

Notiz über die Normalen einer Fläche des zweiten Grades.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *F. Joachimsthal* mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes*.)

Zur *Jacobischen* Entstehungsweise der Flächen zweiten Grades;
zur Bequemlichkeit für das Ellipsoid ausgesprochen *).

Sind ABC und abc zwei confocale Ellipsen und die Punktpaare A, a ; B, b ; C, c entsprechende Punkte, d. h. deren Coordinaten sich wie die parallelen Axen verhalten, oder was dasselbe ist, liegen A, a auf einer confocalen Hyperbel, ebenso B, b und C, c ; nimmt man ferner im Innern der kleineren Ellipse abc einen Punkt D und construirt eine Pyramide $abcd$, so dass $ad = AD$, $bd = BD$, $cd = CD$, so beschreibt bekanntlich nach *Jacobi* d ein Ellipsoid. Es ist mir nun gelungen, denjenigen Satz zu finden, welcher dem ebenen Satze entspricht, dass die Normale der Ellipse den Winkel zwischen den Radien Vektoren halbirt.

Trägt man nämlich von d aus auf da , db , dc drei solche Stücke da' , db' , dc' ab, die von D aus auf DA , DB , DC abgetragen, drei im Gleichgewicht stehende Kräfte darstellen, so ist die Resultante von da' , db' , dc' die Normale des Ellipsoids.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgendem

Lehrsatz I. Es sei $\varphi(r, r_1, r_2) = 0$ die Gleichung zwischen den Entfernungen eines Punktes O von a , a_1 , a_2 , welche sämmtlich in derselben Ebene liegen, so stellen $\varphi'(r)$, $\varphi'(r_1)$, $\varphi'(r_2)$, nach Oa , Oa_1 , Oa_2 angebracht, drei im Gleichgewicht befindliche Kräfte vor.

Lehrsatz II. Es sei $\varphi(r, r_1, r_2, r_3) = 0$ die Gleichung zwischen den Entfernungen des Punktes O im Raume von vier anderen Punkten im Raume a , a_1 , a_2 , a_3 , so stellen $\varphi'(r)$, $\varphi'(r_1)$, $\varphi'(r_2)$, $\varphi'(r_3)$ nach Oa , Oa_1 , Oa_2 , Oa_3 mit gehörigem Zeichen angebracht, vier im Gleichgewicht wirkende Kräfte dar.

*) Die eine Hälfte der hier folgenden Notiz trägt das Datum des 28. März 1861. Es liegt uns also, da *Joachimsthal* am 5. April 1861 starb, in diesem Aufsatz eine seiner letzten Arbeiten über das von ihm so vielseitig behandelte Problem der Normalen der Flächen zweiten Grades vor.
H.

Beweis. (Nur für Lehrsatz II., da der für I. analog ist.) Es sei $\psi(r, r_1, r_2, r_3) = 0$ die Gleichung irgend einer Fläche, so ist die Normale derselben die Resultante der Kräfte $\psi'(r), \psi'(r_1), \psi'(r_2), \psi'(r_3)$; die Gleichung der Fläche kann aber ebenso gut geschrieben werden $\psi(r, r_1, r_2, r_3) + \varphi(r, r_1, r_2, r_3) = 0$, demnach ist die Normale die Resultante von $\psi'(r) + \varphi'(r), \psi'(r_1) + \varphi'(r_1)$, u. s. w. also bilden $\varphi'(r), \varphi'(r_1), \varphi'(r_2), \varphi'(r_3)$ ein Gleichgewichtssystem.

Es ergibt sich jetzt Folgendes:

Jede Normale trifft die Ebene der Figur innerhalb der kleineren Ellipse. Es sei n der Punkt, wo die Normale in einem Punkte d der Fläche die Ebene der Figur trifft. Man denke sich die drei Fundamentalpunkte a, b, c so gewählt, dass a und b mit n in einer Geraden liegen: da nun dn die Richtung der Resultante von drei nach da, db und dc wirkenden Kräften sein soll, so muss die letztere gleich Null sein. Sind A, B, C die zu a, b, c gehörigen Punkte und D der zu d gehörige Constructionspunkt der Ebene, so sollen die nach AD, BD, CD gerichteten Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Die nach CD gerichtete Kraft ist aber gleich Null, also müssen A, B und D in einer Geraden liegen und die nach AD und BD gerichteten Kräfte gleich sein, also auch die nach da und db gerichteten, d. h. *dn halbirt den Winkel adb*. Nun sind da und db nur der Bedingung unterworfen, mit dn in einer Ebene zu liegen: also *legt man durch einen Punkt der Fläche d und den kleineren Constructionskegelschnitt (die „modular focal“ Mac-Cullaghs) einen Kegel, so ist die Normale im Punkte d die Axe dieses Kegels.*