

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 3022.

Allgemeine Störungen der Themis durch Mars und Saturn.*)

Von Carl Mönichmeyer.

In Nr. 2538 der Astr. Nachr. stellt Herr Prof. Krueger eine Revision der in seiner »Untersuchung über die Bahn des Planeten Themis etc. Helsingfors 1866« veröffentlichten allgemeinen Marsstörungen in Aussicht, da die neu hinzu gekommenen Systeme osculirender Elemente erkennen liessen, dass der den Marsstörungen zu Grunde gelegte mittlere Werth der mittleren Bewegung $\mu = 635^{\circ}635$ viel zu klein angenommen war, indem die neueren Rechnungen $\mu = 637^{\circ}365$ ergaben. Inzwischen hatte auch Hall die Masse des Mars, welche von Krueger zu $m' = \frac{1}{2680337}$ angesetzt wurde, aus den Bahnen der Mars-Trabanten neu bestimmt und $m' = \frac{1}{3093500}$ gefunden. Diese Daten machen die Marsstörungen schon wesentlicher Verbesserungen fähig.

Nachdem die ungünstige Wahl der Krueger'schen Elemente durch meine Arbeit: »Eine genäherte Berechnung der absoluten Störungen der Themis durch Jupiter. Kiel 1886« noch mehr zu Tage getreten war, machte Prof. Krueger mir den Vorschlag, die Berechnung der Marsstörungen zu wiederholen.

Die Unterschiede zwischen den ursprünglichen Elementen und den aus den Jupiterstörungen gewonnenen, welche die wahren Werthe der mittleren Elemente nahe repräsentiren werden, sind so beträchtlich — die wahre mittlere Bewegung ist jetzt $\mu = 639^{\circ}267$ —, dass man sich mit einer Revision der alten Entwicklungen, welche zudem das Resultat einer rohen Rechnung sind, nicht mehr begnügen kann. Vielmehr wird man sich entschliessen müssen, die Bestimmung der durch Mars bewirkten Störungen von Anfang an neu und möglichst scharf durchzuführen, wobei besondere Sorgfalt auf die Glieder langer Periode zu verwenden ist.

Meine Rechnung musste deshalb in grösserem Umfange angelegt werden als die frühere und unterscheidet sich von der letzteren noch besonders dadurch, dass die excentrische Anomalie der Themis bis zuletzt beibehalten wurde, während Prof. Krueger dieselbe nach der Entwicklung der störenden Kräfte durch die mittlere Anomalie ersetzt. Im Uebrigen ist die Methode in beiden Rechnungen dieselbe, wenn sich auch die Form der Grundgleichungen verschieden gestaltet; Prof. Krueger rechnet nach den von Brünnow in Nr. 1529 der Astr. Nachr. gegebenen Formeln, ich wende die Hansen'schen Fundamentalformeln, wie sie

in der »Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, erste Abhandlung« mitgetheilt sind, in unveränderter Gestalt an.

Was die Ermittlung der durch Saturn hervorgebrachten allgemeinen Störungen der Themis anlangt, so möge hier bemerkt werden, dass ich bei Beginn der Berechnung der Marsstörungen eine Bestimmung der Saturnstörungen noch nicht ins Auge fasste. Hätte ich dies damals schon beabsichtigt, so wäre es wohl wünschenswerth gewesen, die den Rechnungen zu Grunde gelegten Elemente genauer als geschehen ist, abzuleiten. Ich werde Gelegenheit nehmen, auf diesen Umstand zurückzukommen.

Zur Berechnung der Saturnstörungen wurde die Methode angewandt, welche Hansen in der »Entwicklung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel von $(r^2 + r'^2 - 2rr'H)$ « darlegt.

Diese Methode ist bekanntlich dadurch merkwürdig, dass die mechanische Quadratur, welche in der »Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode etc.« neben der analytischen Entwicklung angewendet wird, überhaupt nicht zur Verwendung kommt; sie führt häufig schnell zum Ziel und konnte auch bei Themis mit Vortheil benutzt werden.

Durch die Resultate meiner Dissertation: »Eine genäherte Berechnung der absoluten Störungen der Themis durch Jupiter« war ich in den Stand gesetzt, mir ein System mittlerer Elemente für Themis zu verschaffen. Wie daselbst angeführt ist, wurden zunächst die aus den Jupiterstörungen resultirenden $\Delta\pi$, Δe , $\Delta\mu$ und ΔL für die Epochen 1853 Mai 4.0, 1864 Aug. 20.0 und 1885 Jan. 2.0 berechnet und von den osculirenden Elementen abgezogen. Das aus diesen 3 Werthen sich ergebende Mittel stellt jedenfalls genäherte mittlere Elemente dar. Später habe ich diese Werthe nach geringen Abänderungen für die Epochen 1856 Sept. 25.0, 1858 April 14.0, 1867 Sept. 14.0, 1874 Dec. 6.0, 1878 Juni 8.0 und 1888 Nov. 2.0**) ergänzt und aus sämmtlichen 9 Systemen die den Mars- und Saturn-Störungen zu Grunde liegenden Elemente abgeleitet.

Ich will nicht behaupten, dass die so erhaltenen Elemente der Wahrheit sehr nahe kommen oder gar definitive sind, da meine Jupiterstörungen naturgemäss nur genäherte und Saturn und Mars nicht berücksichtigt sind. Ueberhaupt

*) Auszug aus einer Abhandlung, deren Veröffentlichung Verfasser sich vorbehält.

**) Nach gütiger Mittheilung von Herrn Prof. Krueger sind die osculirenden Elemente für 1888 Nov. 2.0:

$g = 165^{\circ}24'19''$; $L (1853 \text{ Mai } 5.0) = 159^{\circ}31'20''.59$; $\pi = 143^{\circ}1'43''.97$; $\varphi = 7^{\circ}40'29''.69$; $\mu = 641''.116532$.

lassen sich die mittleren Elemente nicht so genau angeben, es kommt auch nur darauf an, bei den Entwicklungen auf folgende Punkte Bedacht zu nehmen.

In die Integrationsdivisoren und Reihen-Argumente muss der wahre Werth der mittleren Bewegung eintreten, und ausserdem müssen die Argumente so beschaffen sein, dass der Ort des gestörten Planeten, abgesehen von periodischen Störungen, in jedem Zeitpunkte nahe dargestellt wird, mit anderen Worten, die mit dem wahren Werthe der mittleren Bewegung gebildeten Argumente + periodische Störungen müssen die Beträge der jedesmaligen osculirenden Argumente annähernd wiedergeben.

Untersuchen wir nun, ob die mittleren Elemente, welche die Störungen der Themis durch Jupiter geliefert haben, diesen Forderungen genügen.

Zur Ableitung der mittleren Elemente dienten die auf pag. 30 meiner Dissertation angeführten Reihen; diese gaben:

Osc.-Epoche	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$	$\Delta\pi$	ΔL
1853 Mai 4.0	-0°499	-2°009	-3°985	+2°218
1856 Sept. 25.0	-0.662	-4.640	-0.462	+0.379
1858 April 14.0	-0.696	-2.117	+0.746	-0.158
1864 Aug. 20.0	-0.741	-3.039	+1.385	-1.864
1867 Sept. 14.0	-0.428	-1.149	+4.104	-3.436
1874 Dec. 6.0	-0.351	-0.363	+5.650	-3.889
1878 Juni 8.0	-0.012	+1.409	+5.475	-4.242
1885 Jan. 2.0	+0.149	+1.466	+5.408	-3.646
1888 Nov. 2.0	+0.283	+2.155	+4.492	-3.152

L corr. für per. Störungen	$t\mu$	Mittl. L 1853 Mai 4.0	Verbess. L
169°583	—	169°583	—
29.711	- 220°192	519	+0°033
130.258	- 320.700	558	+0.049
182.170	- 732.672	498	+0.111
21.094	- 931.554	540	+0.142
129.839	- 1400.352	487	+0.213
357.093	- 1627.646	447	+0.247
63.162	- 2053.824	338	+0.312
311.586	- 2302.426	160	+0.350
$\mu = 639^{\circ}2671$		empir. Corr.	169.620
		-0°000027 t	

Als mittleren Werth der mittleren Bewegung erhalten wir $\mu = 639^{\circ}2671$, und dieser kann mit dem wahren Werthe derselben als identisch betrachtet werden.

Es wäre also die Bewegung von L um 0°0973 kleiner anzunehmen als μ oder:

$$\frac{dL}{dt} = 639^{\circ}2671 - 0^{\circ}0973 = 639^{\circ}1698$$

Das constante Glied in der Entwicklung von $\frac{d\pi}{dt}$ ist
 $= +0^{\circ}2941$

und weiter erhalten wir:

$$1853 \text{ Mai } 4.0 \quad \pi = 138^{\circ}406$$

$$g = L - \pi = 31.214$$

Hier ist zu bemerken, dass die Coefficienten der angewandten Reihen den osculirenden Werth der mittleren Bewegung ($\mu = 637^{\circ}3157$) enthalten, und dass die Argumente mit der osculirenden mittleren Bewegung $\mu = 637^{\circ}647$ (v. pag. 16 meiner Dissertation) ausgehend von $g = 30^{\circ}809$ 1853 Mai 4.0 gebildet wurden. Eine strenge Rechnung würde natürlich die Einführung der wahren mittleren Bewegung fordern, aber darauf kam es bei der Ableitung der mittleren Elemente, welche den Mars-Störungen zu Grunde gelegt wurden, nicht an. Der Gleichmässigkeit wegen bin ich bei den Saturn-Störungen von dem einmal angewandten Elementensystem nicht abgegangen; geringe Abweichungen können die Störungen erster Ordnung nur unmerklich beeinflussen.

Nach der obigen Rechnung könnte man als Aenderung des Arguments g annehmen:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{dL}{dt} - \frac{d\pi}{dt} = 639^{\circ}1698 - 0^{\circ}2941 = 638^{\circ}8757.$$

Ich ziehe es aber vor, von der Bewegung der Länge des Perihels abzusehen, da deren Mitnahme nur Glieder 2. Ordnung hervorbringt, welche in diesem Falle nicht einseitig berücksichtigt werden dürfen, auch glaube ich selbst für längere Zeit den Ort der Themis genügend gut darzustellen, wenn als Aenderung der Argumente $\mu = 639^{\circ}2671$ anstatt $\frac{dg}{dt} = 639^{\circ}1698$ gewählt wird. Damit ist, wie auch in aller Strenge geschehen muss, in den Argumenten die Aenderung der mittleren Anomalie der wahren mittleren Bewegung gleichgesetzt.

Für die vorliegenden Epochen osculirender Elemente erhalte ich demnach:

$$\text{mittl. } g = g_0 + \mu(t - t_0)$$

oder mit Einsetzung obiger Zahlenwerthe:

$$\text{mittl. } g = 31^{\circ}214 + 639^{\circ}2671(t - 1853 \text{ Mai } 4.0)$$

Osc.-Epoche	mittl. g	Δg	g osculirend. Entwickl. strenge Werthe
1853 Mai 4.0	31°214	+6°203	37°417 37°594
1856 Sept. 25.0	251.406	+0.841	252.247 252.142
1858 April 14.0	351.914	-0.904	351.010 350.944
1864 Aug. 20.0	43.886	-3.249	40.637 40.232
1867 Sept. 14.0	242.768	-7.540	235.228 234.934
1874 Dec. 6.0	351.566	-9.539	342.027 342.098
1878 Juni 8.0	218.860	-9.717	209.143 209.177
1885 Jan. 2.0	285.038	-9.054	275.984 275.715
1888 Nov. 2.0	173.640	-7.644	165.996 165.405

Die Vergleichung der vorstehenden Werthe giebt eine befriedigende Darstellung, und somit halte ich $\mu = 639^{\circ}2671$ für die richtige Aenderung des Arguments g .

Hiernach lauten die der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente, wenn die Zeit t in Tagen ausgedrückt wird:

Mittlere Elemente
bezogen auf das mittl. Aequ. 1860.0.

Themis. Epoche 1853 Mai 4.0.

$$\begin{aligned} g &= 31^{\circ}214 [1853 \text{ Mai } 4.0] + 639^{\circ}2671 t \\ \pi &= 138.406 \\ \omega &= 102.606 \\ \theta &= 35^{\circ}48' 0'' \text{ } \left. \begin{array}{l} \text{arithm. Mittel aus 8 Systemen} \\ \text{oscul. Elemente} \end{array} \right\} \\ i &= 0^{\circ}48' 42.0 \\ \varphi &= 7^{\circ}441; \quad e = 0.129505 \\ \mu &= 639^{\circ}2671 \\ \log a &= 0.496217; \quad m = 0 \end{aligned}$$

Mars. Epoche 1850 Jan. 1.0.

$$\begin{aligned} g' &= 29^{\circ}157 [1853 \text{ Mai } 4.0] + 1886^{\circ}518316 t \\ \pi' &= 333.438 \\ \omega' &= 284^{\circ}56' 2''.8 \\ \theta' &= 48^{\circ}30' 13.2 \\ i' &= 1^{\circ}51' 5.0 \\ \varphi' &= 5^{\circ}21' 4.5; \quad e' = 0.093261 \\ \mu' &= 1886^{\circ}518316 \\ \log a' &= 0.1828971; \quad m' = 1/3093500 \end{aligned}$$

Saturn. Epoche 1850 Jan. 1.0.

$$\begin{aligned} g' &= 325^{\circ}5451 [1853 \text{ Mai } 4.0] + 120^{\circ}454776 t \\ \pi' &= 90^{\circ}15' 19''.0 \\ \omega' &= 337^{\circ}47' 39.7 \\ \theta' &= 112^{\circ}27' 39.3 \\ i' &= 2^{\circ}29' 37.5 \\ \varphi' &= 3^{\circ}12' 45.6; \quad e' = 0.056042 \\ \mu' &= 120^{\circ}454776 \\ \log a' &= 0.9794964; \quad m' = 1/3501.6 \end{aligned}$$

Die Elemente der störenden Planeten sind den Le-verrier'schen Tafeln entnommen; a' ist berechnet aus:

$$a'^{3/2} = \frac{k}{\sin i''} \cdot \frac{\sqrt{1+m'}}{\mu'}.$$

Wie schon Eingangs erwähnt ist, wurden die in der Länge auftretenden Ungleichheiten langer Periode mit besonderer Sorgfalt ermittelt.

Bilden wir das Verhältniss der mittleren Bewegungen Mars-Themis, welches mit m bezeichnet werden möge, so wird $m = 2.9510643$.

Daraus geht hervor, dass die Glieder, welche die Quadrate der kleinsten Divisoren erhalten, den Argumenten $(3, -1)$ $(6, -2)$ $(9, -3)$ angehören.

Es wird nämlich:

$$\begin{aligned} 3 - m &= +0.0489357^*) \\ 6 - 2m &= +0.0978714 \\ 9 - 3m &= +0.1468071 \end{aligned}$$

und der dem ersten Divisor am nächsten stehende, aber nicht in Betracht kommende gehört dem Argument $(59, -20)$ an.

Die kleinsten Divisoren treten ausserdem bei dem den obigen Argumenten unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Argument auf, mithin wurden zuvörderst die Coefficienten der Argumente

ε	ε'	ε	ε'	ε	ε'
2	-1	5	-2	8	-3
3	-1	6	-2	9	-3
4	-1	7	-2	10	-3

mit mehr Decimalen angesetzt als die Coefficienten der übrigen Argumente.

Das Verhältniss der mittleren Bewegungen Saturn-Themis ist: $m = 0.1884264$, der kleinste Divisor also: $1 - 5m = 0.0578680$.

Ohne auf die Details der Entwicklungen hier näher einzugehen, gebe ich nachstehend in Hansen'scher Bezeichnung die Störungen der mittleren Länge, des Logarithmus des Radiusvector und der auf der Bahnebene senkrecht stehenden Coordinate.

*) Die Bewegung des Arguments $(3g - g')$, welche Prof. Krueger zu $+20^{\circ}3856$ annimmt, wird jetzt: $+31^{\circ}2830$.

Mars.

ε	ε'	$\mu \delta z$		v	
		sin	cos	cos	sin
0	0		$+0^{\circ}17155 \mu t$	$+0^{\circ}00004 \mu t$	
1	0	$-0^{\circ}00064 \mu t$	$-0.00832 \mu t$	$+0.00033 \mu t$	$-0^{\circ}00416 \mu t$
1	0	0.00	0.00	$+0.01$	0.00
2	0	$+0.00002 \mu t$	$+0.00027 \mu t$		
0	-1	— 0.01	0.00	0.00	0.00
1	-1	0.00	+ 0.01	— 0.04	— 0.01
2	-1	+ 0.85	— 0.39	+ 0.39	+ 0.18
3	-1	+ 7.92	— 4.43	— 0.21	— 0.12
4	-1	— 0.03	+ 0.02	0.00	0.00
3	-2	+ 0.01	0.00	+ 0.01	0.00
4	-2	+ 0.02	— 0.02	+ 0.01	+ 0.01
5	-2	— 0.20	+ 0.18	— 0.09	— 0.08
6	-2	— 0.59	+ 0.63	+ 0.03	+ 0.03
8	-3	+ 0.02	— 0.04	+ 0.01	+ 0.02
9	-3	+ 0.03	— 0.09	0.00	— 0.01

$$u : \cos i = +0^{\circ}00001 \mu t + 0^{\circ}00047 \mu t \sin \varepsilon - 0^{\circ}00009 \mu t \cos \varepsilon$$

Saturn.

ε	ε'	$\mu \delta z$		v		$u : \cos i$	
		sin	cos	cos	sin	sin	cos
0	0						— 0.01
0	0		— 2.42177 μt	+ 0.00427 μt			+ 0.01057 μt
1	0	— 0.06540 μt	— 0.44685 μt	+ 0.03298 μt	— 0.22343 μt	+ 0.01172 μt	— 0.08164 μt
1	0	+ 0.81	— 0.11	— 0.18	— 0.03	+ 0.04	+ 0.01
2	0	+ 0.00214 μt	+ 0.01447 μt				
2	0	— 0.04	0.00	+ 0.01	0.00		
— 1	— 1	+ 0.09	— 0.04	+ 0.07	+ 0.03	— 0.02	— 0.05
0	— 1	+ 0.76	— 1.85	+ 0.43	— 0.26	— 0.08	— 0.04
1	— 1	— 7.00	— 8.69	+ 2.98	— 3.69	+ 0.07	+ 0.02
2	— 1	+ 0.14	+ 0.06	+ 0.05	— 0.14	— 0.01	— 0.02
3	— 1	0.00	+ 0.01	0.00	0.00		
— 1	— 2	0.00	0.00	0.00	+ 0.01	0.00	+ 0.01
0	— 2	— 0.06	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.48	— 0.01	+ 0.08
1	— 2	— 2.60	+ 12.95	+ 0.99	+ 5.31	0.00	— 0.28
2	— 2	— 0.76	+ 6.51	+ 0.55	+ 4.55	— 0.01	— 0.02
3	— 2	+ 0.06	— 0.34	— 0.02	— 0.05		
0	— 3	0.00	+ 0.01	— 0.02	+ 0.06	+ 0.01	+ 0.01
1	— 3	+ 0.83	+ 2.56	— 0.35	+ 0.79	— 0.02	— 0.03
2	— 3	+ 1.38	+ 1.17	— 0.80	+ 0.82	— 0.05	+ 0.04
3	— 3	— 0.58	+ 0.31	+ 0.41	+ 0.28		
4	— 3	+ 0.04	— 0.02	— 0.01	0.00		
0	— 4	0.00	0.00	— 0.01	0.00		
1	— 4	+ 0.39	+ 0.43	— 0.10	+ 0.06		
2	— 4	+ 0.42	— 0.15	— 0.25	— 0.06		
3	— 4	— 0.03	+ 0.18	+ 0.02	+ 0.13		
4	— 4	— 0.10	— 0.03	+ 0.08	— 0.02		
5	— 4	+ 0.01	0.00	0.00	0.00		
1	— 5	+ 0.52	+ 0.31	— 0.02	— 0.01		
2	— 5	+ 0.04	— 0.24	— 0.02	— 0.12		
3	— 5	+ 0.03	+ 0.03	— 0.02	+ 0.02		
4	— 5	— 0.03	+ 0.02	+ 0.03	+ 0.01		
5	— 5	— 0.01	— 0.02	+ 0.01	— 0.02		

Die periodischen Breitenstörungen sind so klein, dass ich sie hätte streichen können, der einzige vielleicht in Betracht kommende Coefficient gehört dem Argument (1, — 2) an.

Zusatz.

Nachdem die Saturn- und Mars-Störungen ermittelt waren, lag es nahe, an eine Vereinigung der in meiner Dissertation gegebenen Jupiterstörungen mit denen des Saturn und Mars zu denken. Ich habe mich nicht überzeugen können, dass aus einer solchen Rechenoperation etwas zuverlässiges herauskommt, und werde in dieser Ansicht von kompetenter Seite bestärkt. Die Reihen für die Jupiterstörungen sind zu ungenau, und die vernachlässigten Glieder, hauptsächlich die dem Argument (3g — 6g') zukommenden, repräsentiren Werthe, an welche die Störungen durch Saturn, geschweige denn die durch Mars kaum heranreichen.

Will man definitive mittlere Elemente der Themis geben, so wird man die Jupiterstörungen von Grund aus neu entwickeln müssen; die bedeutenden Störungen, welchen Themis durch Jupiter unterworfen ist, lassen es aber bei der jetzt noch vorhandenen Unsicherheit der Grenzen, zwischen denen die osculirenden Elemente sich bewegen, rathsam erscheinen, von einer strengen Ermittlung der allgemeinen Jupiterstörungen vorläufig abzusehen und diese Störungen wie bisher durch Quadraturen zu berechnen.

Bonn 1890 Dec. 10

C. Mönichmeyer.