

Observatio Geometrica

(Auctore H. J. STEPHANO SMITH, *Geometriæ apud Oxonienses*
Professore Saviliano).

Vir clarissimus, H. SIEBECK, in commentatione eximia mense Augusto edita (*), solutionem dedit problematis non inelegantis :

« Datis quinque punctis in una quaque quatuor sectionum conicarum $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, invenire nonum punctum Ω omnibus curvis cubicis commune, quæ transeunt per octo puncta (Σ_1, Σ_2) et (Σ_3, Σ_4) ».

Cujus problematis solutionem et nos paullo ante inveneramus, et cum Societate Britannica eodem mense Augusto communicavimus (**); nec ægre ferimus disquisitionem viri clarissimi nostræ anteveruisse. Illud vero nobis proprium fortasse fuit, quod docuimus problematis solutionem revera linearem esse, cum determinatione cubica trianguli chordalis omnino supersederi possit. Cujus rei rationem paucis hic explicare liceat.

Quoties duarum conicarum altera A alterius B triangulo polari circumscripta est, hanc illi harmonice inscriptam, illam huic harmonice circumscriptam, brevitatis causa dicere consuevimus: conicæ autem harmonice circumscriptæ ordinem, conicæ harmonice inscriptæ classem, præcipue respicere oportet. Sint S_1, S_2 duæ conicæ quatuor conicis datis harmonice inscriptæ; omnis conica systematis

$$l_1 S_1 + l_2 S_2 \dots (S)$$

(quod est simplex secundæ classis) omni conicæ systematis

$$\lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2 + \lambda_3 \Sigma_3 + \lambda_4 \Sigma_4 \dots (\Sigma)$$

(quod est triplex secundi ordinis) harmonice inscripta erit. Atque in universum,

(*) Hujus Diarii Vol. II. p. 65.

(**) *British Association for the Advancement of Science*, Norwich Meeting, Aug. 22, 1868.

cuius systemati lineari curvarum secundi ordinis respondebit per inscriptionem harmonicam systema lineare curvarum secundæ classis, triplici simplex, duplici duplex, simplici triplex: quin etiam (si rem ulterius persequi placet) curvæ unicæ secundi ordinis systema quadruplex secundæ classis respondebit, et similiter systemati quadruplici secundi ordinis curva unica secundæ classis. Cujusmodi bina systemata non sine caussa *contravariantia* appellavimus; eorumque proprietates in commentatione peculiari aliquatenus explicavimus (*); in qua etiam tractavimus linearem solutionem problematis:

« Datis quatuor conicis ex systemate triplici Σ , invenire quotlibet elementa conicæ pertinentis ad systema S , et rectam datam tangentis ».

Quo problemate hic utimur ad determinationem conicarum S_1 et S_2 ; ipsam vero solutionem, cum sit maxime elementaris, hoc loco iterare supervacaneum putamus.

Systema S continet tres conicas evanescentes; quæ, quum conicis Σ nihilo secius inscriptæ esse debeant, fiunt ipsarum poli conjugati. Itaque triangulus chordalis systematis Σ idem est atque triangulus polaris systematis S ; datur autem implicite, quinque punctis inventis in utrâque conicarum S_1 et S_2 . Præterea apparet universum systema conicarum triangulo chordali $\alpha\beta\gamma$ circumscriptarum contineri in systemate Σ ; unde sequitur tria puncta $\alpha\beta\gamma$, et quaterna puncta intersectionis binarum quarumvis conicarum ex systemate Σ , ad unam eandemque conicam pertinere. Systema enim duplex et simplex, quæ ambo in eodem systemate triplici continentur, unam conicam semper communem habent. Cum autem compertum sit punctum quæsitum Ω esse quartum punctum intersectionis conicarum $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_3, \Sigma_4)$, in eo versatur cardo quæstionis, ut demonstretur quotlibet harum elementa lineari ratione determinari posse. Quarum in neutra ne unum quidem elementum datur separatim; dantur enim implicite tum tria puncta $\alpha\beta\gamma$ utrique communia, tum in singulis quaterna (Σ_1, Σ_2) et (Σ_3, Σ_4) .

Sint $a_1 a_2, p_1 p_2$ duo paria polorum conjugatorum in systemate (Σ_1, Σ_2) . Puncta $a_1 a_2$ erunt etiam poli conjugati unius ex conicis (Σ_3, Σ_4) ; cujus conicæ ponemus (quod licet) puncta $p_1 p_2$ nequaquam esse polos conjugatos; ita ut omnis conica ex systemate Σ , quæ utramque rectam $a_1 a_2, p_1 p_2$, harmonice secet, in systemate (Σ_1, Σ_2) necessario comprehendatur. Sit (S_1, S_2) systema curvarum secundi ordinis, determinatum per conicas S_1 et S_2 , quarum utramque (ut supra diximus) quinque punctis definiri intelligimus. Hujus-

(*) Lecta est Societati Mathematicæ Londinensi, die 28^{mo} Maii, 1868.

modi systematis poli conjugati ita se habent, ut punctis in recta sitis reciproce respondeant puncta in conica triangulo $\alpha\beta\gamma$ circumscripta. Sint igitur A, P conicæ rectis $a_1 a_2, p_1 p_2$, reciprocæ; sit præterea, in conica A , α polus rectæ $a_1 a_2$; et similiter p polus rectæ $p_1 p_2$ in conica P . Conica $[ap]$, rectæ ap reciproca, erit ipsa conica quæsita $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$. Nam, quod primum est, conica $[ap]$ circumscribitur triangulo $\alpha\beta\gamma$, utpote rectæ reciproca; ideoque continetur in systemate Σ . Deinde, quod secundum est, secat harmonice utramque rectam $a_1 a_2, p_1 p_2$; rectæ enim $a_1 a_2, ap$ conicam A quatuor punctis harmonice secant; punctis autem harmonicis in circumferentia conicæ A respondent reciproce puncta in recta $a_1 a_2$ harmonica; hoc est, conica $[ap]$ rectam $a_1 a_2$ secat harmonice; quod idem de recta $p_1 p_2$ similiter probatur. Sit denique bq recta conicæ $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_3, \Sigma_4)$ eodem modo respondens quo recta ap conicæ $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$: punctum quæsitum Ω erit punctum conjugatum puncto intersectionis rectarum ap, bq : eamque determinationem linearem esse patet.

Etiam solutionem problematis:

« Determinare punctum μ quatuor punctis (Σ_3, Σ_4) oppositum in cubica quæ transit per octo puncta $(\Sigma_1, \Sigma_2), (\Sigma_3, \Sigma_4)$, et per punctum m separatim datum » ita tractari posse demonstravimus, ut ad constructionem regula tantum opus sit. Sint r_1, r_2, r_3, r_4 puncta conicis Σ_1 et Σ_2 communia; constat ex notissimo theoremate conicam $(\Omega, r_1, r_2, r_3, r_4)$, quæ est ipsa illa conica $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$ rectæ ap reciproca, satisfacere æquationi anharmonicæ

$$[r_1, r_2, r_3, r_4] = (\Sigma_3, \Sigma_4) \cdot [r_1, r_2, r_3, r_4].$$

Itaque res eo redit ut in ejusdem conicæ circumferentia inveniatur punctum M , quod satisfaciat æquationi

$$[r_1, r_2, r_3, r_4, M] = (\Sigma_3, \Sigma_4) \cdot [r_1, r_2, r_3, r_4, m].$$

Designante litera σ conicam (Σ_3, Σ_4, m) , systema conicarum

$$\lambda\sigma + \lambda_1\Sigma_1 + \lambda_2\Sigma_2$$

cum systemate conicarum triangulo chordali circumscriptarum systema simplex Θ commune habet; quia utrumque systema duplex est, et in uno eodemque systemate triplici continetur. Cujus systematis Θ omnes conicæ per puncta $\alpha\beta\gamma$ manifesto transeunt; habent autem quartum punctum intersectionis X , quod erit in circumferentia conicæ $(\alpha, \beta, \gamma, \Sigma_1, \Sigma_2)$, quippe quæ et ipsa pertineat ad systema Θ . Jam apparet punctis X in circumferentia conicæ $(\alpha, \beta,$

$\gamma, \Sigma_1, \Sigma_2$) respondere conicas σ in systemate simplici (Σ_3, Σ_4) ; respondent autem singulis singulæ; hoc est, respondent anharmonice. Præterea conicæ $(\Sigma_3, \Sigma_4, r_i)$, quam per literam σ_i designabimus, manifesto respondet punctum r_i : quia id punctum omnibus conicis

$$\lambda \sigma_i + \lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2,$$

atque adeo omnibus conicis Θ , commune est. Unde sequitur punctum X ipsum esse punctum quæsitum M , cum satisfaciat æquationi

$$[r_1, r_2, r_3, r_4, X] = (\Sigma_3, \Sigma_4) \cdot [r_1, r_2, r_3, r_4, m].$$

Hinc nanciscimur sequentem determinationem puncti M respondentis datæ conicæ $\sigma = (\Sigma_3, \Sigma_4, m)$. Designante litera ρ quamvis conicam ex systemate (Σ_1, Σ_2) , conica $(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \rho)$ pertinebit ad systema Θ . Capiatur recta R huic conicæ reciproce respondens; quod quomodo fieri possit jam supra explicavimus; punctum M erit punctum reciproce respondens puncto intersectionis rectarum R et ap . Simplicissima autem erit constructionis ratio, si incipimus a determinatione punctorum M_3 et M_4 conicis Σ_3 et Σ_4 respondentium: quo facto habebimus tria puncta Ω, M_3, M_4 , tribus conicis $(\Omega, r_1, r_2, r_3, r_4), \Sigma_3, \Sigma_4$ respondentia; quantum vero punctum quartæ cuivis conicæ respondens ex æqualitate rationis anharmonicæ facillime determinabitur.