wird genug gethan, wenn

$$fy = \tfrac{1}{2}y \text{ und } \varphi x = \psi x = \log x$$

ist. Denn dieses giebt:

$$\log x + \log y = \log xy;$$

desgleichen, wenn

$$fy = \sqrt{(1-y^2)} \text{ und } \varphi x = \psi x = \arcsin x,$$

welches

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin[x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)}]$$

giebt.

Es wäre möglich, dafs ihr auch noch auf andere Weise genug gethan werden könnte. Dieses soll untersucht werden.

Man setze der Kürze wegen

$$xfy + yfx = r,$$

so ist die gegebene Bedingungsgleichung folgende:

$$1. \quad \varphi x + \varphi y = \psi r.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $x$ und nach $y$, so findet man, wenn man sich der Lagrangeschen Bezeichnung der Differential-Coefficienten bedient,

$$\varphi' x = \psi' r\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \text{ und } \varphi' y = \psi' r\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right).$$

Diese Gleichungen geben, wenn man die Gröfse $\psi' r$ eliminirt,

$$\varphi' x\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \varphi' y\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Der Ausdruck von $r$ aber giebt:

$$2. \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = fy + yf'x \text{ und } \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = fx + xf'y,$$

also wenn man substituirt,

$$3. \quad \varphi' y.(fy + yf'x) = \varphi' x.(fx + xf'y).$$

Man gebe nunmehr der veränderlichen Gröſse $y$ den einzelnen Werth 0, welches erlaubt ist, weil $x$ und $y$ von einander unabhängig sind, so findet man in (3.), wenn man der Kürze wegen

$$\varphi 0 = a, \quad f0 = \alpha, \quad f'0 = \alpha'$$

setzt:

$$a\alpha - \varphi' x(fx + \alpha' x) = 0,$$

woraus auch, wenn man $y$ statt $x$ schreibt,

$$a\alpha - \varphi' y(fy + \alpha' y) = 0$$

folgt. Diese beiden Gleichungen geben

$$4. \quad \varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x} \text{ und } \varphi' y = \frac{a\alpha}{fy + \alpha' y},$$

und wenn man, nachdem $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$ statt $\varphi' x$ gesetzt worden, integrirt,

$$5. \quad \varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{fx + \alpha' x}.$$

Die Function $\varphi x$ wird auf diese Weise durch $fx$ bestimmt. Es kommt also nur noch darauf an, $fx$ zu finden. Setzt man in die Gleichung (3.) statt $\varphi' x$ und $\varphi' y$ die Ausdrücke dieser Functionen (4.), so findet man, nachdem reducirt worden:

$$6. \quad (fx + \alpha' x)(fy + yf' x) - (fy + \alpha' y)(fx + \alpha f' y) = 0,$$

und dieses giebt, wenn man die Factoren multiplicirt,

$$7. \quad fxfy + \alpha' xfy + yfxf'x + \alpha' xyf'x - fxfy - \alpha' yfx - xfyf'y - \alpha' xyf'y = 0,$$

oder

$$8. \quad x(\alpha' fy - fyf'y - \alpha' yf'y) - y(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' xf'x) = 0,$$

oder, wenn man mit $xy$ dividirt,

$$9. \quad \frac{1}{y}(\alpha' fy - fyf'y - \alpha' yf'y) - \frac{1}{x}(\alpha' fx - fxf'x - \alpha' xf'x) = 0.$$

Die Gröſsen $x$ und $y$ sind aber von einander unabhängig; also kann diese Gleichung nicht anders Statt finden, als wenn

$$\frac{1}{y}(\alpha' fy - fyf'y - \alpha' yf'y) = \frac{1}{x}(\alpha' fx - fxf'x - \alpha' xf'x) = \text{Const. ist.}$$

Es sei also

$$10. \quad \frac{1}{x}(\alpha' fx - fxf'x - \alpha' xf'x) = m,$$

so erhält man:

$$11. \quad f'x(fx + \alpha' x) + (mx - \alpha' fx) = 0.$$

Durch diese Gleichung wird die Function $fx$ bestimmt. Sie kann integrirt werden, wenn man

$$fx = x.z$$

setzt. Denn alsdann ist

$$f'x \,.\, \partial x = z\,\partial x + x\,\partial z,$$

und man findet, wenn man substituirt,

$$(z\,\partial x + x\,\partial z)(xz + \alpha' x) + (mx - \alpha' xz)\,\partial x = 0,$$

welches, wenn man mit $x$ dividirt,

$$(z\,\partial x + x\,\partial z)(z + \alpha') + (m - \alpha' z)\,\partial x = 0,$$

oder

$$[z(z + \alpha') + m - \alpha' z]\,\partial \overset{x}{\cancel{z}} + x\,\partial z(z + \alpha') = 0$$

oder

$$(z^2 + m)\,\partial x + x\,\partial z(z + \alpha') = 0,$$

oder, wenn man mit $x(z^2 + m)$ dividirt,

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\partial z(z + \alpha')}{z^2 + m}$$

giebt.

Hiervon ist das Integral

$$\int \frac{\partial x}{x} = -\int \frac{z\,\partial z}{z^2 + m} - \alpha' \int \frac{\partial z}{z^2 + m}.$$

Es sei

$$m = -n^2,$$

so ist

$$\int \frac{\partial x}{x} = \log x, \quad \int \frac{z\,\partial z}{z^2 - n^2} = \tfrac{1}{2}\log(z^2 - n^2), \quad \int \frac{\partial z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{2n}\log\frac{z - n}{z + n},$$

also wenn man substituirt und eine willkürliche Constante $c$ hinzufügt,

$$\log c - \log x = \tfrac{1}{2}\log(z^2 - n^2) + \frac{\alpha'}{2n}\log\frac{z - n}{z + n}, \text{ oder}$$

$$\log\frac{c}{x} = \log\left[(z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, \left(\frac{z - n}{z + n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}\right],$$

woraus folgt:

$$\frac{c}{x} = (z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, \left(\frac{z - n}{z + n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}.$$

Es war aber $fx = xz$. Also ist $z = \frac{fx}{x}$, und folglich, wenn man substituirt:

$$\frac{c}{x} = \frac{[(fx)^2 - n^2 x^2]^{\frac{1}{2}}}{x} \,.\, \left(\frac{fx - nx}{fx + nx}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}, \text{ oder}$$

$$c = (fx - nx)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}} \,.\, (fx + nx)^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}},$$

oder, wenn man die $2n$ten Potenzen nimmt:

$$12. \quad c^{2n} = (fx - nx)^{n + \alpha'} \,.\, (fx + nx)^{n - \alpha'}.$$

$x = 0$ giebt $c = \alpha$, weil $f0 = \alpha$ war.

Dieses

Dieses also ist die Gleichung, von welcher die Function $fx$ abhängt. Sie ist nicht allgemein auflösbar, weil $n$ und $\alpha'$ zwei unbestimmte Gröfsen sind, welche selbst imaginair sein können.

Die Gleichung (12.) drückt die allgemeinste Form der Function $fx$ aus, und es läfst sich zeigen, dafs sie der gegebenen Bedingungs-Gleichung allgemein genug thut. In der That entspricht die Function $fx$ der Gleichung (11.), und aus der Form der Gleichung (9.) sieht man, dafs sie auch dieser genug thut. Aber die Gleichung (6.) ist die Gleichung (9.) in veränderter Gestalt. Also thut $fx$ auch der Gleichung (6.) genug. Aus der Gleichung (6.) aber findet man die Gleichung (3.), wenn man $\varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x}$ setzt, und die Gleichung (3.) giebt, wenn man $xfy + yfx = r$ setzt:

$$\varphi' x \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \varphi' y \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) = 0.$$

Integrirt man diese partielle Differential-Gleichung nach den bekannten Regeln, so findet man:

$$r = F(\varphi x + \varphi y),$$

und hieraus

$$\varphi x + \varphi y = \psi r, \text{ oder}$$
$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

welches die gegebene Bedingungs-Gleichung ist.

Es ist noch übrig die Function $\psi$ zu finden. Zu dem Ende sei $y = 0$, so findet man, weil $f0 = \alpha$,

$$\varphi x = \psi(\alpha x) - \varphi 0,$$

oder, wenn man $\frac{x}{\alpha}$ statt $x$ setzt,

$$\psi x = \varphi \frac{x}{\alpha} + \varphi 0.$$

Zusammengenommen findet man also, dafs die allgemeinsten Formen der Functionen, welche der Bedingungs-Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

genug thun, folgende sind:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{fx + \alpha' x} \text{ und}$$

$$\psi x = \varphi 0 + \varphi \frac{x}{\alpha} = a\alpha \int \frac{\partial x}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0,$$

wobei $fx$ von der Gleichung

$$\alpha^{2n} = (fx - nx)^{n+\alpha'} (fx + nx)^{n-\alpha'}$$

abhängt.

Es sei z. B.

$$n = \alpha' = \tfrac{1}{2},$$

so ist

$$\alpha = fx - \tfrac{1}{2}x,$$

also

$$fx = \alpha + \tfrac{1}{2}x,$$

und folglich

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{\partial x}{\alpha + x} = a\alpha \log(\alpha + x) + k,$$

$$\psi x = \varphi 0 + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = 2k + a\alpha \log \alpha + a\alpha \log\left(\alpha + \frac{x}{\alpha}\right)$$

wo

$$\psi x = 2k + a\alpha \log(\alpha^2 + x).$$

Die Bedingungs-Gleichung giebt also

$$k + a\alpha \log(\alpha + x) + k + a\alpha \log(\alpha + y) = 2k + a\alpha \log[\alpha^2 + x(\alpha + \tfrac{1}{2}y) + y(\alpha + \tfrac{1}{2}x)];$$

welches in der That zutrifft, denn beide Theile dieser Gleichung reduciren sich auf

$$2k + a\alpha \log(\alpha^2 + \alpha x + \alpha y + xy).$$

Die Function $\varphi x$ wurde oben in der Form eines Integrals gefunden. Man kann auch für dieselbe, vermittelst der Logarithmen, einen endlichen Ausdruck finden, wenn man die Function $fx$ als bekannt annimmt. Es sei nemlich

$$fx + nx = v \quad \text{und} \quad fx - nx = t,$$

so giebt die Gleichung (12.)

$$\alpha^{2n} = v^{n-\alpha'}.\, t^{n+\alpha'}$$

also

$$t^{n+\alpha'} = \alpha^{2n}.\, v^{\alpha'-n},$$

und folglich

$$t = \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}}.\, v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Nun ist

$$fx = \tfrac{1}{2}(v + t) \quad \text{und} \quad nx = \tfrac{1}{2}(v - t),$$

also ist

$$fx = \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}}.\, v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}, \quad \text{und}$$

$$x = \frac{1}{2n}v - \frac{1}{2n}\alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}}.\, v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Dieses giebt, wenn man differentiirt:

$$\partial x = \left(\frac{1}{2n} - \frac{\alpha' - n}{2n(\alpha + n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} . v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}}\right) \partial v,$$

desgleichen findet man

$$fx + \alpha' x = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}\right) v + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}\right) \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} . v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}, \text{ oder}$$

$$fx + \alpha' x = (n + \alpha')\left(\frac{1}{2n} - \frac{\alpha' - n}{2n(\alpha' + n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} . v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}}\right) v,$$

also

$$\frac{\partial x}{f\alpha + \alpha' x} = \frac{\partial v}{(n + \alpha') v},$$

welches, wenn man integrirt,

$$\int \frac{\partial x}{fx + \alpha' x} = \frac{1}{n + \alpha'} \log c v = \varphi x$$

giebt, wo $c$ eine willkürliche Constante ist. Setzt man also für $v$ seinen Werth $fx + nx$, so findet man

$$13. \quad \varphi x = \frac{1}{n + \alpha'} \log(c n x + c f x).$$

In den beiden Fällen, $\alpha' = \infty$ und $n = 0$, bekommt die Function $fx$ einen particulairen Werth. Um denselben zu finden, mufs man auf die Differentialgleichung (11.) zurückgehen.

Es sei zuerst

$$n = 0,$$

so giebt die Gleichung (11.), weil $m = -n^2$:

$$f'x(fx + \alpha' x) - \alpha' fx = 0.$$

Es sei

$$fx = z . x,$$

so findet man

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\partial z(z + \alpha')}{z^2} = -\frac{\partial z}{z} - \alpha' \frac{\partial z}{z^2},$$

wovon das Integral

$$\log c + \log x = -\log z + \frac{\alpha'}{z} \text{ oder } \log(c z x) = \frac{\alpha'}{z},$$

oder, weil $z = \frac{fx}{x}$ war,

$$\log c fx = \frac{\alpha' x}{fx} \text{ oder } \alpha' x = fx \log(c fx) \text{ ist.}$$

Für $x = 0$ ist $0 = \alpha \log c\alpha$, also $c\alpha = 1$ und

$$c = \frac{1}{\alpha},$$

also

$$\alpha' x = fx \log\left(\frac{fx}{\alpha}\right) \text{ oder}$$

$$14. \quad e^{\alpha' x} = \left(\frac{fx}{\alpha}\right)^{fx}.$$

Diese Gleichung also bestimmt $fx$ für den Fall, wenn $n = 0$ ist. Die Gleichung (13.) giebt für diesen Fall

$$\varphi x = \frac{1}{\alpha}\log cfx = \frac{1}{\alpha}\log c\alpha + \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right),$$

mithin, weil zu Folge (14.) $\log\frac{fx}{\alpha} = \frac{\alpha' x}{fx}$ ist:

$$15.\quad \varphi x = \frac{\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{x}{fx}.$$

Ferner ist

$$16.\quad \psi x = \varphi 0 + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{2\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{x}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right)}.$$

Die gegebene Bedingungs-Gleichung also ist:

$$\frac{\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{x}{fx} + \frac{\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{y}{fy} = \frac{2\log c\alpha}{\alpha'} + \frac{xfy + yfx}{\alpha f\left(\frac{xfy + yfx}{\alpha}\right)},$$

das heifst, es mufs

$$17.\quad \alpha f\left(\frac{xfy + yfx}{\alpha}\right) = fxfy$$

sein.

Um diese Gleichung zu untersuchen, wollen wir statt $x$ und $y$ ihre Werthe aus der Gleichung (14.) setzen, nemlich $\frac{fx}{\alpha'}\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right)$ und $\frac{fy}{\alpha'}\log\left(\frac{fy}{\alpha}\right)$.

Dieses giebt:

$$18.\quad \alpha f\left(\frac{fxfy\log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)}{\alpha\alpha'}\right) = fxfy = \alpha fr,$$

wenn man der Kürze wegen

$$19.\quad \frac{fxfy\log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)}{\alpha\alpha'} = r$$

setzt. Es folgt daraus:

$$2\log\alpha + \log\frac{fr}{\alpha} = \log(fxfy).$$

Aber zu Folge der Gleichung (14.) ist

$$\log\frac{fr}{\alpha} = \frac{\alpha' r}{fr},$$

also erhält man, wenn man substituirt,

$$20.\quad 2\log\alpha + \frac{\alpha' r}{fr} = \log(fxfy).$$

Da aber $fr = \frac{fxfy}{\alpha}$ war (18.), so ist, vermöge (19.), $\frac{fr \cdot \log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)}{\alpha'} = r$,
also $\frac{\alpha' r}{fr} = \log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right)$, folglich in (20.): $2\log\alpha + \log\left(\frac{fxfy}{\alpha^2}\right) = \log(fxfy)$, welches, wie leicht zu sehen, wirklich der Fall ist.

Es sei ferner

$$\alpha' = \infty.$$

Schreibt man in diesem Fall die Gleichung (11.) wie folgt:

$$\frac{fxf'x}{\alpha'} + xf'x + \frac{mx}{\alpha'} - fx = 0,$$

so ist klar, dafs $xf'x - fx = 0$ sein mufs, wenn $m$ endlich ist. Also mufs

$$\frac{f'x}{fx} = \frac{\partial x}{x} \text{ oder } fx = cx$$

sein.

Ist

$$m = -p\alpha',$$

so ist

$$xf'x - px - fx = 0.$$

Es sei

$$fx = xz,$$

so erhält man

$$x(x\partial z + z\partial x) - (px - xz)\partial x = 0, \text{ oder}$$

$$x\partial z = p\partial x,$$

also $z = p\log cx = \frac{fx}{x}$, und folglich

$$fx = px\log cx.$$

Um $\varphi x$ zu finden, substituire man diesen Werth der Function $fx$ in die Gleichung (3.), so erhält man, weil $f'x = p\log cx + pc$ ist:
$\varphi' y(py\log cy + yp\log cx + pcy) - \varphi' x(px\log cx + xp\log cy + pcx) = 0$;
also wenn man mit $p(\log c^2xy + c)$ dividirt,

$$y\varphi' y - x\varphi' x = 0,$$

folglich

$$x\varphi' x = k \text{ und } \partial\varphi x = \frac{k\partial x}{x},$$

mithin

$$\varphi x = k\log mx.$$

Die gegebene Bedingungs-Gleichung geht also in

$$k\log mx + k\log my = \psi(xpy\log cy + ypx\log cx),$$

oder in

$$k\log m^2xy = \psi(pxy\log c^2xy)$$

über, oder wenn man

$$pxy \log c^2 xy = r \text{ und } xy = v$$

setzt, in

$$\psi r = k \log m^2 v.$$

Durch das Verfahren, welches hier oben die Functionen gab, die der Gleichung

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

genugthun, lassen sich auch die unbekannten Functionen in jeder andern Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Gröfsen finden. In der That lassen sich durch wiederholte Differentiationen nach den beiden veränderlichen Gröfsen, so viel Gleichungen finden als nöthig sind, um beliebige Functionen zu eliminiren, so dafs man zu einer Gleichung gelangt, welche nur noch eine dieser Functionen enthält, und welche im Allgemeinen eine Differential-Gleichung von irgend einer Ordnung sein wird. Man kann also im Allgemeinen alle die Functionen vermittelst einer einzelnen Gleichung finden. Daraus folgt, dafs eine solche Gleichung nur selten möglich sein wird. Denn da die Form einer beliebigen Function, die in der gegebenen Bedingungs-Gleichung vorkommt, vermöge der Gleichung selbst, von den Formen der andern unabhängig sein soll, so ist offenbar, dafs man im Allgemeinen keine dieser Functionen als gegeben annehmen kann. So z. B. könnte der obigen Gleichung nicht mehr genug gethan werden, wenn $fx$ eine andere als die gefundene Gestalt hätte.