

Zur Theorie der Kleinschen Ergänzungsrelationen.

(Erste Mitteilung.)

Von

Hans Falckenberg in Gießen.

Einleitung.

Der Quotient zweier Partikularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung mit *reellen* Exponentendifferenzen und, wie man annehmen kann, auch reellen singulären Stellen, bildet bekanntlich die positive oder negative z -Halbebene auf ein von drei Kreisbogen begrenztes natürlich einfach zusammenhängendes Flächenstück ab, dessen Ecken den singulären Stellen der Differentialgleichung entsprechen und dessen Eckenwinkel gleich sind ihren Exponentendifferenzen.

Diese Kreisbogendreiecke, deren reelle Winkel $(\lambda_1 \pi, \lambda_2 \pi, \lambda_3 \pi)$ und reelle oder bis auf ganze Vielfache von π rein imaginäre Seiten $(l_1 \pi, l_2 \pi, l_3 \pi)$ ¹⁾ bei Zugrundelegung der projektiven (Cayleyschen) Maßbestimmung mit der Kugel als Fundamentalfäche den Formeln der sphärischen Trigonometrie genügen, sind durch Vorgabe der Winkel eindeutig festgelegt, während in den Formeln der sphärischen Trigonometrie die Seiten durch die Winkel erst bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmt sind. Das liegt daran, daß wir in der Funktionentheorie die Forderung einer einfach zusammenhängenden Dreiecksfläche („Flächendorderung“, „Flächendreiecke“) stellen müssen, wohingegen eine Zusammenstellung von drei Winkeln und drei Seiten, die den Formeln der sphärischen Trigonometrie gehorcht, bei geometrischer Interpretation noch lange nicht ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zu liefern braucht.

Es treten daher zu den Formeln der sphärischen Trigonometrie noch

¹⁾ Wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, nenne ich auch die Größen λ_i selbst „Winkel“, die Größen l_i „Seiten“.

die von F. Klein²⁾ entdeckten „Ergänzungsrelationen“ („E.R.“) hinzu, welche die in den Seiten enthaltenen ganzen Vielfachen von 2π als Funktionen der Winkel angeben. *Sie sind das analytische Äquivalent der Flächenforderung.*

In der sphärischen Trigonometrie kommt, wie E. Study³⁾ gezeigt hat, der Formelgruppe von Delambre eine besondere Bedeutung dadurch zu, daß sie die Gesamtheit aller Dreiecke in zwei Klassen einteilt („eigentliche“ und „uneigentliche“), deren jede unter sich ein Kontinuum bildet. Unsere Flächendreiecke, die ebenfalls ein Kontinuum bilden, gehören der Klasse der eigentlichen an.

Die Klasseneinteilung wird auch geleistet durch die Formeln von Simon L'Huilier und zwar dadurch, daß diese für die beiden Klassen verschiedene Gleichungssysteme liefern. Wir schreiben die für unsere (eigentlichen) Dreiecke gültigen mit Study in folgender Form an:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{s_i \pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_i \pi}{2} = \varepsilon \sqrt{\prod_{i=0}^3 \operatorname{tg} \frac{\sigma_i \pi}{2}} \quad (\varepsilon = \pm 1; i = 0, 1, 2, 3),$$

wobei

$$(2) \quad \begin{cases} s_0 = \frac{2 - l_1 - l_2 - l_3}{2}; & \sigma_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1}{2} \\ s_k = \frac{-l_k + l_{k+1} + l_{k-1}}{2}; & \sigma_k = \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1} - \lambda_{k-1} + 1}{2} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, 3; \\ 1 - 1 = 3 \\ 3 + 1 = 1 \end{array} \right)$$

(s-Größen) (σ-Größen)

und

$$(3) \quad \sum_{i=0}^3 s_i = \sum_{i=0}^3 \sigma_i = 1,$$

ferner

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda_k = \sigma_0 + \sigma_k = 1 - \sigma_{k+1} - \sigma_{k-1} \\ l_k = 1 - s_0 - s_k = s_{k+1} + s_{k-1} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3)$$

ist. Die Gleichungen (1) spalten — und darin liegt ihr Vorzug vor den Delambreschen — wegen des an jeder der unendlich vielen Verzweigungsstellen noch unbestimmten Vorzeichens ε das *Kontinuum* der eigentlichen Dreiecke in unendlich viele *Unterkontinua*. Damit erhebt sich die Aufgabe, durch Bestimmung dieses Vorzeichens als Funktion der Winkel das Kontinuum der *Flächendreiecke* aus dem der eigentlichen herauszuschälen.

²⁾ „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“, Math. Ann. 37 (1890), S. 573–590. Vgl. auch: „Über die hypergeometrische Funktion“, autogr. Vorlesungen, Göttingen 1894; neuer Abdruck, Leipzig 1906, S. 250 ff.

³⁾ „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen“, Abh. d. math.-phys. Klasse d. Sächs. Ges. d. Wiss. 20 (1893), S. 85 ff.

Das kann in doppelter Weise geschehen: entweder durch Zurückgreifen auf die *Flächenforderung*, was dann eine vorzugsweise geometrische von mir⁴⁾ unlängst durchgeführte Stetigkeitsbetrachtung notwendig macht, oder durch *Heranziehung der* mit der Flächenforderung wesentlich gleichbedeutenden „E.R.“, was Gegenstand der vorliegenden Mitteilung sein soll.

Diese lauten:

$$(5) \quad E\left(\frac{l_k}{2}\right) = E(\sigma_k) \quad (k = 1, 2, 3);$$

dabei bedeutet $E(x)$ die größte in x enthaltene *reelle positive ganze Zahl* bzw. 0, wenn keine reelle positive ganze Zahl in x enthalten ist. Als größte in der positiven ganzen Zahl p enthaltene ganze Zahl soll $p - 1$ festgesetzt sein.

Zur Durchführung der Aufgabe konstruieren wir nach einem Verfahren, das die von Klein eingeführten unstetigen geometrischen Prozesse der „lateralen“ und „polaren Anhängung von Kreisscheiben“ in *stetige analytische* umbildet, *analytisch alle denkbaren Flächendreiecke durch stetige Abänderung aus einem möglichst einfach gewählten „Anfangsdreieck“, bei dem wir das Vorzeichen in den Gleichungen (1) kennen, und untersuchen die Änderungen, die dieses bei den stetigen Prozessen erfahren muß, wenn die „E.R.“ stets in Gültigkeit bleiben sollen.* Beherrscht man diese Änderungen, so gelingt es auch, *das Vorzeichen explizit als Funktion der Winkel darzustellen.*

Die *Umkehrung* dieser Aufgabe, aus der Vorzeichenbestimmung die „E.R.“ abzuleiten, ist übrigens am Schluß meiner eben genannten Arbeit durchgeführt.

In einer folgenden Mitteilung sollen auch *komplexe Exponentendifferenzen* zugelassen werden. Es bietet dann keinen Vorteil mehr, die Abbildung einer *Halbebene* zu betrachten. Schilling untersucht daher⁵⁾ im vorliegenden Falle die *Abbildung der ganzen Ebene*, die er durch loxodromische Kurven, die von einer der singulären Stellen α_1 zu den beiden anderen α_2 und α_3 führen, zerschneidet. Er kommt dabei auf einen von 4 Kreisbogen begrenzten durch die Exponentendifferenzen im wesentlichen eindeutig bestimmten einfach zusammenhängenden „*Fundamentbereich*“ als Abbildungsfigur, der als Verallgemeinerung der von einem Flächendreieck und einem seiner Seitendreiecke gebildeten Figur gelten kann. Der singu-

⁴⁾ „Ableitung der Ergänzungsrelationen aus den Formeln von Simon L'Huilier“, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 17.

⁵⁾ „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s -Funktion“, Math. Ann. 44 (1894), S. 162; „Die geometrische Theorie der Schwarzschen s -Funktion f. komplexe Exponenten I u. II“, Math. Ann. 46 (1895), S. 62 u. 529.

lären Stelle a_1 entsprechen zwei Ecken A_1 und A'_1 , den singulären Stellen a_2 und a_3 je eine Ecke A_2 und A_3 des Bereiches; die Eckenwinkel bei



Fig. 1.

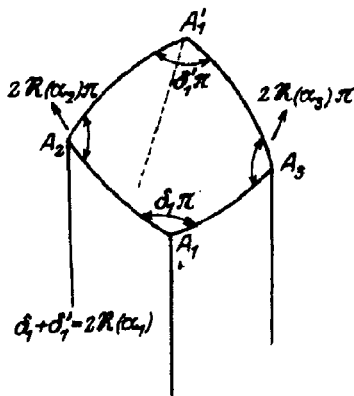


Fig. 2.

A_2 und A_3 sind gleich den doppelten reellen Teilen der Exponentendifferenzen α_2 und α_3 , die Summe der Eckenwinkel bei A_1 und A'_1 ist gleich dem doppelten reellen Teil von α_1 . (Fig. 1 und 2; in Fig. 1 sind die loxodromischen Kurven schematisch gezeichnet, in Fig. 2, die den Fundamentalbereich darstellt, bedeutet $\Re(x)$ den reellen Teil von x .)

Nach willkürlicher Annahme der Ecken A_1, A_2, A_3 wird die vierte Ecke A'_1 des Fundamentalbereiches und die punktweise Zuordnung der ein und demselben Verzweigungsschnitt entsprechenden Begrenzungskreisbogen $A_1 A_2 \leftrightarrow A'_1 A_2$; $A_1 A_3 \leftrightarrow A'_1 A_3$ durch die rein imaginären Teile der Exponentendifferenzen bestimmt und umgekehrt sind diese durch die Lage der Ecke A'_1 und eine jener Zuordnungen festgelegt, wodurch eine geometrische Deutung auch der *imaginären* Teile der Exponentendifferenzen gegeben ist.

Betrachtet man jetzt in den Formeln der sphärischen Trigonometrie wie im Fall reeller Argumente die Exponentendifferenzen als „Winkel“, die aber dann auch komplex sein können, so entsteht die Frage nach der geometrischen Bedeutung der in den Formeln auftretenden „Seiten“.

Wie Schilling gezeigt hat, tritt hier an Stelle der Dreiecksseite $l_1 \pi$ diejenige nicht-euklidische Schraubenbewegung, welche die durch A_2 gehende Fixgerade (Achse) der zugehörigen Fundamentalsubstitution in die zu ihr windschiefe durch A_3 gehende überführt. (In Fig. 2 sind die Fixgeraden angedeutet.) Entsprechend findet man eine geometrische Deutung der beiden anderen Seiten durch nicht-euklidische Schraubenbewegungen^{*)}.

Durch diese Interpretation sind die „Seiten“ ebensowenig wie durch die Formeln der sphärischen Trigonometrie nach Vorgabe der Winkel eindeutig festgelegt, vielmehr bleiben die in ihnen enthaltenen ganzen Vielfachen von 2π zunächst noch unbestimmt. Erst durch folgende *Festsetzung*, die im Falle komplexer Winkel die Flächenforderung ersetzt und

^{*)} Der Fundamentalbereich erscheint — um eine Kleinsche Ausdrucksweise zu gebrauchen — in den „Kern“ windschiefer Achsen eingehängt. Unter Zugrundelegung dieser Vorstellung erhält man die „Seiten“ als nicht-euklidische Schraubenbewegungen am „Kern“, die „Winkel“ als solche am „Polarkern“.

die geradezu den Begriff „Seite“ des komplexen einfach zusammenhängenden Bereiches erst *definiert*, erreicht man Eindeutigkeit:

„Ändert man ausgehend von dem Fall *reeller* Winkel den Fundamentalbereich stetig so ab, daß die reellen Teile der Winkel ungeändert bleiben, während die imaginären alle möglichen Werte stetig durchlaufen (wobei sich also im wesentlichen nur der Eckpunkt A_1' des Fundamentalbereiches und die punktweise Zuordnung der Begrenzungskreisbogen ändern), so gehen auch die „Seiten“ stetig ineinander über.“

Diese *erweiterte „Flächenforderung“* geht im Falle *reeller* Argumente in die als selbstverständlich angesehene Forderung über, daß man die „Seiten“ des Abbildungsdreiecks mit seinen Begrenzungskreisbogen identifiziert — eine Forderung, die, wenn man will, als Ausdruck der Flächenforderung gelten kann.

Zieht man bei *komplexen* Argumenten *diese* Forderung heran, so bleibt, wie gezeigt werden soll, die in dieser Mitteilung abzuleitende Vorzeichenbestimmung in den L'Huilierschen Gleichungen in Gültigkeit, sofern man nur in der Formel an Stelle der Winkel ihre reellen Teile setzt. Wie im Falle reeller Argumente kann man sodann einfache Beziehungen ableiten, welche die in den Seiten enthaltenen ganzen Vielfachen von 2π durch die reellen Teile der Winkel ausdrücken. Diese Relationen bilden das Analogon zu den Kleinschen „Ergänzungsrelationen“ für den Fall komplexer Exponentendifferenzen (Winkel).

I.

Vorzeichenbestimmung in den L'Huilierschen Gleichungen im Falle reeller Exponentendifferenzen (Winkel).

§ 1.

Verhalten des Vorzeichens bei stetiger Abänderung.

Worterklärung: Nimmt bei stetiger Abänderung an einer Stelle eine der Größen $\sigma_i, s_i; \lambda_k, l_k$ ($i = 0, 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$) eine ganze Zahl g an und ist sie vor dem Durchgang durch die Stelle $g + \varepsilon_1$, nach dem Durchgang $g - \varepsilon_2$, so sage ich, sie „*erreicht*“ den Wert g . Ist sie aber vor dem Durchgang $g - \varepsilon_1$, nach dem Durchgang $g + \varepsilon_2$, so sage ich, sie „*durchschreitet*“ den Wert g . Dabei sind ε_1 und ε_2 reelle oder rein imaginäre kleine Größen *gleichen* Vorzeichens (ein kann reell, das andere imaginär, es können aber auch beide reell oder beide imaginär sein.) —

Aus den Gleichungen (1) und (4) leitet man folgende — übrigens auch für uneigentliche Dreiecke geltenden — ab:

$$(6) \quad \operatorname{tg} \frac{l_1 \pi}{2} = (-1)^{\left[\frac{\sigma_0+1}{2}\right] + \left[\frac{\sigma_1+1}{2}\right] + \left[\frac{\sigma_2}{2}\right] + \left[\frac{\sigma_3}{2}\right]} \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{\sin \sigma_0 \pi \cdot \sin \sigma_1 \pi}{\sin \sigma_2 \pi \cdot \sin \sigma_3 \pi}} \cdot a_1$$

und zwei weitere durch zyklische Vertauschung der Indizes (1, 2, 3).

Setzt man:

$$(7) \quad \varepsilon' = (-1)^{\sum_{i=0}^3 \left[\frac{\sigma_i+1}{2}\right] + \sum_{k=1}^3 E(\sigma_k)} \cdot \varepsilon,$$

so erhält man:

$$(8) \quad \operatorname{tg} \frac{l_1 \pi}{2} = (-1)^{[\sigma_0] + [\sigma_1] + \sum_{k=1}^3 E(\sigma_k)} \cdot \varepsilon' \sqrt{\frac{\sin \sigma_0 \pi \cdot \sin \sigma_1 \pi}{\sin \sigma_2 \pi \cdot \sin \sigma_3 \pi}}.$$

Singuläre Stellen, an denen Seiten bis auf ganze Vielfache von π *imaginär unendlich* werden, sollen bei stetiger Abänderung *umgangen werden*. Dagegen schließe ich solche, bei denen *eine oder mehrere Seiten unbestimmt* werden, *nicht* aus.

Dann kann sich bei stetiger Abänderung das Vorzeichen ε' , das wir jetzt an Stelle von ε betrachten, jedenfalls nur dann ändern, wenn mindestens eine σ -Größe eine ganze Zahl *durchschreitet* — Stellen, an denen σ -Größen ganze Zahlen *erreichen*, sollen vermieden werden —

Nennt man eine stetige Abänderung, bei der keine σ -Größe eine ganze Zahl ⁷⁾ *durchschreitet*, „gewöhnliche Abänderung“, so folgt aus (8):

I. *Bei gewöhnlicher Abänderung („Prozeß I“) ändert sich ε' nicht.* —

Eine Stelle, an der nur *eine einzige* σ -Größe eine ganze Zahl durchschreitet, heiße „einfach parabolische“ Stelle.

Aus (8) findet man: Bei Durchlaufung einer einfach parabolischen Stelle, bei der σ_0 eine ganze oder σ_1 eine *nichtpositive* ganze Zahl durchschreitet, wird l_1 eine *gerade* ganze Zahl; $\operatorname{tg} \frac{l_1 \pi}{2}$ ändert sein Vorzeichen nicht, weil die gerade ganze Zahl nach den „E.R.“ von l_1 nicht durchschritten werden darf. Da sich auch

$$(-1)^{[\sigma_0] + [\sigma_1] + \sum E(\sigma_k)}$$

nicht ändert, so bleibt nach (8) ε' ungeändert.

Bei einer einfach parabolischen Stelle, an der σ_1 eine *positive* ganze Zahl durchschreitet, ändert sich sowohl das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \frac{l_1 \pi}{2}$ (wegen

^{6*)} $[x]$ = größte positive oder negative Zahl unter x für $x \leq 0$ und $x > +1$.
= 0 für $0 < x \leq +1$.

⁷⁾ Der Wert 0 ist hier und im folgenden stets den *nichtpositiven* ganzen Zahlen zuzurechnen.

der „E.R.“, als auch $(-1)^{E(\sigma)}$, weswegen auch hier nach (8) ε' ungeändert bleibt. In leichter Verallgemeinerung schließt man:

II. Bei Durchlaufung einer einfach-parabolischen Stelle („Prozeß II“) ändert sich ε' nicht. —

Eine Stelle, an der gleichzeitig zwei σ -Größen ganze Zahlen durchschreiten, heiße „doppelt-parabolische“ Stelle.

Durchschreiten an einer solchen σ_2 und σ_3 ganze nichtpositive Zahlen, so wird nach (8) l_1 eine ungerade ganze Zahl, l_2 und l_3 unbestimmt.

Aus (1) und (2) folgt, daß zwei Gleichungen von der Form:

$$(9) \quad \pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 = 2g \quad (g \text{ ganze Zahl})$$

erfüllt sind.

Änderte sich hier ε' nicht, so änderten $\operatorname{tg} \frac{l_2 \pi}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{l_3 \pi}{2}$ nach (8) ihr Vorzeichen; d. h. l_2 und l_3 durchschritten ganze Zahlen. Mit Rücksicht auf (9) wäre es aber dann notwendig, daß eine von diesen eine gerade Zahl durchschritte, was mit den „E.R.“ in Widerspruch stände, weil σ_2 und σ_3 ganze Zahlen kleiner als 1 durchschreiten. ε' ändert sich also. Verallgemeinert:

III. Bei Durchlaufung einer doppelt-parabolischen Stelle, an der σ_1 und σ_2 , σ_2 und σ_3 , oder σ_3 und σ_1 ganze nichtpositive Zahlen durchschreiten („Prozeß III“) ändert sich ε' . —

Durchschreiten an einer doppelt-parabolischen Stelle σ_0 eine ganze, σ_1 eine positive ganze Zahl, so wird nach (8) l_1 eine gerade ganze Zahl, l_2 und l_3 unbestimmt. l_1 durchschreitet mit Rücksicht auf die „E.R.“ die gerade ganze Zahl, so daß sich nach (8) ε' nicht ändern darf. Man erhält:

IV. Bei Durchlaufung einer doppelt-parabolischen Stelle, an der σ_0 eine ganze, σ_1 , σ_2 oder σ_3 eine positive ganze Zahl durchschreiten („Prozeß IV“), ändert sich ε' nicht. —

Durchschreiten drei σ -Größen ganze Zahlen, so tut es wegen (3) auch die vierte; diese Stellen sollen „Ausnahmestellen“ heißen.

Durchschreitet an einer solchen σ_0 eine ganze, σ_1 , σ_2 und σ_3 ganze nichtpositive Zahlen, so werden alle Seiten unbestimmt. Da wegen (3) eine oder drei σ -Größen gerade Zahlen sind, so besteht wegen (1) und (2) immer eine der Gleichungen (9).

Änderte sich ε' hier, so durchschritten alle Seiten ganze Zahlen; das dürften aber wegen der „E.R.“ nur ungerade Zahlen sein. Dami ließe sich keine der Gleichungen (9) befriedigen. Es folgt:

V. Bei Durchlaufung einer Ausnahmestelle, an der σ_0 eine ganze, σ_1 , σ_2 und σ_3 ganze nichtpositive Zahlen durchschreiten („Prozeß V“), ändert sich ε' nicht. —

Ein Flächendreieck, bei dem die Ungleichungen

$$(10) \quad 0 < \lambda_k < 1 \quad (k = 1, 2, 3); \quad 0 < \sigma_i < 1 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

gelten, heiße „Anfangsdreieck“. Man findet leicht:

VI. *Für jedes Anfangsdreieck ist $\varepsilon' = +1$.* —

Fhrt man die Bezeichnung:

$$[\sigma_0] + [\sigma_1] + [\sigma_2] + [\sigma_3] = [\sigma]$$

ein, so hat man zufolge (3) zu unterscheiden Dreiecke vom

$$\text{Charakter 0} \quad (C_0): [\sigma] = 0,$$

$$\text{Charakter 1} \quad (C_1): [\sigma] = -1,$$

$$\text{Charakter 2} \quad (C_2): [\sigma] = -2.$$

Die Dreiecke C_0 und C_3 sind elliptische (reelle Seiten), C_1 hyperbolische (bis auf ganze Vielfache von π rein imaginäre Seiten). Die Anfangsdreiecke gehören zu C_0 .

Zu den beabsichtigten stetigen Konstruktionen ziehen wir noch folgende zusammengesetzte Abnderungsprozesse heran:

a) „Hauptprozeß A_1 “: Er kommt zur Anwendung auf Dreiecke C_0 , bei denen

$$\sigma_1 < 1, \quad \sigma_2 < 1, \quad \sigma_3 < 1$$

ist, vermehrt σ_0 um 1 und vermindert σ_1 ebenfalls um 1. Seine Ausführung besteht darin, daß zunächst σ_0 stetig die Zahl $[\sigma_0] + 1$ und gleichzeitig σ_1 , σ_2 und σ_3 die Zahlen $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$ und $[\sigma_3]$ durchschreiten (Prozeß V), wodurch ein Dreieck C_2 erreicht ist; und daß dann die neuen Größen σ_2 und σ_3 gleichzeitig die neuen Werte $[\sigma_2] + 1$ und $[\sigma_3] + 1$ durchschreiten, ohne daß σ_0 und σ_1 ganze Zahlen werden (Prozeß III), wodurch man wieder zu einem Dreieck C_0 gelangt, bei dem mit Hilfe noch auszuführender, zweckmäßig gewählter gewöhnlicher Abänderungen in der Tat erreicht werden kann, daß σ_0 gegenüber dem Ausgangsdreieck um 1 vermehrt, σ_1 um 1 vermindert ist.

Durch zyklische Vertauschung der Indizes (1, 2, 3) erhält man die „Hauptprozesse A_2 und A_3 “.

Wegen der hier vorkommenden Prozesse III gilt auf Grund von I, III, V:

VII a. *Bei Anwendung eines Hauptprozesses A_k ($k = 1, 2, 3$) ndert sich ε' .* —

b) „Hauptprozeß B“: Er kommt zur Anwendung auf Dreiecke C_0 , bei denen

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 < 1, \quad \sigma_3 < 1$$

ist, vermindert σ_2 und σ_3 um 1 und vermehrt σ_0 und σ_1 um 1. Seine Ausführung besteht darin, daß zunächst gleichzeitig σ_2 und σ_3 die Zahlen $[\sigma_2]$ und $[\sigma_3]$ durchschreiten, ohne daß σ_0 und σ_1 ganze Zahlen werden (Prozeß III), wodurch ein Dreieck C_2 entsteht; und daß dann gleichzeitig σ_0 und σ_1 die Zahlen $[\sigma_0] + 1$ und $[\sigma_1] + 1$ durchschreiten, ohne daß σ_2 und σ_3 ganze Zahlen werden (Prozeß IV), wodurch man mit Hilfe noch auszuführender zweckmäßig gewählter „gewöhnlicher“ Abänderungen in der Tat zu einem Dreieck C_0 gelangen kann, in dem σ_2 und σ_3 gegenüber dem Ausgangsdreieck um 1 vermindert, σ_0 und σ_1 um 1 vermehrt sind.

Wegen des vorkommenden Prozesses III gilt mit Rücksicht auf I, III und IV:

VII b. Bei Anwendung des Hauptprozesses B ändert sich ε' .

§ 2.

Das Kleinsche Reduktionsverfahren⁸⁾.

Wir wenden ein von Klein angegebenes arithmetisches Verfahren an, durch das jedes Dreieck auf ein „reduziertes“ mit den Winkeln λ'_k ($k = 1, 2, 3$) und den σ -Größen σ'_i ($i = 0, 1, 2, 3$) zurückgeführt wird. Dieses ist charakterisiert durch die Ungleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} 0 < \lambda'_1 \leq 2 \\ 0 < \lambda'_2 \leq 1 \\ 0 < \lambda'_3 \leq 1, \end{cases} \quad (12) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} < \sigma'_0 \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} < \sigma'_1 < \frac{6}{2} \\ -1 < \sigma'_2 < 1 \\ -1 < \sigma'_3 < 1. \end{cases}$$

Sämtliche Dreiecke werden in zwei Arten eingeteilt:

a) 1. Art: *Kein Winkel ist größer als die Summe der beiden anderen.*

Wir setzen bei jedem Dreieck dieser Art:

$$(13a) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda'_1 + a_2 + a_3 \\ \lambda_2 = \lambda'_2 + a_3 + a_1 \\ \lambda_3 = \lambda'_3 + a_1 + a_2, \end{cases}$$

dann ist:

$$(14a) \quad \begin{cases} \sigma_0 = \sigma'_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \sigma_1 = \sigma'_1 - a_1 \\ \sigma_2 = \sigma'_2 - a_2 \\ \sigma_3 = \sigma'_3 - a_3. \end{cases}$$

⁸⁾ Vgl. die zitierten Vorlesungen, S. 415 ff.

Die a_k sind dabei — was stets (eindeutig) möglich ist — als ganze Zahlen so zu bestimmen, daß die größte unter den Zahlen λ'_k ($k = 1, 2, 3$) kleiner als 2, die beiden anderen kleiner als 1 sind. Wenn man dann noch *die Bezeichnungen der Winkel geeignet wählt*, so sind die Ungleichungen (11) und (12) erfüllt, und wir haben arithmetisch ein „reduziertes“ Dreieck konstruiert.

Mit Rücksicht auf (11) folgt aus (13 a):

$$a_2 + a_3 = [\lambda_2] + [\lambda_3] - 2a_1,$$

$$a_2 + a_3 = [\lambda_1] - [\lambda_1],$$

also

$$(15) \quad [\lambda'_1] \equiv [\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] \pmod{2},$$

ferner:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{\lambda_1 + [\lambda_2] + [\lambda_3]}{2} - \frac{\lambda'_1}{2} = \left[\frac{\lambda_1 + [\lambda_2] + [\lambda_3]}{2} \right]$$

oder

$$(16 a) \quad a_1 + a_2 + a_3 = \left[\frac{[\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + 1}{2} \right].$$

b) 2. Art: *Ein Dreieckswinkel, den wir mit λ_1 bezeichnen wollen, ist größer als die Summe der beiden anderen.*

Hier setzen wir:

$$(13 b) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda'_1 + 2b + a_2 + a_3 \\ \lambda_2 = \lambda'_2 + a_3 \\ \lambda_3 = \lambda'_3 + a_2, \end{cases}$$

dann ist:

$$(14 b) \quad \begin{cases} \sigma_0 = \sigma'_0 + b + a_2 + a_3 \\ \sigma_1 = \sigma'_1 + b \\ \sigma_2 = \sigma'_2 - a_3 - b \\ \sigma_3 = \sigma'_3 - a_2 - b. \end{cases}$$

b , a_2 und a_3 sind dabei — was stets (eindeutig) möglich ist — als ganze Zahlen so zu bestimmen, daß die Ungleichungen (11) und (12) erfüllt sind, wodurch wir auch hier arithmetisch ein „reduziertes“ Dreieck konstruiert haben.

Nach dieser Konstruktion folgt ebenfalls sehr leicht die Kongruenz (15), ferner die Gleichung:

$$(16 b) \quad b + a_2 + a_3 = \left[\frac{[\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + 1}{2} \right].$$

Schlußbemerkung. Für beide Dreiecksarten haben die Dreiecke und ihre „reduzierten“ den gleichen Charakter.

§ 3.

Konstruktionsverfahren -- Vorzeichenbestimmung.

Bei dem hier anzuwendenden Konstruktionsverfahren entsprechen den Kleinschen*) Prozessen der lateralen und polaren Anhängung die „Hauptprozesse A_k und B “.

Wir gehen von einem den Ungleichungen (10) genügenden „Anfangsdreieck“ (λ_k^0, σ_k^0) aus und konstruieren zunächst ein „Hilfsdreieck“ ($\bar{\lambda}_k, \bar{\sigma}_k$):

a) Falls ein Dreieck 1. Art vorliegt, wenden wir auf das Anfangsdreieck a_1 -mal den „Hauptprozeß A_1 “, a_2 -mal den „Hauptprozeß A_2 “ und a_3 -mal den „Hauptprozeß A_3 “ an und erhalten das Hilfsdreieck:

$$(17a) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_0 = \sigma_0^0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \bar{\sigma}_1 = \sigma_1^0 - a_1 \\ \bar{\sigma}_2 = \sigma_2^0 - a_2 \\ \bar{\sigma}_3 = \sigma_3^0 - a_3, \end{cases} \quad (18a) \quad \begin{cases} \bar{\lambda}_1 = \lambda_1^0 + a_2 + a_3 \\ \bar{\lambda}_2 = \lambda_2^0 + a_3 + a_1 \\ \bar{\lambda}_3 = \lambda_3^0 + a_1 + a_2. \end{cases}$$

Nach VIIa hat das Vorzeichen ε' dabei $(a_1 + a_2 + a_3)$ -mal gewechselt und ist nach VI und (16a)

$$(19) \quad \bar{\varepsilon}' = (-1)^{\frac{[\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + 1}{2}}.$$

b) Bei einem Dreieck 2. Art wenden wir auf das „Anfangsdreieck“ a_2 -mal den „Hauptprozeß A_2 “, a_3 -mal den „Hauptprozeß A_3 “ und dann b -mal den „Hauptprozeß B “ an, wodurch wir zu folgendem „Hilfsdreieck“ kommen:

$$(17b) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_0 = \sigma_0^0 + b + a_2 + a_3 \\ \bar{\sigma}_1 = \sigma_1^0 + b \\ \bar{\sigma}_2 = \sigma_2^0 - a_2 - b \\ \bar{\sigma}_3 = \sigma_3^0 - a_3 - b, \end{cases} \quad (18b) \quad \begin{cases} \bar{\lambda}_1 = \lambda_1^0 + 2b + a_2 + a_3 \\ \bar{\lambda}_2 = \lambda_2^0 + a_3 \\ \bar{\lambda}_3 = \lambda_3^0 + a_2. \end{cases}$$

Nach VIIa und VIIb hat das Vorzeichen ε' dabei $(a_2 + a_3 + b)$ -mal gewechselt und ist nun nach VI und (16b) ebenfalls durch Gleichung (19) bestimmt. —

Um die stetige Konstruktion zu Ende zu führen, haben wir nur noch von den „Hilfsdreiecken“ mit den Bestimmungsstücken (17) und (18) zu den gesuchten Dreiecken mit den Bestimmungsstücken (13) und (14) überzugehen; das entspricht einem Übergang vom Anfangsdreieck zum reduzierten.

Während aber das „Anfangsdreieck“, wie wir sahen, den Charakter 0 hat, sind für das „reduzierte“ alle Charaktere möglich, und zwar richtet

*) l. c. S. 418 ff.

sich das (Schlußbemerkung zu § 2) nach dem Charakter des zu konstruierenden Dreiecks.

Gehört es zu C_0 , so ist stets:

$$[\sigma'_0] = [\sigma'_1] = [\sigma'_2] = [\sigma'_3] = 0;$$

der Übergang vom Hilfsdreieck läßt sich ausschließlich durch Prozesse I vollziehen. Das Vorzeichen ε' ändert sich nicht mehr und es ist

$$(20\ a) \quad \varepsilon' = \bar{\varepsilon}'.$$

Gehört es zu C_2 , so ist, wie man leicht sieht, ebenfalls nur ein Typus möglich:

$$[\sigma'_0] = [\sigma'_1] = 0; \quad [\sigma'_2] = [\sigma'_3] = -1.$$

Hier läßt sich der Übergang durch Prozesse I und einen Prozeß III vollziehen; nach I und III ist

$$(20\ b) \quad \varepsilon' = -\bar{\varepsilon}'.$$

Gehört das gesuchte Dreieck zu C_1 , so sind mehrere Typen „reduzierter“ Dreiecke möglich:

$$1) \quad [\sigma'_0] = -1; \quad [\sigma'_1] = [\sigma'_2] = [\sigma'_3] = 0,$$

$$2) \quad [\sigma'_1] = -1; \quad [\sigma'_0] = [\sigma'_2] = [\sigma'_3] = 0,$$

und zwei weitere durch zyklische Vertauschung der Indizes (1, 2, 3) in 2):

$$3) \quad [\sigma'_0] = +1; \quad [\sigma'_1] = 0; \quad [\sigma'_2] = [\sigma'_3] = -1,$$

$$4) \quad [\sigma'_0] = 0; \quad [\sigma'_1] = +1; \quad [\sigma'_2] = [\sigma'_3] = -1.$$

Liegen die beiden ersten Typen vor, so genügen zum Übergang vom „Hilfsdreieck“ zum gesuchten Prozesse I und II; nach I und II ändert sich ε' nicht mehr und es gilt (20 a).

Liegt dagegen eine der beiden letzten vor, so gehen wir vom „Hilfsdreieck“ durch einen Prozeß III zu einem Dreieck C_2 über und steigen dann durch Prozesse I und II zum gesuchten auf. Wegen des vorkommenden Prozesses III ändert sich ε' gerade noch einmal und es tritt der Fall der Gleichung (20 b) ein. —

Man sieht leicht, daß in den Fällen der Gleichung (20 a) $\lambda'_1 < 1$, in den Fällen der Gleichung (20 b) $\lambda'_1 > 1$ ist, in allen Fällen ist also

$$\varepsilon' = (-1)^{[\lambda'_1]} \cdot \bar{\varepsilon}'$$

und auf Grund von (15), (19) und (7)

$$\varepsilon = (-1)^{\sum_{i=0}^3 \left[\frac{\sigma_i + 1}{2} \right] + \sum_{k=1}^3 \{ E(\sigma_k) + [\lambda_k] \} + \left[\frac{[\lambda_1] + [\lambda_2] + [\lambda_3] + 1}{2} \right]}$$

Diese Formel ist vollständig symmetrisch in bezug auf die Winkel, gilt also *unabhängig von der Bezeichnung der Winkel*. Die oben eingeführten Vorschriften über diese Bezeichnung sind damit überflüssig.

Schlußbemerkung. Es mag auffallend erscheinen, daß bei unserer stetigen Konstruktion Stellen, an denen ein Winkel eine ganze Zahl durchschreitet, ohne daß gleichzeitig mehrere σ -Größen das gleiche tun, prinzipiell umgangen worden sind. Das war notwendig, weil gerade hier der oben (§ 1) ausgeschlossene Fall, daß der imaginäre Teil einer Seite einen unendlich großen Wert annimmt, eintreten würde.

(Eingegangen am 6. 1. 1922.)