

# Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes.\*)

Von E. HEINE in HALLE.

---

Es sollen hier einige Voraussetzungen und Schlüsse geprüft werden, auf denen, nach den vorliegenden Mittheilungen, der Beweis des Dirichlet'schen Principes in der Lehre vom Potentiale beruht.

1) *Die erste Voraussetzung besteht in Folgendem:* Die auf der Begrenzung des Raumes  $t$ , welche eine geschlossene Fläche bildet, gegebene continuirliche und einwerthige Function kann in das Innere und ebenso in den äusseren Raum, *wenigstens auf eine Art*, derartig fortgesetzt werden, dass die Fortsetzung dieselben Bedingungen der *Stetigkeit und Endlichkeit* erfüllt, wie das Potential der Vertheilung einer Masse auf der Oberfläche.

Die im Folgenden nicht erklärten Bezeichnungen sind dieselben wie bei Gauss in dem Werke: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte; ferner wird, wie üblich,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

durch  $\Delta V$  bezeichnet.

Die Continuitätsbedingungen, welche, *wie man voraussetzt, wenigstens eine Fortsetzung  $V$  erfüllt*, bestehen also darin, dass  $V$  im ganzen Raume stetig ist,  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$  und  $\frac{\partial V}{\partial z}$  nur bis zur Grenzfläche, sowohl im äusseren als im inneren Raume. (Beweisen will man bekanntlich, dass es auch *eine* Fortsetzung  $V_1$  giebt, für welche noch ausserdem  $\Delta V_1 = 0$ .)

Dirichlet selbst benutzt das Princip bei der Theorie des Potentials zum Beweise desjenigen Satzes, mit dem Gauss seine oben genannte Arbeit krönt (Nr. 36.), nach welchem eine Massenvertheilung in einem *körperlichen* Raume sich durch eine Belegung der *Oberfläche*

---

\*) Aus den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vom 16. August 1871, mit Zusätzen des Verfassers.

mit Masse ersetzen lässt. Die an der Oberfläche gegebene Function ist bei diesem Beweise nicht völlig allgemein; sie ist nämlich gleich dem Werthe, welchen das Potential  $\int \frac{k \, dt}{r}$  der gegebenen, im körperlichen Raume vertheilten Masse an der Oberfläche annimmt. Sie kann also wirklich, den Bedingungen gemäss, fortgesetzt werden, nämlich durch dieses Potential selbst.

Um dann nachzuweisen, dass die *gesamte* Masse zur Belegung verwandt werden kann, muss man die Fortsetzung auch noch für den Fall bilden, dass die für die Oberfläche gegebene Function constant,  $= 1$  ist. Durch  $V = 1$  lässt sich diese Function in den inneren Raum fortsetzen, aber nicht durch denselben Werth in den äusseren Raum, wegen der Bedingung der Endlichkeit ( $xV$  soll endlich bleiben). Nach den Principien, welche ich am Schlusse einer brieflichen Mittheilung über Variationsrechnung in den *mathematischen Annalen* Bd. 1, S. 191 andeutete, finde ich diese Fortsetzung, indem ich um den Anfangspunkt als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius  $a$  beschreibe, welche den Raum  $t$  ganz einschliesst. Bezeichnet  $\varrho$  die Entfernung eines beliebigen Punktes im Raume vom Anfangspunkte, so kann man als Fortsetzung folgende Function  $V$  betrachten: Von der Begrenzung des Körpers  $t$  bis  $\varrho = a$  sei  $V = 1$ ; von  $\varrho = a$  bis  $\varrho = \infty$  sei:

$$V = 1 - \left(\frac{\varrho - a}{\varrho}\right)^3.$$

Diese einwerthige Function genügt allen Bedingungen im äusseren Raume, wengleich sie daselbst nicht im ganzen Verlaufe durch ein und dasselbe analytische Gesetz dargestellt wird. (Eine solche Forderung ist aber auch gar nicht gestellt.) In der That sind auch ihre Differentialquotienten bis zu den zweiten incl., nach  $x, y, z$ , ebenso wie die Function selbst, einwerthig und stetig, was man deutlich ein- sieht, wenn man an den Uebergangsstellen auf die Definition des Differentialquotienten zurückgeht.

Wegen der Wichtigkeit der von C. Neumann mit dem Namen der Green'schen belegten Function will ich noch zeigen, dass die in Rede stehende Vorbedingung der Existenz auch für sie erfüllt werden kann, *wie auch  $t$  beschaffen ist*, wenn nur die Begrenzung den Bedingungen der Nr. 16. bei Gauss genügt.

Sei dazu  $A$  ein gegebener fester Punkt *innerhalb  $t$  oder ausserhalb*;  $P$  bezeichne die Punkte im Raume,  $P_0$  an der begrenzenden Fläche; es sei  $AP = r$ ,  $AP_0 = r_0$ . Es soll die Function, welche an der Oberfläche  $\frac{1}{r_0}$  ist, unseren Bedingungen gemäss fortgesetzt werden. Dies hat nur für den *inneren* resp. *äusseren* Raum Schwierigkeiten,

da für die Punkte  $P$  des äusseren resp. inneren Raumes  $\frac{1}{r}$  eine brauchbare Fortsetzung ist. Legt man nun um  $A$  als Mittelpunkt eine Kugel mit einem beliebigen Radius  $\alpha$ , die aber ganz innerhalb, resp. ganz ausserhalb des Raumes  $t$  liegt, und bezeichnet mit  $U$  im Inneren und auf der Kugel die Grösse 1, von der Kugeloberfläche bis zur Begrenzung von  $t$  aber Null, so wird

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^6 - \alpha^6)^3}{r \cdot \alpha^{18}} \cdot U$$

eine Fortsetzung in den inneren resp. den äusseren Raum, welche allen Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit genügt.

Abgesehen von den Fällen, in denen mehrere geschlossene Flächen auftreten, und die ich durch die gleichen Principien erledigen kann\*), hat Dirichlet auch in den Anwendungen auf Elektrostatik nur solche Functionen wie die hier besprochenen von der Oberfläche ins Innere fortzusetzen. *Die Richtigkeit der ersten Annahme in den bei ihm vorkommenden Fällen ist daher nachgewiesen.*

2) *Es wird ferner vorausgesetzt, dass es mehr als eine, und daher unendlich viele, den gleichen Bedingungen wie oben genügende Fortsetzungen giebt.* Ist eine erste Fortsetzung  $V$ , so lässt sich offenbar jede andere als  $V + Z$  darstellen, wo  $Z$  alle, den gleichen Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit genügende Fortsetzungen der für die Oberfläche gegebenen Function Null bezeichnet.

Solcher  $Z$  giebt es immer unendlich viele. Ist nämlich  $\varphi(x, y, z) = 0$  irgend eine beliebige geschlossene algebraische Fläche, z. B. eine Kugel, die ganz innerhalb oder ganz ausserhalb  $t$  liegt (es sei  $\varphi$  eine ganze Function von  $x, y, z$ ); ist ferner  $U$  irgend eine mit ihren ersten beiden Differentialquotienten innerhalb des von  $\varphi = 0$  umschlossenen Raumes einwerthige, stetige und endliche Function, ausserhalb desselben aber 0, so wird,

$$W = \varphi^3 U$$

gesetzt,  $Z = W$  immer eine von den Functionen  $Z$  sein. Es ist klar, dass unendlich viele  $U$ , selbst bei festgehaltenem  $\varphi$ , existiren; eine Function  $U$  findet man schon, wenn man im Innern des durch  $\varphi = 0$  begrenzten Raumes  $U = 1$  setzt. Um noch andere zu erhalten, denke man sich z. B. diesen Körperraum irgendwie continuirlich und gleichartig mit Masse erfüllt, und kann dann für  $U$  in jedem Punkte des Inneren das Potential dieser fingirten Masse in demselben Punkte nehmen.

---

\*) Die weitere Ausführung habe ich diesem Abdrucke als Anhang hinzugefügt.

Die zweite Voraussetzung ist daher in denselben Fällen wie die erste berechtigt.

3) Es folgt nun bei Dirichlet eine Annahme, auf welche ich hier nicht näher eingehe, und auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen denke, dass es nämlich eine oder einige Fortsetzungen in den inneren Raum giebt — Aehnliches gilt für den äusseren Raum; hier wird der Kürze halber nur der innere betrachtet — welche

$$\int \left( \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) dt$$

zu einem Minimum machen. Aus dieser Annahme ergibt sich, wenigstens eine von diesen Fortsetzungen,  $V_1$ , müsse so beschaffen sein, dass für jede Function  $Z$  (m. s. Nr. 2.) das Integral

$$\int Z \Delta V_1 dt$$

verschwindet. Hieraus will man schliessen, im Raume  $t$  müsse  $\Delta V_1$  im allgemeinen Null sein, d. h. mit Ausnahme höchstens von Punkten, Linien und Flächen. Dieser Schluss soll hier geprüft werden.

Er ist, in Folge des Vorhergehenden, für jedes Stück des Raumes  $t$  erlaubt, in dem die Function  $\Delta V_1$  ihr Zeichen nicht unendlich oft ändert. Man kann dann nämlich die Stücke, in welchen  $\Delta V_1$  das gleiche Zeichen behält, beliebig nahe durch Körper mit algebraischer Begrenzung  $\varphi = 0$ , z. B. mit Kugeln ausfüllen und für  $Z$  eine Function  $W$  aus Nr. 2. wählen, die in dem Raume, in welchem sie nicht verschwindet, ihr Zeichen nicht wechselt, sodass das Integral sich allein auf den Theil bezieht, der von einer Fläche  $\varphi = 0$  eingeschlossen ist und in welchem daher  $W \Delta V_1$  sein Zeichen nicht wechselt, woraus folgt, dass  $\Delta V_1$  im Allgemeinen Null ist.

In allen Fällen, die in Nr. 1. erwähnt sind, kann man annehmen, dass  $\Delta V_1$  sein Zeichen im Allgemeinen nicht unendlich oft ändert. Die eine Fortsetzung  $V$  der an der Oberfläche gegebenen Function aus Nr. 1., die sich auf die Green'sche Function bezieht, nämlich

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^2 - a^2)^{3/2}}{r \cdot a^{5/2}} \cdot U,$$

besitzt diese Eigenschaft augenscheinlich, ebenso wie die andere Function, welche man dort findet, nämlich:

$$V = 1 - \left( \frac{r-a}{a} \right)^4,$$

und ebenso wie das Körperpotential in Nr. 1.

$$V = \int \frac{k dt}{r},$$

vorausgesetzt, dass die Eigenschaft in dem letzteren Falle der Dichtigkeit  $k$  der zu vertheilenden Masse, *wo diese unstetig sein sollte*, selbst zukommt. Die Masse darf daher z. B. keine magnetische sein, die aber bereits durch die Festsetzungen von Gauss über die Dichtigkeit in Nr. 9. ausgeschlossen ist und selbst nach Aufhebung einiger Beschränkungen in Nr. 11. noch ausgeschlossen bleibt. Man kann freilich die Betrachtung von Potentialen magnetischer Massen, nachdem man sie durch Zusammenfassen von je zwei Gliedern der Summe  $\Sigma \frac{\mu}{r}$  (s. Nr. 2. bei Gauss) in ein *Integral* verwandelt hat, auf die der Potentiale von Massen mit continuirlicher Dichtigkeit zurückführen.

Ist also diese Art von Massen, auf welche die Untersuchungen von Gauss nicht überall anwendbar sein würden, ausgeschlossen, so besitzt  $\Delta V$  in Nr. 1. die für  $\Delta V_1$  geforderte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichenwechsel. Unter den Functionen  $W$  in Nr. 2. giebt es offenbar unendlich viele von solcher Beschaffenheit, dass  $V + W$  dieselbe Eigenschaft besitzt. Stellt nun  $V_1$  *nicht das Minimum unter allen Fortsetzungen*, sondern nur unter denen vor, welche die erwähnte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichen besitzen, und deren es unendlich viele giebt, *so ist für dieses  $V_1$  demnach der Schluss, dass  $\Delta V_1$  im Allgemeinen Null sei, berechtigt.*

---

## A n h a n g.

(S. S. 628.)

---

Es mögen  $n$  Flächen vorliegen, die nicht untereinander zusammenhängen, oder, genauer ausgedrückt, es sollen alle Punkte einer jeden von den Punkten der übrigen um mehr als eine angebbare feste, wenn auch noch so kleine Grösse entfernt sein.

Die Aufgabe, eine Function  $W$  zu bilden, welche auf jeder von diesen Flächen gegebene Werthe annimmt, lässt sich auf  $n$  einfachere reduciren. Man hat nur nöthig,  $n$  Functionen zu bilden, von denen die  $v^{\text{te}}$  — wenn  $v$  successive die Zahlen 1, 2, etc.,  $n$ , vorstellt — auf der  $v^{\text{ten}}$  Fläche die gegebenen Werthe annimmt, auf den übrigen  $n - 1$  Flächen sich aber in Null verwandelt. Die Summe solcher  $n$  Functionen giebt eine Function  $W$  von der verlangten Beschaffenheit.

Ist nun  $v$  irgend eine Function, die an  $n - 1$  gegebenen Flächen gegebene Werthe annimmt, so werde ich aus derselben eine Function  $V$  bilden, welche mit  $v$  an den  $n - 1$  Flächen übereinstimmt, an einer

gegebenen  $n^{\text{ten}}$  Fläche aber überall verschwindet. Genügt  $v$  den Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit, so wird auch dieses  $V$  ihnen genügen.

Zunächst sei die  $n^{\text{te}}$  Fläche die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $\alpha$  und dem Mittelpunkte  $A$ ; im Inneren der Kugel möge kein Theil von einer der anderen Flächen liegen. Man beschreibe um  $A$  eine zweite Kugel mit einem Radius  $\beta$ , der grösser als  $\alpha$ , aber noch so klein ist, dass auch diese Kugel kein Stück von einer der übrigen  $n - 1$  Flächen einschliesst. Ist  $r$  die Entfernung eines beliebigen Punktes  $P$  von  $A$ , so setze ich  $V$  in den Punkten  $P$ , die

ausserhalb oder auf der Kugel mit dem Radius  $\beta$  liegen, gleich  $v$ ;  
auf und in der von den beiden Kugelflächen begrenzten Schale gleich

$$v \left[ 1 - \left( \frac{\beta^2 - r^2}{\beta^2 - \alpha^2} \right)^3 \right];$$

drittens, innerhalb der Kugel mit dem Radius  $\alpha$  gleich Null.

Diese Function  $V$  genügt den Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit, vorausgesetzt, dass  $v$  ihnen genügt, erhält an den  $n - 1$  Flächen dieselben Werthe wie  $v$ , und verwandelt sich sogar innerhalb der ganzen Kugel mit dem Radius  $\alpha$  in Null.

Der Fall, in welchem die  $n^{\text{te}}$  Fläche beliebig ist, lässt sich auf den vorigen speciellen zurückführen. Kann man die  $n^{\text{te}}$  Fläche nicht in eine einzige Kugel einschliessen, die kein Stück einer von den  $n - 1$  anderen Flächen enthält, so erfolgt die Einschliessung durch eine grössere aber endliche Zahl  $s$  von Kugeln, die nach ihren Mittelpunkten  $A_1, A_2, \text{etc.}, A_s$  heissen mögen. Man lege diese Kugeln so, dass jede ein Stück der  $n^{\text{ten}}$  Oberfläche, aber keines von den übrigen  $n - 1$  Flächen enthält; die Möglichkeit, auf diese Art durch eine endliche Anzahl von Kugeln alle Theile der  $n^{\text{ten}}$  Fläche einzuschliessen, ist klar, da ein und dasselbe Stück in mehreren Kugel vorkommen darf.

Nach diesen Vorbereitungen bilde man aus  $v$ , nach der im speciellen Falle angewandten Methode, eine Function, wie die oben  $V$  genannte, die nun  $v_1$  heisse, welche nicht nur an der Oberfläche der Kugel  $A_1$ , sondern auch im Inneren derselben Null ist und an den übrigen  $n - 1$  Flächen mit  $v$  übereinstimmt. Bildet man aus  $v_1$  nach derselben Methode eine Function  $v_2$ , die auch in der Kugel  $A_2$  verschwindet etc., endlich aus  $v_{s-1}$  eine Function  $v_s$ , die noch in  $A_s$  verschwindet, so wird  $v_s$  an den gegebenen  $n - 1$  Flächen dieselben Werthe wie  $v$  besitzen, und an der  $n^{\text{ten}}$ , wie verlangt wurde, verschwinden; also wird  $v_s$  die Aufgabe lösen.

Indem man  $n$  successive die Werthe 2, 3, etc. bis zu einer beliebigen ganzen Zahl beilegt, erhält man hieraus den Satz:

*Kann eine Function, die auf einer einzigen Fläche gegebene Werthe besitzt, nach den Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit in den Raum fortgesetzt werden, so lässt sie sich auch so fortsetzen, dass sie noch ausserdem die Bedingung erfüllt, auf einer beliebigen Anzahl gegebener Flächen, welche mit der ersten nicht zusammenhängen, zu verschwinden.*

Halle, September 1871.

---