

**STUDIO TEORICO DI UNA COPPIA DI CIRCUITI INDUTTIVI IN PARALLELO
SU CORRENTE ALTERNATIVA A POTENZIALE COSTANTE.**

Nota di A. G. ROSSI.

Parte I.

1. Mi propongo di studiare in questa Nota il sistema di due avvolgimenti simmetrici che ho trattato altra volta ¹⁾, considerandoli ora come due rami in parallelo su una rete di corrente alternativa a potenziale costante. È noto come una corrente alternativa si possa in generale, mediante biforcazione in due rami aventi differenti reattanze, dividere in due altre correnti di caratteristiche arbitrarie ²⁾.

Non mi pare inutile il ricordare anzitutto il principio di costruzione della coppia di avvolgimenti speciale di cui sarà questione. Sopra un nucleo annulare prismatico di ferro dolce, convenientemente laminato, sono avvolti quattro ordini di spire uguali, uniformi e giustapposti su l'intera superficie del nucleo. Questi quattro ordini sono rappresentati nella fig. 1, e per chiarezza allo schema furono distribuiti in tre parti distinte: le estreme A e B e la mediana C₁ C₂ costituiscono i quattro ordini, in realtà giustapposti. Chiamo ciascuno di essi *un elemento* dell'apparecchio. Ciascun elemento è formato dallo stesso numero di spire, supposte uguali, avvolte in circuito chiuso su se stesso. Per fissare le idee, riteniamo che i quattro ordini di spire corrano sul nucleo tutte nel medesimo senso.

Se a ciascun elemento viene addotta una corrente in due punti diametralmente opposti, come in un'armatura Gramme, si hanno in ciascuno due elettromagneti semicircolari uguali e congiunti in opposizione di flussi; in questi punti diametrali

1) Accademia Reale delle Scienze di Torino, XXXIII, 17 Aprile 1898. — Nuovo Cimento, Dicembre 1898.

2) Chiamo *caratteristiche* di una coppia di correnti alternative: il rapporto della due ampiezze $\frac{e'}{e''}$ e la differenza di fase ϕ .

avrà luogo quella dispersione magnetica fuori delle spire che determina la polarità e il campo di forza dell'elemento. E *ammetteremo* che tutto il flusso uscente dalle spire attraversi il nucleo centrale, senza cioè passare nell'aria circostante.

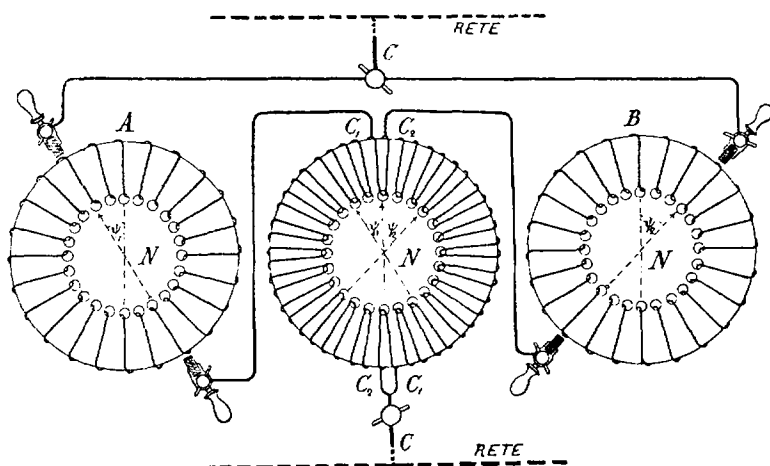


Fig. 1.

Per assegnare la forza magnetizzante di ciascun elemento, corrispondente ad una data corrente che lo percorra nel modo che s'è detto, a noi basta considerare una spirale d'avvolgimento a tamburo equivalente all'elemento come forza magnetomotrice; cioè una spirale di n spire totali, supposte avvolte nel piano, normale all'asse dell'elemento, che passa pel centro del toro e capaci, con la stessa corrente, di produrre un flusso equivalente a quello che esce dal toro secondo quest'asse magnetico. Sarà cioè $4\pi n$ la forza magnetomotrice equivalente a ciascun elemento per la corrente unitaria. Ora il coefficiente di autoinduzione di un sistema di spire uguali, in serie, varia come il quadrato del numero delle spire; per un elemento, sarà proporzionale ad n^2 . E se due elementi uguali sono giustapposti, in serie sulla stessa corrente, con gli assi magnetici coincidenti in direzione e senso, la forza magnetomotrice per la corrente *uno* sarà $4\pi(2n)$ e il coefficiente di autoinduzione sarà proporzionale a $(2n)^2$. Se ora, *cœl. par.*, le direzioni positive degli assi magnetici di questi

due elementi si portano a fare fra loro un angolo ψ , la forza magnetizzante diventerà, in direzione della bisettrice dell'angolo ψ , $4\pi \left(2n \cos \frac{1}{2}\psi\right)$, onde il coefficiente di autoinduzione, per ψ variabile fra 0° e 360° , sarà proporzionale a $(2n)^2 \cdot \frac{1}{2} (1 \pm \cos\psi)$. Variando l'angolo ψ fra 0° e 360° , le variazioni della forza magnetizzante lungo l'asse della coppia di elementi potranno essere rappresentate con un diagramma polare analogo a quello di Zeuner.

Ora, l'intero apparecchio consiste in due coppie di elementi come la coppia ora trattata, avvolti sullo stesso nucleo: A. C_1 e C_2 . B. Si deve immaginare poi — e questi sono i caratteri essenziali del sistema — che i due elementi C_1 e C_2 vengano stabilmente mantenuti con i loro assi magnetici in direzione coincidenti; e che le direzioni degli assi degli elementi estremi dello schema, A e B, si possano far variare ad arbitrio, rispetto alla direzione fissa dell'asse $C_1 \cdot C_2$.

Codesta condizione si raggiunge sezionandoli in un numero pari e grande quanto è possibile di spirali elementari uguali, e fornendo ciascheduno di un collettore, a simiglianza di un'armatura di dinamo. Due portacontatti diametrali, che nomineremo A e B, introducono la corrente nell'apparecchio. La fig. 1 rappresenta lo schema complessivo dei circuiti, ove si vede il senso costante dei quattro avvolgimenti (ψ_1 e ψ_2 essendo minori di π) e il collegamento delle due coppie di elementi A. C_1 e C_2 . B, ciascheduna coppia in un ramo derivato da un circuito principale C, *inserito sui due fili di una distribuzione a cosiddetto potenziale costante*.

In tali condizioni costruttive, si deve ammettere che i due rami posseggano la stessa resistenza, r , costante.

Se L_m indica il valore del coefficiente di autoinduzione di ciascuno dei due rami allorchè gli angoli ψ_1 e ψ_2 sono zero, cioè quando gli assi magnetici di tutti e quattro gli elementi coincidono in direzione e senso, è facile rilevare (Cfr. Nota citata) che i coefficienti di autoinduzione L_1 ed L_2 ed il coefficiente di induzione mutua M hanno per espressioni generali:

$$L_1 = L_m \frac{1 \pm \cos \psi_1}{2}, \quad L_2 = L_m \frac{1 \pm \cos \psi_2}{2}$$

$$M = L_m \cdot \frac{1}{4} [1 + \cos(\psi_1 + \psi_2 \pm 2k\pi) \pm \cos \psi_1 \pm \cos \psi_2],$$

ove k può prendere i valori $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \dots$

L_m rappresenta un coefficiente, dipendente dalla forma delle spire e dalla permeabilità del nucleo. Si può scrivere:

$$L_m = \frac{4\pi N^2}{R}, \quad \text{con } N = 2n,$$

ove R sia una riluttanza magnetica, che supporremo per ora costante. Facendo cioè lo studio dell'apparecchio *senza ferro*, ci permettiamo però di prevedere, o di ammettere, che le modificazioni apportate alla teoria dall'introduzione delle proprietà del nucleo magnetico siano quelle medesime che hanno luogo pel trasformatore generale. Con questa ipotesi, noi ci contenteremo di considerare i coefficienti di induzione invece dei flussi, e precisamente considereremo questi coefficienti come funzioni delle sole due variabili di conformazione dei circuiti, ψ_1 e ψ_2 .

Il coefficiente di mutua induzione M fra due dati avvolgimenti in presenza, è in generale passibile del doppio segno. A seconda cioè che in una determinata direzione i loro flussi danno componenti nello stesso senso o di sensi contrarii, il coefficiente di mutua induzione va contato col segno \pm .

Nel nostro caso il polinomio che rappresenta M , risulta appunto positivo o negativo a seconda della conformazione, o a seconda dei segni che si prendono in corrispondenza nelle espressioni di L_1 ed L_2 . Riducendo questo quadrimio, si ottiene in generale

$$M = \pm \sqrt{L_1 L_2} \cos \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2),$$

relazione che accettiamo per l'uso teorico, con gli stessi fondamenti che permettono di ammettere quantitativamente

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

nel caso di un comune trasformatore a indotti conassiali, pel quale è $\psi_1 + \psi_2 = 0$.

Ora, la coppia dei coefficienti di autoinduzione, *per ogni data coppia di angoli* ψ_1 e ψ_2 , può assumere quattro valori differenti ed a ciascuna coppia corrispondono due valori di M , fra loro uguali e di segni contrarii. Si ottengono questi otto valori di M , combinando fra loro in tutti i modi possibili i segni del quadrinomio che lo esprime, come segue.

Poniamo per brevità $\frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) = \sigma$, e indichiamo (figura 2, 3) rispettivamente con h_1 ed h_2 le direzioni dei campi magnetici risultanti dalla composizione delle ampère-spire di A, C_1 e di C_2, B , apponendo un accento alle direzioni che corrispondono alla aggiunta di π ad uno degli angoli ψ_1 o ψ_2 ; è chiaro che questa aggiunta di π a uno degli angoli ψ fa ruotare di $\frac{\pi}{2}$ la direzione del campo h corrispondente.

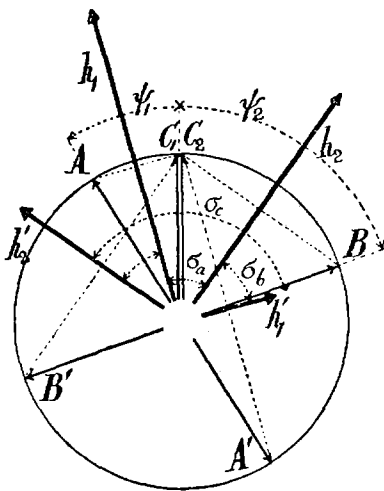


Fig. 2.

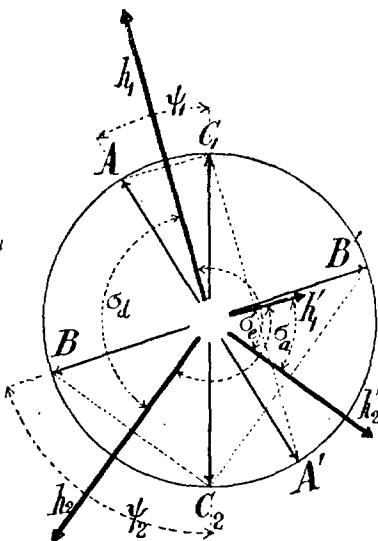


Fig. 3.

I. Gli assi degli elementi C_1 e C_2 coincidono in direzione e senso (fig. 2).

a) Gli angoli ψ_1 e ψ_2 essendo entrambi minori di π , si ha:

$$M_a = + \cos \frac{\psi_1}{2} \cos \frac{\psi_2}{2} \cos \sigma_a, \quad \sigma_a = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) = \widehat{h_1 h_2}.$$

b) Se si aggiunge π ad uno degli angoli ψ , l'angolo σ compreso fra h_1 e h_2 diviene il complementare di σ_a . Si hanno con ciò due valori diversi per

$$M_b = + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \sigma_a, \quad \sigma_b = \frac{\pi}{2} - \sigma_a = \widehat{h_1 h'_2} = \widehat{h'_1 h_2}.$$

c) Se si aggiunge π a entrambi gli angoli ψ , l'angolo σ diviene il supplementare di σ_a :

$$M_c = - \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2} \cos \sigma_a, \quad \sigma_c = \pi - \sigma_a = \widehat{h'_1 h'_2}.$$

II. *Gli assi di C_1 e C_2 coincidono in direzione e sono in opposizione di sensi* (fig. 3). Si hanno i quattro casi corrispondenti aggiungendo π al valore di σ nei quattro precedenti, ordinatamente:

$$d) \quad M_d = - \cos \frac{\psi_1}{2} \cos \frac{\psi_2}{2} \cos \sigma_a, \quad \sigma_d = \sigma_a + \pi = \widehat{h_1 h_2}.$$

$$e) \quad M_e = - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \sigma_a, \quad \sigma_e = \frac{\pi}{2} + \sigma_a = \widehat{h_1 h'_2} = \widehat{h'_1 h_2}.$$

$$f) \quad M_f = + \sin \frac{\psi_1}{2} \sin \frac{\psi_2}{2} \cos \sigma_a, \quad \sigma_f = \sigma_a = \widehat{h'_1 h'_2}.$$

Si ottengono insomma per M tre espressioni di forma diversa; in tutto, otto valori.

Questo sistema di avvolgimenti deformabili presenta dunque la proprietà che il coefficiente di mutua induzione fra le due spirali $A \cdot C_1$ e $C_2 \cdot B$ è una funzione determinata e continua dei soli coefficienti di autoinduzione; in altri termini, che il *coefficiente di dispersione* del flusso si può esprimere in funzione dei coefficienti di autoinduzione, ossia delle variabili stesse ψ_1 e ψ_2 dalle quali singolarmente dipendono L_1 ed L_2 .

Il coefficiente di dispersione ζ del flusso magnetico di un sistema di due correnti è definito dalla relazione ben nota :

$$M^2 = L_1 L_2 (1 - \zeta)^2,$$

cioè :

$$\zeta = 1 - \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

È un coefficiente che varia da *zero* ad *uno* quando M^2 varia dal suo massimo $L_1 L_2$ al suo minimo, zero.

La grandezza

$$\zeta \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{L_1 L_2} - M$$

misura il *flusso disperso teorico*: è un numero di linee di induzione, corrispondente alla corrente unitaria nei due circuiti, espresso dalla media geometrica dei numeri di linee di induzione (ζL_1 e ζL_2) che sono concatenate con ciascuno dei due circuiti e non con l'altro. In questi termini, ζ non dipende che dalla conformazione del sistema dei due circuiti.

Nel nostro caso, si ha, per esempio,

$$\zeta = 1 - \frac{\cos \frac{\psi_1}{2} \cos \frac{\psi_2}{2} \cos \sigma}{\cos \frac{\psi_1}{2} \cos \frac{\psi_2}{2}} = 1 - \cos \sigma;$$

cioè, quando i coefficienti di a. i. sono rispettivamente proporzionali a $\cos^2 \frac{\psi_1}{2}$ e a $\cos^2 \frac{\psi_2}{2}$, il coefficiente di m. i. è proporzionale al prodotto $\cos \frac{1}{2} \psi_1 \cos \frac{1}{2} \psi_2 \cdot \cos \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2)$ e il coefficiente di dispersione vale

$$\zeta = 1 - \cos \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2) = 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2}.$$

Per esaminare il comportamento dei due avvolgimenti quando costituiscano due rami derivati da una corrente principale, secondo lo schema fig. 1, dobbiamo dapprima studiare la teoria del caso generale. Però, introdurremo subito la con-

dizione speciale pel nostro apparecchio, r la stessa per due rami, il che semplifica di molto il nostro compito.

2. Formole e costruzioni grafiche per la ripartizione di una corrente alternativa sinusoidale in due rami derivati aventi la stessa resistenza ohmica r , i coefficienti di autoinduzione L_1, L_2 e il coefficiente di mutua induzione M . — Supposta costante la permeabilità, le equazioni delle forze elettromotrici nei due rami sono le ben note:

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} rc_1 + L_1 \frac{dc_1}{dt} \pm M \frac{dc_2}{dt} \\ rc_2 + L_2 \frac{dc_2}{dt} \pm M \frac{dc_1}{dt} \end{aligned} \right\} = f(t)$$

ove $f(t)$ indichi la f. e. m. applicata ai poli della biforcazione: $f(t) = E \sin \omega t$. Se ne deducono per vie conosciute le altre due equazioni da cui dipendono partitamente le caratteristiche delle correnti c_1 e c_2 :

$$(2) \quad \begin{aligned} (L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 c_1}{dt^2} + r(L_1 + L_2) \frac{dc_1}{dt} + c_1 r^2 &= r f(t) + (L_2 \mp M) f'(t), \\ (L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 c_2}{dt^2} + r(L_1 + L_2) \frac{dc_2}{dt} + c_2 r^2 &= r f(t) + (L_1 \mp M) f'(t). \end{aligned}$$

Integrando queste equazioni, porremo per brevità:

$$(3) \quad \lambda^2 = r^2 \omega (L_1 + L_2), \quad \rho^2 = r^2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2),$$

e nello sviluppo delle formole seguenti sostituiremo anche, sempre *omogeneamente*,

$$(4) \quad \lambda'^2 = r^2 \omega (L_1 + L_2 \mp 2M), \quad \rho'^2 = r^2 - \omega^2 (L_1 \mp M)(L_2 \mp M).$$

$$(5) \quad \lambda''^2 = r^2 \omega (L_1 - L_2), \quad \rho''^2 = r^2 + \omega^2 (L_1 \mp M)(L_2 \mp M).$$

Queste posizioni hanno, ovviamente, le dimensioni

$$[l t^{-1}]^2.$$

L'integrazione delle (2) fornisce le espressioni delle ampiezze e delle fasi delle correnti derivate, in funzione delle

caratteristiche dei circuiti e della f. e. m. applicata ai poli. Se queste due correnti sono della forma:

$$c_1 = c' \sin(\omega t - \phi_1), \quad c_2 = c'' \sin(\omega t - \phi_2),$$

si ottiene:

$$(6), (7) \quad \begin{aligned} c' &= E \frac{\sqrt{r^2 + \omega^2 (L_2 \mp M)^2}}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}, \quad \phi_1 = \arctg \frac{\lambda^2}{\rho^2} - \arctg \frac{\omega(L_2 \mp M)}{r}, \\ c'' &= E \frac{\sqrt{r^2 + \omega^2 (L_1 \mp M)^2}}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}, \quad \phi_2 = \arctg \frac{\lambda^2}{\rho^2} - \arctg \frac{\omega(L_1 \mp M)}{r}. \end{aligned}$$

Il rapporto delle ampiezze è:

$$(8) \quad \frac{c'}{c''} = \frac{\sqrt{r^2 + \omega^2 (L_1 \mp M)^2}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 (L_2 \mp M)^2}} = \frac{J'}{J''},$$

e la differenza di fase delle due correnti derivate:

$$(9) \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{r \omega (L_1 - L_2)}{r^2 + \omega^2 (L_1 \mp M)(L_2 \mp M)} = \frac{\lambda'^2}{\rho'^2}.$$

Gli *impedimenti*, che diremo *effettivi*, nei due rami sono dunque:

$$(10) \quad J_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 (L_1 \mp M)^2}}, \quad J_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}{\sqrt{r^2 + \omega^2 (L_2 \mp M)^2}}.$$

Diremo *fattori d'impedimento* le grandezze J' e J'' relative ai due rami: la (8) esprime così la nota proposizione che *il rapporto delle ampiezze delle correnti nei due rami è uguale al rapporto inverso dei fattori d'impedimento*. E si ha insomma nelle (6):

$$(6') \quad c' = \frac{E}{J_2}, \quad c'' = \frac{E}{J_1}; \quad \frac{J_1}{J_2} = \frac{J''}{J'}.$$

La mutua induzione ha effetti contrarii nei due casi $\pm M$. Se M è positivo, se cioè le due correnti producono flussi magnetici nello stesso senso, l'induttanza di ciascun ramo viene diminuita. Se M è negativo, cioè se le correnti producono flussi antagonisti, l'induttanza viene aumentata.

Le espressioni (10) degli impedimenti effettivi consistono nel rapporto fra il coefficiente comune $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ e i corrispondenti fattori d'impedimento, rapporto che, ovviamente, ha le dimensioni $[l t^{-1}]$.

Il coefficiente comune

$$(11) \sqrt{\rho^2 + \lambda^2} = \sqrt{\rho^2 + \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)^2 + \rho^2 \omega^2 [(L_1 + L_2)^2 - 2(L_1 L_2 - M^2)]},$$

non dipende dal segno di M , ma solo dai valori relativi di L_1 , L_2 , M , cioè dal valore della *dispersione del flusso d'induzione*. Limitiamoci per ora a notare che quando la dispersione si annulla, tale coefficiente si riduce ad

$$\rho \sqrt{\rho^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}.$$

Questo radicale ha in generale un valore maggiore di uno qualsiasi dei fattori d'impedimento J' ed J'' ; poichè, per $L_1 L_2 = M^2$, il valore di M è compreso fra L_1 ed L_2 , ed anche se si prende in J' ed J'' il segno inferiore $+$, che corrisponde ad M negativo, il detto radicale è sempre maggiore di ciascuno di essi; *a fortiori*, per $L_1 L_2 > M^2$.

Il coefficiente $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ conserva poi lo stesso posto nella espressione dell'*impedimento effettivo del ramo equivalente*, che diremo J .

Infatti, se la corrente principale (o quella che passerebbe nel ramo equivalente) è della forma

$$c_3 = c \sin (\omega t - \gamma)$$

si ha dalle (6), (7):

$$c = \sqrt{c'^2 + c''^2 + 2c'c''\cos\phi}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{c' \sin \phi_1 + c'' \sin \phi_2}{c' \cos \phi_1 + c'' \cos \phi_2},$$

e cioè, per le (6'),

$$(12) \quad c = E \frac{\sqrt{J'^2 + J''^2 + 2J'J''\cos\phi}}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}, \quad \gamma = \arctg \frac{\lambda^2}{\rho^2} - \arctg \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\rho^2}.$$

L'*impedimento effettivo del ramo equivalente* è dunque

$$(13) \quad J = \frac{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}{\sqrt{J'^2 + J''^2 + 2J'J''\cos\phi}} = \frac{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}}{J_0}.$$

E si ha, cioè, la nota proposizione: *l'impedimento (effettivo) del ramo equivalente vale l'inverso della somma vettoriale degli inversi degli impedimenti (effettivi) nei due rami.*

In quanto alla grandezza J_0 , si trova:

$$(14) \quad J_0 = 2 \sqrt{r^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 \mp M \right)^2}.$$

Notiamo il caso limite

$$L_1 = L_2 = M.$$

Se M agisce positivamente:

$$J_0 = 2r, \quad J' = J'' = r, \quad \sqrt{\rho^2 + \lambda^2} = r \sqrt{r^2 + 4\omega^2 L_1^2};$$

e quindi:

$$J = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \omega^2 L_1^2}$$

il sistema, cioè, equivale in tal caso ad un ramo unico avente una resistenza uguale alla metà ed una autoinduzione uguale a quella di ciascun ramo derivato.

Se M agisce negativamente:

$$J_0 = 2 \sqrt{r^2 + 4\omega^2 L_1^2} = 2J' = 2J'' = \frac{2}{r} \sqrt{\rho^2 + \lambda^2};$$

e quindi

$$J = \frac{1}{2} r;$$

il sistema equivale a due rami in derivazione, ciascuno di resistenza ohmica r e privi di reattanza.

Interessa ora di notare sulla (11) che $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ può mettersi sotto la forma del prodotto di due fattori omogenei con

un impedimento, se si considerano due coefficienti di induzione fittizii Δ_1 e Δ_2 , tali che si abbia:

$$(11\ a) \quad \Delta_1 + \Delta_2 = L_1 + L_2 \quad \text{e} \quad \Delta_1 \Delta_2 = L_1 L_2 - M^2,$$

e quindi:

$$\frac{\Delta_1 \Delta_2}{L_1 L_2} = [1 - (1 - \zeta)][1 + (1 - \zeta)] = \zeta(2 - \zeta).$$

Potremo scrivere, cioè:

$$(11') \quad \sqrt{\rho^2 + \lambda^2} = \sqrt{\rho^2 + \omega^2 \Delta_1^2} \sqrt{\rho^2 + \omega^2 \Delta_2^2} = \Delta_1 \Delta_2,$$

con

$$(11'') \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{2} \left\{ L_1 + L_2 + \sqrt{(L_1 + L_2)^2 - 4(L_1 L_2 - M^2)} \right\} \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2} \left\{ L_1 + L_2 - \sqrt{(L_1 + L_2)^2 - 4(L_1 L_2 - M^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Ci limiteremo per ora a notare che il rapporto $\Delta_2 : \Delta_1$ varia dal valore zero al valore $L_2 : L_1$ quando si faccia variare M^2 dal suo massimo $L_1 L_2$ al suo minimo, zero; corrispondentemente, il prodotto $\Delta_1 \Delta_2$, che definisce la dispersione teorica del flusso d'induzione, varia da zero ad $L_1 L_2$. Se i due rami costituiscono un sistema di due avvolgimenti deformabili, non è in generale possibile discutere le variazioni di $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ sinchè non sieno note le leggi secondo cui variano partitamente L_1 , L_2 , M . Perciò, in generale, non possiamo qui considerare che la *dispersione per dati valori di L_1 , L_2* .

Riterremo dunque per ora che la grandezza $\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}$ vale il prodotto di due impedimenti i quali possiamo denominare *impedimenti medii di dispersione* o, più brevemente, *impedimenti di dispersione*.

Allora (11') gli *impedimenti effettivi dei due rami consistono nel rapporto fra il prodotto degli impedimenti di dispersione e il corrispettivo fattore d'impedimento*, e l'*impedimento nel ramo equivalente è il rapporto fra il pro-*

dotto degli impedimenti di dispersione e la somma vettoriale dei fattori d'impedimento nei due rami:

$$J_1 = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{J'}, \quad J_2 = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{J''}, \quad J = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{J_0}.$$

A questo punto ci conviene stabilire i diagrammi delle forze elettromotrici per i due casi $\pm M$. Nelle fig. 4 e 5 che li rappresentano, gli stessi punti sono indicati con le stesse lettere.

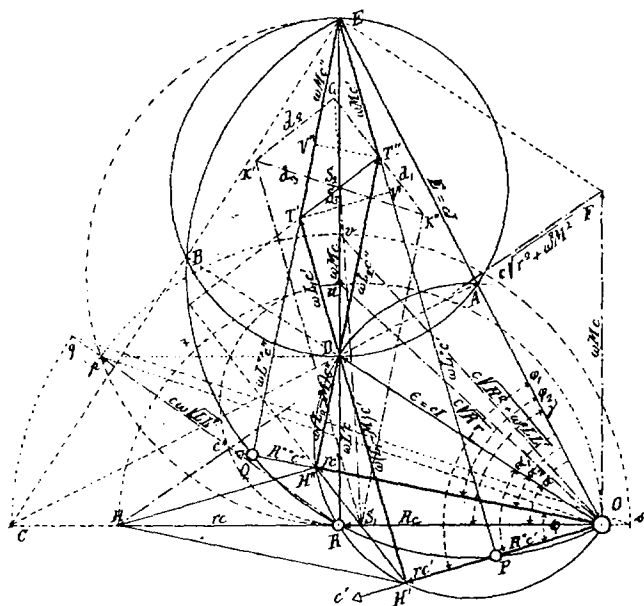


Fig. 4.

Prendiamo due direzioni Oc' ed Oc'' comprendenti in O l'angolo ϕ di differenza di fase fra le due correnti derivate, e portiamo su tali direzioni nel senso positivo i segmenti rc' ed rc'' , equipollenti, cioè, alle forze elettromotrici attive o cadute di tensione ohmiche nei due rami.

Il parallelogrammo $OH'H''$ sarà simile al parallelogrammo che si potrebbe costruire sulle correnti massime od efficaci, in grazia della supposta uguaglianza fra le resistenze ohmiche dei due rami. Questa particolarità del sistema ci permette di

conoscere tosto la direzione della corrente principale, o nel ramo equivalente, con la sola conoscenza delle caratteristiche $\left(\frac{c'}{c}, \phi\right)$ delle due correnti. \overline{OH} sarà dunque la direzione della corrente c . Il segmento OH misura poi, ovviamente, la *grandezza cr.*

Costruiti i segmenti $\omega L_1 c'$ ed $\omega L_2 c''$, forze elettromotrici di autoinduzione nei due rami, li porteremo come vettori a partire dai punti H' ed H'' risp. normali alle correnti nel senso della rotazione positiva dei vettori, che per noi è quella degli indici d' un orologio. Dai punti estremi T' e T'' di questi vettori partiranno le rette $\overline{T'E}$ e $\overline{T''E}$ nelle direzioni delle f. e. m. di mutua induzione, le quali sono omofasiche colle f. e. m. di a. i. reciproche. Dati i valori di $\omega L_1 c'$ e di $\omega L_2 c''$ e l'angolo di fase ϕ di c' , c'' , i valori di $\overline{T'E} \underline{\Omega} \omega M c'$ e di $\overline{T''E} \underline{\Omega} \omega M c''$ restano determinati, col punto E .

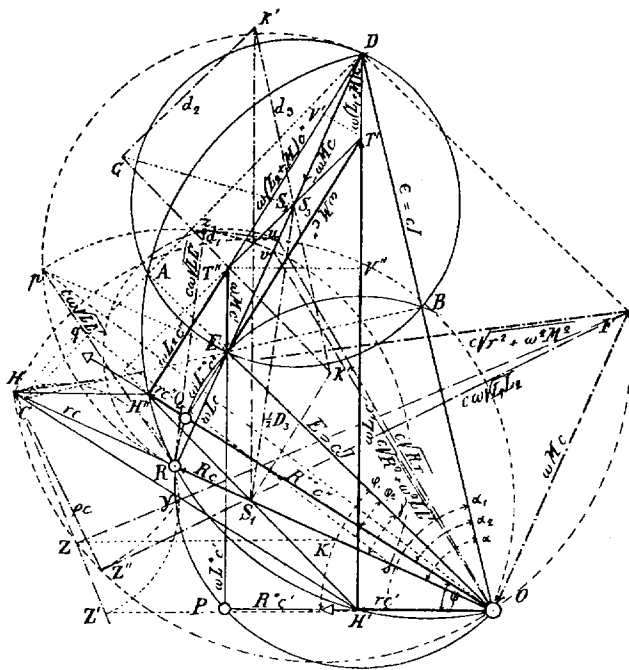


Fig. 5.

I due poligoni delle f. e. m. $\overline{OH'T'E}$ ed $\overline{OH''T'E}$ hanno per lato comune di chiusura il vettore \overline{OE} , che è equipollente alla f. e. m. applicata o impressa ai poli della biforcazione, E.

Il diagramma così costruito rappresenta graficamente l'integrazione delle (1) o (2), e quindi le relazioni analitiche (6) (9).

Congiungiamo il punto O, centro dei vettori, con il punto d'incontro D di quelli rappresentanti le f. e. m. di a. i. I triangoli rettangoli $\overline{DOH'}$, $\overline{DOH''}$, inscritti nel semicerchio di diametro \overline{OD} , forniscono:

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{DOH'} = \alpha_1 = \arctg \frac{\omega(L_1 \mp M)}{r}, \quad \widehat{DOH''} = \alpha_2 = \arctg \frac{\omega(L_2 \mp M)}{r}, \\ \overline{OD} = c' J' = c'' J'' = c'' r \sqrt{1 + \overline{\lg^2 \alpha_1}} = c'' r \sqrt{1 + \overline{\lg^2 \alpha_2}}, \\ \frac{c'}{c''} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{J''}{J'}. \end{array} \right.$$

$$(15a) \quad \overline{\lg(\alpha_1 \mp \alpha_2)} = \begin{cases} \lambda''^2 / \rho'^2 \\ \lambda'^2 / \rho'^2 \end{cases} \quad \overline{\lg \alpha_1 \mp \lg \alpha_2} = \begin{cases} \lambda''^2 / r^2 \\ \lambda'^2 / r^2 \end{cases}.$$

$$(15b) \quad \sqrt{\overline{\cos^2 \alpha_1} + \overline{\cos^2 \alpha_2} \pm 2 \overline{\cos \alpha_1} \overline{\cos \alpha_2} \cos \Phi} = \begin{cases} \frac{r J_0}{J' J''} \\ \frac{r \omega (L_1 - L_2)}{J' J''} \end{cases}.$$

Il vettore \overline{OD} misura la *tensione ai poli* dell'apparecchio, che indicheremo con ε :

$$\varepsilon = c' J' = c'' J'' = c I.$$

Questa tensione è spostata sulla f. e. m. applicata E, per un angolo $(\gamma - \alpha)$, positivo o negativo insieme ad M. Nel primo caso (diagramma primo), la tensione ε è minore della f. e. m. E ed in ritardo su di questa: l'apparecchio agisce come *riduttore* della tensione sul circuito esterno. Nel secondo caso (diagramma secondo), la tensione ai poli è maggiore della f. e. m. impressa ed in avanzo di fase su questa: l'apparecchio funziona allora come *elevatore* della tensione sul circuito (*survolteur*). Per $M=0$, si ha $\varepsilon = E$ e $\gamma - \alpha = 0$.

La grandezza I si trova determinata dagli elementi del triangolo ODR, inscritto nel semicerchio di diametro \overline{OD} , come i due precedenti; si tratta di determinare, cioè la *f. e. m. attiva* dovuta alla tensione \mathfrak{E} , e la *f. e. m. reattiva* corrispondente, rappresentate rispettivamente da \overline{OR} ed \overline{RD} . Servono a questo scopo le formule (15) e le posizioni (3, 4, 5). Abbiamo, (12):

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{2} = \arctg \frac{\lambda'^2}{\rho'^2} - \arctg \frac{1}{2} \frac{\lambda'^2}{\rho'^2}.$$

$$(16) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \lambda'^2 - \rho'^2 \frac{\lambda'^2}{\rho'^2}}{2 \rho'^2 + \lambda'^2 \frac{\lambda'^2}{\rho'^2}} = \frac{\omega L'}{R'},$$

ove R' ed $\omega L'$ sono rispettivamente il coefficiente ohmico e il reattivo che entrano a comporre la tensione

$$(17) \quad \mathfrak{E} = cI = c \sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}.$$

Inoltre:

$$(18) \quad c = \mathfrak{E} \frac{\sqrt{J'^2 + J''^2 + 2 J' J'' \cos \phi}}{J' J''} = \frac{J_0}{J' J''} \mathfrak{E}.$$

Dunque l'impedimento I vale $\frac{J' J''}{J_0}$; è quella grandezza che noi dobbiamo nominare il *fattore d'impedimento del ramo equivalente*, poichè è uguale all'inverso della somma vettoriale degli inversi dei nostri fattori d'impedimento nei due rami.

E, notando che si ha:

$$(20) \quad J' J'' = \sqrt{\rho'^4 + \lambda'^4} = \sqrt{\rho''^4 + \lambda''^4} =$$

$$= \sqrt{\rho'^4 + \omega^4 \left\{ L_1 L_2 \mp M(L_1 + L_2 \mp M) \right\}^2 + 2 \rho'^2 \omega^2 \left\{ (L_1 + L_2) \left(\frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} \mp M \right) - (L_1 L_2 - M^2) \right\}}.$$

(espressione interessante a confrontarsi con quella di $\sqrt{\rho'^4 + \lambda'^4}$)
potremo scrivere, parallelamente alla (13),

$$(19) \quad I = \frac{\sqrt{\rho'^4 + \lambda'^4}}{J_0}.$$

Il rapporto

$$(21) \quad \frac{J}{I} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \lambda'^2}}{\sqrt{\rho'^2 + \lambda'^2}} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{J' J''} = \frac{E}{\mathcal{E}},$$

è maggiore o minore dell'unità secondo che M è positivo o negativo.

Gli elementi R' ed $\omega L'$ che entrano nella (17) si hanno partitamente dalla (16):

$$(23) \quad I \sin \alpha = \omega L' = \frac{r \left(2 \lambda'^2 - \rho'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2} \right)}{J_0^2} = \frac{\lambda'^2}{r} \cdot \frac{\rho'^2}{J_0^2},$$

$$(24) \quad I \cos \alpha = R' = \frac{r \left(2 \rho'^2 + \lambda'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2} \right)}{J_0^2}.$$

Con lo stesso procedimento troveremo infine gli elementi R ed ωL , *resistenza ohmica* e *reattanza del ramo equivalente*, che costituiscono l'impedimento effettivo del ramo equivalente,

$$(13) \quad J = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

La seconda delle (12) ci fornisce

$$(25) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \lambda'^2 - \rho'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2}}{2 \rho'^2 + \lambda'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2}},$$

e quindi:

$$(26) \quad J \sin \gamma = \omega L = \frac{r \left(2 \lambda'^2 - \rho'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2} \right)}{J_0^2},$$

$$(27) \quad J \cos \gamma = R = \frac{r \left(2 \rho'^2 + \lambda'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2} \right)}{J_0^2}.$$

Ora è facile verificare che è identicamente, (24) (27) e (23) (26).

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho'^2 + \lambda'^2 \frac{\lambda'^2}{r^2} = 2\rho^2 + \lambda^2 \frac{\lambda'^2}{r^2} = \frac{R}{r} J_0^2. \\ 2\lambda^2 r - \rho^2 \frac{\lambda'^2}{r} - \left(2\lambda'^2 r - \rho'^2 \frac{\lambda'^2}{r} \right) = \pm \omega M \cdot J_0^2. \end{array} \right.$$

La prima di queste identità mostra che $R' = R$, e cioè i due triangoli rettangoli ORE, ORD, risp. il triangolo della f. e. m. applicata e il triangolo della tensione ai poli, hanno un cateto comune \overline{OR} , caduta di tensione ohmica che serve a creare la corrente principale.

Non è superfluo — come a prima vista parrebbe, avendo sott'occhio il diagramma già costruito (fig. 4 e 5) — l'aver dimostrato tale coincidenza, $R' = R$, proprietà che regola interamente, come vedremo, la costruzione stessa. Questa caduta di tensione OR è rappresentata quindi dalla corda comune ai due semicerchi di diametri E ed \mathfrak{E} , passanti per O . Gli altri due cateti, RE ed RD , rappresentanti f. e. m. reattive, hanno dunque direzioni coincidenti, e differiscono, per la 2ª delle (28), del segmento DE , il cui valore assoluto è ωMc , risultante di $\omega Mc'$ ed $\omega Mc''$.

Scriveremo dunque i valori degli elementi del ramo equivalente nel seguente modo :

$$(29) \quad R = \frac{r}{2} \cdot \frac{r^2 + \omega^2 \left\{ (L_1 + L_2) \frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{2} - (L_1 L_2 - M^2) \right\}}{r^2 + \omega^2 \left(\frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{2} \right)^2}.$$

$$(30) \quad \omega L = \frac{1}{2} \frac{\omega (L_1 + L_2 \pm 2M)}{2} \cdot \frac{r^2 + \omega^2 (L_1 L_2 - M^2) \frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{2}}{r^2 + \omega^2 \left(\frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{2} \right)^2},$$

$$(31) \quad \omega L' = \frac{1}{2} \frac{\omega (L_1 + L_2 \mp 2M)}{2} \cdot \frac{r^2 + \omega^2 (L_1 \mp M) (L_2 \mp M)}{r^2 + \omega^2 \left(\frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{2} \right)^2} = \\ = \frac{1}{2} \frac{\omega (L_1 + L_2 \mp 2M)}{2} \cdot \frac{4\rho'^2}{J_0^2}.$$

A notarsi, che la resistenza ohmica R del ramo equivalente vale la metà della resistenza di ciascun ramo, moltiplicata pel quadrato del rapporto fra due impedimenti; e si ha $R = \frac{1}{2} r$ ogni volta che $L_1 = L_2$.

Se, per analogia, nominiamo il polinomio $\frac{1}{2} \omega(L_1 + L_2 \mp 2M)$ l'induttanza media del sistema (sarebbe precisamente l'energia elettrocinetica delle due correnti $\mp \pm 1$), si vede che le grandezze ωL ed $\omega L'$ hanno forme analoghe a quella di R .

La differenza fra queste due induttanze che consideriamo nel ramo equivalente

$$(28) \quad \omega(L - L') = \pm \omega M,$$

è positiva o negativa insieme ad M , ossia insieme all'angolo $\gamma - \alpha$ e, corrispondentemente,

$$\epsilon \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} E.$$

Si ha, dal triangolo delle tensioni ODE:

$$(32) \quad \epsilon = \omega M c \frac{\cos \gamma}{\sin(\gamma - \alpha)}, \quad E = \omega M c \frac{\cos \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)}.$$

E, per le (16) e (25),

$$(33) \quad \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = \frac{\lambda^2 \rho'^2 - \lambda'^2 \rho^2}{\rho^2 \rho'^2 + \lambda^2 \lambda'^2} = \pm \omega M \frac{2\rho^2 \rho' + \lambda^2 \lambda'^2}{\rho^2 \rho'^2 + \lambda^2 \lambda'^2} = \frac{J_0^2 [R \omega(L - L')]}{J_0^2 [R^2 + \omega^2 LL']},$$

Se ne ricavano

$$(33') \quad \sin(\gamma - \alpha) = \frac{R \omega(L - L')}{\sqrt{R^2 + \omega^2 LL'} \sqrt{R^2 + \omega^2 L'^2}}, \quad \cos(\gamma - \alpha) = \frac{R^2 + \omega^2 LL'}{\sqrt{R^2 + \omega^2 LL'} \sqrt{R^2 + \omega^2 L'^2}}.$$

E così le (32) insieme alle (12), (25), (33), forniscono:

$$(34) \quad \epsilon = E \frac{J_0^2 J I}{\rho^2 + \lambda^2} = E \frac{I}{J} = E \frac{J' J''}{\Delta_1 \Delta_2} = E \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha},$$

le quali sono altre forme della (21):

La tensione ϵ è proporzionale al rapporto del prodotto dei fattori d'impedimento nei due rami al prodotto degli

impedimenti di dispersione; oppure è proporzionale al rapporto del fattore d'impedimento del ramo equivalente (I) all'impedimento effettivo equivalente (J):

$$(34') \quad \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2(L \mp M)^2}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Questa tensione è spostata di fase rispetto alla f. e. m. impressa per un angolo $(\gamma - \alpha)$ che è un avanzo o un ritardo a seconda che M è negativo o positivo.

Si rileva infine facilmente come questo rapporto

$$\eta = \frac{\mathfrak{E}}{E},$$

che può chiamarsi *rapporto di trasformazione*, dipenda dal valore della dispersione del flusso. Basta considerare le variazioni di Δ_1, Δ_2 , unitamente a quanto già fu notato presso la (11). Quando la dispersione si annulla (M^2 massimo) si ha:

$$(\Delta_1 \Delta_2) = r \sqrt{r^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}.$$

Quando la dispersione è massima (M^2 nullo):

$$(\Delta_1 \Delta_2) = (J' J'')$$

e quindi

$$\mathfrak{E} = E, \quad \gamma - \alpha = 0.$$

Nel *primo caso*, si può scrivere:

$$(\eta) = \frac{\sqrt{r^2 + \omega^2 L_1 (L_1 + L_2 \mp 2 \sqrt{L_1 L_2})} \sqrt{r^2 + \omega^2 L_2 (L_1 + L_2 \mp 2 \sqrt{L_1 L_2})}}{r \sqrt{r^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}}$$

Per dati L_1 ed L_2 , il prodotto $(J' J'')$ è qui *un minimo* se M è positivo (segno superiore) ed allora esso è minore del valore $(\Delta_1 \Delta_2)$ poichè $\sqrt{L_1 L_2}$ è compreso fra L_1 ed L_2 ; ed è *un massimo* se M è negativo (segno inferiore) ed allora esso è maggiore di $(\Delta_1 \Delta_2)$.

Quando la dispersione assume valori maggiori di zero, cioè quando, per dati L_1, L_2 , il valore di M^2 va diminuendo a partire dal suo massimo $L_1 L_2$, allora il valore di

$$(11) \Delta_1 \Delta_2 = r \sqrt{r^2 + \omega^2} \left\{ (L_1 + L_2)^2 - (L_1 L_2 - M^2) \frac{2r^2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)}{r^2} \right\}$$

va crescendo, e raggiunge per $M^2 = 0$ un massimo

$$\sqrt{r^2 + \omega^2 L_1^2} \sqrt{r^2 + \omega^2 L_2^2} = (J' J'')_0.$$

Intermediariamente, *il rapporto $J' J' : \Delta_1 \Delta_2 = \eta$ cresce o diminuisce verso l'unità a seconda che M si mantiene positivo o negativo*. Proseguiremo più innanzi l'esame di questo rapporto di trasformazione.

Alcune considerazioni sulla costruzione e su le variazioni del diagramma. La direzione della tensione \mathfrak{E} passante per O è il luogo dei punti D d'intersezione dei vettori delle f. e. m. di a. i., e quindi è determinata, date le caratteristiche $\left(-\frac{c'}{c}, \phi\right)$ delle correnti derivate; infatti, le stesse caratteristiche appartengono tanto al parallelogrammo delle ampiezze delle correnti, quanto a quello delle f. e. m. attive e delle f. e. m. di i. m.

Per la direzione della f. e. m. applicata, \overline{OE} , osserviamo che, prolungando i vettori \overline{TE} e $\overline{T'E}$ sino all'incontro di Oc' e di Oc'' , nei punti P e Q , i triangoli OPE , OQE così determinati hanno per cateti due coppie di vettori i quali rispettivamente rappresentano f. e. m. attive e reattive: \overline{OP} , \overline{PE} possono sostituire il poligono delle f. e. m. del primo ramo, ed \overline{OQ} , \overline{QE} , quello del secondo ramo. Proiettando i vettori $\overline{TE} = \omega M c''$ e $\overline{T'E} = \omega M c'$, ciascuno sulla direzione dell'altro, con che si hanno i punti V' e V'' , si può scrivere:

$$(35) \begin{cases} \overline{OP} = R^* c' = r c' \mp \omega M c'' \sin \phi & \overline{OQ} = R^{**} c'' = r c'' \pm \omega M c' \sin \phi \\ \overline{PE} = \omega L^* c' = \omega L_1 c' \pm \omega M c'' \cos \phi & \overline{QE} = \omega L^{**} c'' = \omega L_2 c'' \mp \omega M c' \cos \phi \end{cases}$$

R^* ed R^{**} si potranno dire le *resistenze ohmiche modificate* (dalla i. m.) ed L^* ed L^{**} le *induttanze modificate*, dei due rami.

Si considerino i rapporti:

$$(35') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{R^*c'}{R^{**}c''} = \frac{c'}{c''} \frac{1 \mp \frac{\omega M}{r} \frac{c''}{c'} \sin \phi}{1 \pm \frac{\omega M}{r} \frac{c''}{c'} \sin \phi}, \\ \frac{\overline{PE}}{\overline{QE}} = \frac{\omega L^*c'}{\omega L^{**}c''} = \frac{c'}{c''} \frac{\omega L_1 \left(1 \pm \frac{M}{L_1} \frac{c''}{c'} \cos \phi\right)}{\omega L_2 \left(1 \pm \frac{M}{L_2} \frac{c''}{c'} \cos \phi\right)}. \end{array} \right.$$

Per una data coppia di caratteristiche $\left(\frac{c'}{c''}, \phi\right)$, il primo è soltanto funzione di $\frac{\omega M}{r} = \frac{DE}{OH}$, rapporto delle diagonali omologhe dei parallelogrammi simili $DET'T''$ ed $OHH'H''$.

È chiaro allora che la direzione di \overline{OE} dipende solo da questo rapporto, per una voluta coppia di caratteristiche.

Quindi, la sola conoscenza di una coppia di caratteristiche per le correnti, non determina che la fase della corrente principale e della tensione ε . Assumendo inoltre un valore pel rapporto $\frac{\omega M c}{r c}$, rimane determinata anche la fase della f. e. m. E (la direzione di \overline{OE} si può allora definire come il luogo delle intersezioni dei vettori rappresentanti le f. e. m. d'induttanza modificata) e il diagramma si potrà allora costruire in una scala arbitraria. Infine, assegnare la grandezza di E , equivale a definire il valore dei parametri $\frac{M}{L_1}$, $\frac{M}{L_2}$, $\frac{L_1}{L_2}$ che entrano nel secondo rapporto (35').

A determinare completamente il diagramma sono cioè necessari quattro parametri indipendenti; E , γ , $\frac{c'}{c''}$, ϕ , ovvero E , c' , c'' , ϕ , ovvero anche $\frac{c'}{c''}$, ϕ , c , γ . Etc. ¹⁾.

1) Nel primo caso, p. es., si traccierà nella direzione di fase zero il vettore $\overline{OE} = E$, e con l'angolo γ si metterà a posto la direzione della corrente principale c . Indi si costruirà su questa direzione, come diagonale, un parallelogrammo di caratteristiche $\left(\frac{c'}{c''}, \phi\right)$ e si cercherà il punto d'incontro (D) delle direzioni dei vettori corrispondenti ad $H'D$ e

Se si tratta di due avvolgimenti deformabili, abbiamo a considerare due gruppi di variabili, ciascuno dipendente dall'altro: il gruppo di variabili delle correnti

$$E, c', c'', \phi, c, \gamma$$

e il gruppo di parametri dell'apparecchio

$$(r'), L_1, L_2, M,$$

la γ essendo per noi costante, e la c essendo determinata completamente da c', c'', ϕ , restano a considerarsi due terne di variabili, per ogni data E :

$$c', c'', \phi \\ L_1, L_2, M.$$

Facendo variare i tre coefficienti d'induzione, il diagramma delle f. e. m. subisce delle variazioni, le quali si possono far dipendere dagli spostamenti dei tre punti P, Q, R sul semicerchio di diametro $\overline{OE} = E$, dato di grandezza e posizione.

Ad ogni data terna di posizioni P, Q, R sul cerchio E corrisponde una terna determinata di posizioni pei punti H', H'', R sul semicerchio di diametro $\overline{OD} = \mathfrak{E}$, variabile di grandezza e posizione ma passante sempre pel punto O fisso e pel punto R variabile ¹⁾.

Si potrebbe dunque, alla considerazione del gruppo di parametri originarii, di significato fisico esplicito, sostituire quella

ad $\overline{H''D}$; congiunto questo punto coll'origine O , si avrà la direzione o fase della tensione \mathfrak{E} . Il punto d'intersezione di questa direzione $\overline{O\mathfrak{E}}$ con la perpendicolare abbassata dalla estremità E del vettore \overline{OE} sulla corrente c , determinerà la grandezza di \mathfrak{E} , cioè il punto D del diagramma reale. Non resterà allora che abbassare da E da D le perpendicolari sulle direzioni delle correnti per definire in grandezza e fase le varie f. e. m. attive e reattive.

1) Si può, cioè, costruire il diagramma delle f. e. m., dato in grandezza e fase il vettore E , e i tre punti sul semicerchio di diametro \overline{OE} . Basterà, su \overline{OR} come diagonale maggiore, costruire il parallelogrammo simile a quello $(c':c'', \phi)$, e pei punti d'incontro dei due lati condotti, risp. con \overline{OP} e \overline{OQ} , innalzare le perpendicolari a queste ultime direzioni. Allora il punto d'intersezione di queste perpendicolari sarà un punto del vettore rappresentante la tensione \mathfrak{E} , cioè un punto omologo a D ; d'altra parte, la perpendicolare abbassata dal centro del semicerchio dato \overline{OE} sulla corda comune \overline{OR} , è il luogo dei centri dei cerchi di diametro \overline{OD} ; avremo dunque così la grandezza di \overline{OD} e quindi il centro del semicerchio che determina i punti H' e H'' .

delle resistenze modificate e della resistenza equivalente (R^* , R^{**} , R) oppure quella di L^* , L^{**} , L), funzioni implicite di (r) , L_1 , L_2 , M . Vale a dire, si potrebbero studiare le variazioni del diagramma su quelle delle coordinate dei punti P , Q , R in funzione di L_1 , L_2 , M . Per esempio, converrebbe in tal caso considerare i rapporti $OP:OH'$, $OQ:OH''$, $OR:OH$.

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} \overline{OP} = R^* c' = \frac{rc}{J_0} \left(J' \mp \frac{\omega M}{r} J' \sin \phi \right) \\ \overline{OQ} = R^{**} c'' = \frac{rc}{J_0} \left(J' \pm \frac{\omega M}{r} J' \sin \phi \right) \\ \overline{OR} = R c = rc \left(1 - 2 \frac{J' J''}{J_0^2} \cos \phi \right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^*}{r'} = 1 \mp \frac{\omega M}{r} \frac{J'}{J''} \sin \phi \\ \frac{R^{**}}{r'} = 1 \pm \frac{\omega M}{r} \frac{J'}{J''} \sin \phi \\ \frac{R}{r'} = 1 - 2 \frac{J' J''}{J_0^2} \cos \phi \end{array} \right.$$

Non proseguiremo oltre sulla via di tali considerazioni, un po' fuori del nostro argomento; ci basti avervi accennato per iscrivere le (36) che utilizzeremo ad altro scopo prossimamente. Ci limiteremo ora a notare che P , Q , R non è la sola terna di punti la quale determini in modo completo le caratteristiche del diagramma. Si considerino infatti i cerchi descritti sui vettori delle tre f. e. m. E , \mathcal{E} , $\omega M c$, come diametri; questi tre cerchi si tagliano a due a due nelle coppie di punti $O.R$, $E.B$, $D.A$, e forniscono tre corde comuni le quali determinano con la loro intersezione il noto punto particolare che è il centro radicale C dei tre cerchi. Ebbene, si potrebbero considerare, in luogo di P , Q , R , le terne P , Q , D , ovvero P , Q , B , ovvero R , D , B , e via dicendo, chè ciascuna di esse determina completamente il diagramma, dato il semicerchio di diametro \overline{OE} . Il punto C , che diremo *centro radicale del diagramma*, determina due dei punti appartenenti ad una qualunque delle dette terne (poichè determina il triangolo ORD del ramo equivalente), e quindi dato il punto C ed uno qualunque dei P , Q , ciò equivale alla conoscenza di E , \mathcal{E} , $\omega M c$, e del diagramma completo.

Il vettore \overline{OC} può poi esprimersi facilmente in funzione delle variabili originarie, notando che il punto D è l'intersezione delle *altezze* del triangolo OEC ; e si ha allora campo

di scegliere fra una quantità di argomenti noti del diagramma. Per esempio, dai triangoli OCA, ERO, ... si ricava:

$$(36 \text{ bis}) \quad \overline{OC} = cJ \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\cos \alpha} = c \frac{R^2 + \omega^2 L L'}{R},$$

formola da cui trarremo partito prossimamente.

Con un'analisi geometrica del genere sopraccennato si potrebbe determinare fra l'altro il campo di variazioni che è concesso alla terna di punti che si considera, noti i valori minimi e massimi delle variabili L_1 , L_2 , M .

A questo riguardo dobbiamo notare che esiste un limite superiore pei valori assegnabili ad L_1 ed L_2 , dipendente dalla resistenza r degli avvolgimenti e dalla periodicità della f. e. m. applicata; più esattamente, dato ωL_{\max} v' ha un limite inferiore pel valore assegnabile ad r .

Nelle nostre formole giuocano una parte importante le due grandezze.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2) \\ \rho'^2 &= r^2 - \omega^2 [L_1 L_2 + M^2 \mp M (L_1 + L_2)], \end{aligned}$$

le quali entrano in considerazione sempre almeno con le dimensioni $[L^{-1}]^2$, sono, cioè, quadrati di resistenze ohmiche o, se si vuole, d'impedimenti.

Perciò devono sempre essere grandezze essenzialmente positive. Le condizioni affinché sieno tali, si trovano:

$$\text{per } \rho^2 > 0: \quad r^2 > \omega^2 L_1 L_2$$

pel caso che M^2 assuma il suo minimo valore, *zero*, per dati L_1 e L_2 , e

$$\text{per } \rho'^2 > 0: \quad r^2 > \omega^2 \sqrt{L_1 L_2} (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2$$

pel caso che M assuma il suo minimo valore, $-\sqrt{L_1 L_2}$, per dati L_1 ed L_2 . La seconda condizione include anche la prima.

Se si tratta di due avvolgimenti deformabili e tali che L_1 ed L_2 possano raggiungere valori massimi fra loro uguali e per es. ad L_m , basterà fare per costruzione

$$(37) \quad L_m \leq \frac{r}{2\omega} \text{ per } \rho^2 > 0; \text{ oppure anche } L_m \leq \frac{r}{\omega} \text{ per } \rho'^2 > 0 \quad (37^1)$$

Non è escluso che si possa in ogni caso compiere o variare tale regolazione adottando opportuni valori per ω .

La circostanza: ρ^2 o ρ'^2 negativi, renderebbe negative le tangenti degli angoli

$$(12) \quad \gamma = \arctg \frac{\lambda^2}{\rho^2} - \arctg \frac{1}{2} \frac{\lambda'^2}{\rho'^2},$$

$$(16) \quad \alpha = \arctg \frac{\lambda'^2}{\rho'^2} - \arctg \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\rho^2},$$

il che non può essere, poichè tali tangenti valgono i rapporti delle grandezze ωL , $\omega L'$, R , che sono essenzialmente positive; e tali angoli non possono superare $\frac{\pi}{2}$, rappresentando gli spostamenti di fase, avanzi, di E , \mathfrak{E} , sulla corrente principale c .

Per la stessa ragione, anche gli angoli

$$\arctg \frac{\lambda^2}{\rho^2} = \phi_1 + \alpha_1 = \phi_2 + \alpha_1 = \arctg \frac{r \omega (L_1 + L_2)}{r^2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\arctg \frac{\lambda'^2}{\rho'^2} = \alpha_1 + \alpha_2 = \arctg \frac{r \omega (L_1 + L_2 \mp 2M)}{r^2 - \omega^2 (L_1 \mp M)(L_2 \mp M)},$$

considerati come positivi, non possono superare essi stessi $\frac{\pi}{2}$.

Il primo si annulla solo per $L_1 = L_2 = 0$, e il suo massimo corrisponde alla dispersione massima, $\zeta = 1$, con $L_1 = L_2 = L_m$. Il secondo si annulla, o divien massimo, quando rispettivamente si annullino le induttanze L' ovvero L del ramo equivalente. Infatti: per M positivo, il trinomio

$$L_1 + L_2 - 2M,$$

che è sempre positivo e maggiore di $(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2$, si ugualia a questo quadrato solo per $\zeta = 0$, e si annulla per le due condizioni $\zeta = 0$ ed $L_1 = L_2$, le quali appunto recano

$$L' = 0; \quad L = L_1, \quad R = \frac{1}{2} r; \quad \alpha = 0:$$

in questo caso la tensione \mathfrak{E} è in fase con la corrente principale ed ha il suo valore più basso.

Per M negativo, la condizione $\zeta = 0$, con dati L_1 ed L_2 , rende un massimo l'angolo $\alpha_1 + \alpha_2$, e le due condizioni $\zeta = 0$,

$L_1 = L_2$, annullano l'induttanza totale L del ramo equivalente, (30), e rendono

$$L' = L_1; \quad R = \frac{1}{2}r; \quad r = 0:$$

in questo caso la f. e. m. applicata E è in fase con la corrente principale. Se poi L_1 ed L_2 salgono al loro limite superiore L_m (37), l'angolo $\alpha_1 + \alpha_2$ ha per limite 90° .

Contemporaneamente: nel primo caso, M positivo ed $\alpha = 0$ ($\lambda^2 = 0$), la tensione \mathfrak{E} raggiunge il suo minimo valore quando $L_1 = L_2 = \frac{r}{2\omega}$, poichè per la (34') è ora

$$\mathfrak{E} = E \cos \gamma \quad \text{e} \quad \gamma_m = \arctg \frac{\lambda^2}{\rho^2},$$

e quindi, con $\lambda^2 = 2r\omega L_1$, $\rho^2 = r^2$:

$$\mathfrak{E}_{\min} = E \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\gamma_{\max} = 45^\circ: \text{ per } \alpha = 0).$$

Nel secondo caso, M negativo, e per $\gamma = 0$ si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L_1}{\frac{1}{2}r}$$

e la stessa (34') fornisce:

$$\mathfrak{E} = \frac{E}{\cos \alpha}$$

e infine:

$$\mathfrak{E}_{\max} = E\sqrt{2}. \quad (\alpha_{\max} = 45^\circ: \text{ per } \gamma = 0).$$

Questa semplice analisi finisce di mostrare come fra i diagrammi fig. 4 e 5, corrispondenti a $\pm M$, non vi sia diversità sostanziale altra che quella del significato scalare delle varie linee. Per dati L_1 , L_2 , M^2 , passando dall'un segno all'altro di M , il vettore della f. e. m. applicata prende il posto del vettore della tensione ai poli e vv., e i vettori delle f. e. m. attive e reattive vengono sostituiti dai vettori delle f. e. m. modificate; o, in altri termini, la terna de' punti P , Q , R , si sostituisce alla terna H' , H'' , R .

Dobbiamo ora dimostrare che, se ρ è reale, il centro radicale C del diagramma deve cadere fra R ed H e non al di fuori. Ossia, deve aversi:

$$\overline{OC} < \overline{OH} \quad \text{od anche} \quad \overline{CR} < \overline{RH}.$$

Da dimostrarsi, cioè, che:

$$(38) \quad \overline{OC} = cJ \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\cos \alpha} = c \frac{R^2 + \omega^2 L L'}{R} < c r = \overline{OH},$$

o infine, che:

$$(38') \quad R^2 + \omega^2 L L' < R r.$$

Infatti. Costruiamo l'espressione $\omega^2 L L'$ mediante le (30), (31), oppure le (23), (26); dopo riduzioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} \omega^2 L L' &= \frac{\rho^2}{J_0^2} \left\{ \omega^2 (L_1 L_2 - M^2) + r^2 \frac{\omega^2 (L_1 - L_2)^2}{J_0^2} \right\} = \\ &= \gg \left\{ \gg + r^2 \left(1 - \frac{4 \rho^2}{J_0^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

(relazione che ci sarà utile di poi); e per la 3^a delle (36):

$$\begin{aligned} (39) \quad \omega^2 L L' &= \frac{\rho^2}{J_0^2} \left\{ 2 R r - \rho^2 \right\} = \frac{r - R}{2r} \left\{ 2 R r - \rho^2 \right\} = \\ &= R(r - R) - \frac{\rho^2 r^2}{J_0^2} = R(r - R) - \rho^2 \frac{r - R}{2r}, \end{aligned}$$

la quale significa che $\sqrt{R(r - R)}$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti $\omega \sqrt{L L'}$ e $\frac{\rho^2}{J_0}$. Siccome $\omega \sqrt{L L'}$ non può essere che reale e positivo, si deve identicamente avere $\omega^2 L L' < R(r - R)$, cioè (38'):

$$R^2 + \omega^2 L L' < R r.$$

Dunque, il centro radicale del diagramma deve cadere al di qua del punto H , se $\rho^2 > 0$ ossia $(2 R r - \rho^2)(r - R) > 0$, (il segno $>$ non escludendo al limite l'eguaglianza); quindi

$$(40) \quad \rho < \sqrt{2 R r}.$$

In generale, ρ^2 è tanto più piccolo di $2 R r$ quanto più è forte la dispersione teorica, (3), e si ha $r^2 < 2 R r$ finchè

$L_1 \geq L_2$. Per $\rho^2 = 0$, il centro radicale C cade in H ; per $\zeta = 0$, si ha il massimo $\rho^2 = r^2$ e C cade in R ; con $\zeta = 1$, ρ^2 raggiunge per ogni coppia di L_1, L_2 diversi fra loro e da zero, un minimo speciale, cui ne corrisponde uno anche per la differenza di fase ϕ .

Dei due diagrammi costruiti senza aver riguardo alla (37¹), si vede ora che solo il secondo (fig. 5) soddisfa a questa condizione, che fa ρ^2 positivo. Il diagramma della figura 4 non rappresenterebbe un caso reale. Nella figura 5 si accusa però una dispersione assai forte, poichè C è molto vicino ad H ; ρ deve essere piuttosto piccolo ¹⁾.

Questa proprietà geometrica del diagramma, che assegna il campo di variazioni pel centro radicale dei tre cerchi delle

1) Si sono indicate nei diagrammi le costruzioni, in linee punteggiate, delle grandezze $\omega\sqrt{LL'}$, $\sqrt{RR'}$, $\sqrt{R^2 + \omega^2 LL'}$, etc. Si ha:

$$\overline{OC} = cR + c\omega L' \frac{\omega L}{R}, \quad \text{cioè} \quad \overline{OC} = \overline{OR} + \overline{RC}.$$

E si è dimostrato che deve essere:

$$\overline{RC} = c\omega L' \frac{\omega L}{R} < c(r - R) = \overline{RH}.$$

La costruzione di $c\omega\sqrt{LL'}$ è indicata dai punti R, D, E, p , e quella del primo membro della disuguaglianza qui sopra, dai punti p, q, s, O . Si ha quindi:

$$\overline{Rp} = c\omega\sqrt{LL'} = \overline{Rz}; \quad \overline{Rq} = \overline{RC} < \overline{RH} \text{ (fig. 5)}.$$

La costruzione di $\sqrt{RR'}$ è indicata dai punti H, O, R, u , e infine quella di $\sqrt{R^2 + \omega^2 LL'}$ dai punti O, R, v . E si ha:

$$\overline{Ou} = c\sqrt{RR'}; \quad \overline{Ov} = c\sqrt{R^2 + \omega^2 LL'}; \quad \overline{Ru} = c\sqrt{R(r - R)}; \quad \overline{Or} \perp \overline{Ov}.$$

Si vede quindi che il triangolo della equazione (39) è Rzu (fig. 5). Se, come è il caso per la figura 4, il cerchio pvs di raggio $c\omega\sqrt{LL'}$ non taglia il cerchio di diametro \overline{Ru} (essendo $R^2 + \omega^2 LL' > Rr$), questo triangolo Rzu risulta immaginario, il che corrisponde a ρ immaginario. Nella figura 5, il segmento \overline{zu} rappresenta dunque la grandezza

$$c\sqrt{\rho^2 \cdot \frac{r - R}{2r}} = c\frac{\rho\rho''}{J_0}.$$

(di cui faremo uso prossimamente); siccome ρ'' e J_0 sono sempre reali e positivi (il loro rapporto, di cui il quadrato è sotto il radicale, essendo < 1) si scorge che zu non è reale o immaginario che in causa di ρ ; e che il valore di quest'ultimo è nel caso presente piuttosto piccolo in riguardo ad r .

f. e. m. E , ε , ωMc , fornisce dunque un mezzo per verificare se un problema dato ammetta una soluzione reale. La questione sarà la maggior parte delle volte di trovare le condizioni da adempiere nell'apparecchio per avere una data tensione ε con una data E . Allora, il triangolo $(E, \varepsilon, \overline{\gamma - \alpha})$ essendo conosciuto, saranno determinati i punti C , D , B , A , ed R che dà la caduta di tensione ohmica del ramo equivalente Rc . Si tratterà di determinare L_1 ed L_2 in maniera che C sia compreso fra R ed H . Geometricamente, questo equivale alla determinazione di uno dei punti P , Q , cioè di una delle correnti derivate, quarta condizione da aggiungere alle tre date $(E, \varepsilon, \overline{\gamma - \alpha})$ perchè il problema sia completamente determinato.

Se si ha un sistema di due avvolgimenti deformabili già costruiti, con riguardo almeno alla (37¹), le formole limiti trovate con la discussione fatta sulla (34) mostrano tosto i limiti d'applicazione del sistema come *riduttore-elevatore della tensione*; e, ρ sarà sempre una grandezza reale.

Se nella costruzione non si è tenuto calcolo della (37¹), la determinazione del diagramma corrispondente ad ogni caso dato, potrà istruirci intorno alla possibilità della soluzione, come sopra vedemmo.

E si può finalmente notare che le condizioni (37) si dimostrano necessarie per ciò che, l'apparecchio essendo introdotto in derivazione sopra una rete a cosiddetto potenziale costante, esso deve mantenere ai suoi poli una tensione dello stesso ordine di grandezza della f. e. m. normale E ; le dette condizioni, le quali vogliono in costruito che la resistenza ohmica di ciascun ramo sia dello stesso ordine di grandezza della induttanza, esprimono dunque la circostanza fondamentalmente necessaria che l'apparecchio non debba fare sulla rete le funzioni di un corto circuito, anche quando fosse $L_1 = L_2 = -M$, con che esso equivarrebbe ad un ramo unico possedente la sola resistenza ohmica $\frac{1}{2} r$. Da tal punto di vista, si scorge che, praticamente, le (37) non hanno valore che quali condizioni limiti, da cui si può nella costruzione tenersi sensibilmente lontani.
