

III. *Das kugelförmige Electrodynamometer; von J. Fröhlich in Budapest.*

I. Befindet sich in einem homogenen magnetischen oder electromagnetischen Felde ein magnetischer oder electromagnetischer Körper von beliebiger Gestalt und beliebiger magnetischer Vertheilung, dann ist das Drehungsmoment, welches dieser Körper erleidet, unter allen Umständen gleich der im Felde herrschenden constanten Kraft, multiplicirt in das magnetische Moment des Körpers und den Sinus des Winkels, den die Krafrichtung mit der Axe des Momentes einschliesst.

Beabsichtigt man nun ein Electrodynamometer zu construiren, dessen sogenannte Multiplicatorfunction ein möglichst einfaches Gesetz befolge, d. i. dass das Drehungsmoment der electro-dynamischen Kräfte vom Ablenkungswinkel in einfachster Weise abhängt, dann wird man wohl bei obiger Anordnung bleiben müssen.

Zwar macht sich hier der veränderliche Einfluss des Erdmagnetismus in störender Weise bemerkbar, aber seine Beseitigung lässt sich bei den bisherigen Instrumenten nur auf Kosten der Einfachheit der Multiplicatorfunction erreichen, ein Umstand, welcher in den meisten Fällen mehr Unbequemlichkeit verursacht, als dieser Einfluss selbst.

Um nun ein Instrument herzustellen, welches sowohl die einfache Multiplicatorfunction besitze, als auch vom Erdmagnetismus unabhängig sei, ging ich von folgenden Ueberlegungen aus:

Bedeckt eine unendliche Anzahl gleichgerichteter Ströme derselben Intensität und von gleichem Ebenen-Abstand eine Kugelfläche, dann entsteht im Innern dieser Fläche ein homogenes electromagnetisches Feld; nach aussen hin wirkt aber eine solche strombedeckte Fläche wie ein unendlich kurzer Magnet von endlichem Momente.¹⁾ Man

1) Maxwell, A treatise on electricity and magnetism. Vol. II. p. 277. 1873. O. Fröhlich, Pogg. Ann. CXLIII. p. 643. 1871.

denke sich zwei nahezu oder ganz gleiche Electromagnete (etwa Solenoide etc.) von beliebiger, jedoch symmetrischer Form zu einem astatischen, unveränderlichen Paare vereinigt und so aufgehängt, dass der eine im Innern der Kugelfläche, der andere aber vertical über (oder unter) dem Mittelpunkte dieser Fläche sich befinde. Das astatische Paar bewegt sich frei um die verticale Axe; das vom Erdmagnetismus darauf ausgeübte Drehungsmoment ist der Differenz der magnetischen Momente beider Electromagnete direct proportional und kann sehr leicht eliminirt werden. Das von der strombedeckten Kugelfläche auf den innern Electromagneten ausgeübte Drehungsmoment ist nach Obigem dem Sinus des Winkels direct proportional, welchen die beiden Axen miteinander bilden; in Bezug auf das Drehungsmoment, welches der obere Electromagnet von dieser Fläche erleidet, lässt sich mathematisch genau dasselbe erweisen; mithin besitzt bei dieser Anordnung unser Instrument die gewünschten Eigenschaften.

Die praktische Ausführung dieser Gedanken ergab das Electrodynamometer Taf. IV Fig. 6.

Dasselbe besteht im wesentlichen aus der electromagnetischen Kugelschale SS , dem astatischen Rollenpaare RR' und der Suspensionsvorrichtung T .

Die Kugelschale wurde nach folgenden Regeln construirt: Eine endliche, jedoch grössere Anzahl linearer Ströme kann als Ersatz der von der Theorie geforderten unendlich vielen Ströme zur Erzeugung eines homogenen electromagnetischen Feldes verwendet werden. Durch Bedecken der gegebenen Kugelfläche mit diesen Strömen, resp. Stromträgern, entsteht eine dünne Kugelschale, deren äussere Fläche um geringes grösser ist als die gegebene. Erstere soll nun wieder auf dieselbe Weise, womöglich mit der gleichen Anzahl von Strömen bedeckt werden, u. s. f., bis man eine genügend dicke, durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzte Schicht erhält, deren Wirkung den Anforderungen der Empfindlichkeit Genüge leistet.

Man sieht leicht, dass eine einfache Anordnung, wie

sie Taf. IV Fig. 7 im Durchschnitt zeigt, zum Ziele führt. cz Fig. 8 sei die Axe der Kugel und zugleich die gemeinschaftliche Axe aller Kreisströme, $c_1 c_2 c_3 c_4$ die Querschnitte der einzelnen linearen Ströme von gleichem Ebenen-Abstand; verbindet man deren Orte mit dem Mittelpunkte der Kugel und verlängert diese Radien, dann sind auch die an einer andern concentrischen Kugelfläche liegenden Orte $c'_1 c'_2 c'_3 c'_4$ Querschnitte von ebenfalls äquidistanten Kreisströmen, welche die grössere Fläche bedeckend, ebenfalls ein homogenes Feld erzeugen. Man fertige daher einzelne conische Spiralen aus gewöhnlichem, cylindrischem, isolirtem Drahte auf solche Weise, dass die Cosini der Neigungswinkel der Mantelfläche gegen die Axe nach einander die Werthe: $\frac{0,5}{n}$, $\frac{1,5}{n}$, $\frac{2,5}{n}$.. etc. und zuletzt $\frac{n-0,5}{n}$ erhalten, wobei n die Anzahl der die Halbkugelfläche bedeckenden Ströme. Alle diese Spiralen sind also Mantelflächen abgestutzter Conusse, deren gemeinsame Spitze der Kugelmittelpunkt ist; von jeder Gattung sind zwei Conusse nöthig, da man zwei Halbkugeln zu bedecken hat. Die Modelle bildeten zwanzig eigens nach diesen Angaben angefertigte Kegel von hartem Papiermachée, auf welchen die Spiralen, alle in derselben Entfernung $R = 50,0$ mm von der Spitze, angefangen und aufgewunden wurden. Die entstandenen 40 Spiralen zu je 20 Windungen wurden auf zwei gut ineinander passende, messingene Halbkugelschalen von 100 mm äusserm Durchmesser bei genauer Einhaltung der Aequidistanz mit Harz befestigt, und später alle Zwischenräume successive mit Harz ausgegossen. An der Stelle, wo (Taf. IV Fig. 6) das Verbindungsstück des astatischen Paares in die Kugel hinabreichen sollte, erhielten die (von der Mitte gerechneten) ersten zwei Spiralen eine geringe Einbuchtung. Die Spiralen sind nacheinander leitend verbunden. Der Apparat zur Erzeugung des homogenen Feldes besteht sonach aus zwei Halbkugelschalen, deren jede um eine horizontale Axe drehbar ist (Taf. IV Fig. 7), und die zusammen eine geschlossene Kugelschale bilden können; in diesem

Falle werden sie durch die Schrauben *ss* aneinander gepresst.

Das astatische Rollenpaar (Taf. IV Fig. 6) besteht aus zwei nahezu gleichen cylindrischen Spiralen von 30,0 mm Höhe und etwa 27,5 mm äusserm und 4,0 mm innerm Radius zu je 652 Windungen. Die Drahtenden der untern Rolle wurden um das dünne, messingene Verbindungsstück in zwei dünnen, parallelen, isolirten Drähten spiralförmig hinaufgeführt, und endeten in den Verbindungsschrauben *s' s'*; die Enden der obern Rolle befinden sich in den Schrauben *s'' s''*. Der Strom selbst geht durch die Aufhängungsdrähte zu den isolirten, umeinander gedrehten Drähten *dd* und kann von dort aus beliebig durch eine oder die andere Rolle oder auch durch beide zugleich nach jeder Richtung geleitet werden.

Die Aufhängevorrichtung ist für Biflarsuspension eingerichtet, und der Kopf derselben ist nach dem Muster des Instrumentes des Electrical Committee der British Association¹⁾ angefertigt; die Drähte bestehen aus Neusilber, um die elastische Nachwirkung möglichst gering zu machen.

Zwei Commutatoren gestatten jede Aenderung der Stromrichtung in der Kugelschale und dem astatischen Paare.

II. Wir gehen nun zur Theorie des Instrumentes über.

Die Potentialfunction einer von äquidistanten gleichgerichteten Strömen derselben Intensität bedeckten Kugel-
fläche ist für innere Punkte $\Omega' = -2 \frac{A}{a^2} z$; für äussere Punkte $\Omega'' = Aa \frac{z}{r^3}$ ²⁾; *A* ist eine Constante, *a* der Radius der Kugel, *z* die Richtung der Stromaxen und der der Kugel, *r* die Entfernung des äussern Punktes vom Kugelmittelpunkte. Hat man die Anzahl *N* einzelner Ströme, ist *i* deren Intensität, dann wird $A = -\frac{4\pi}{6} a Ni$, und daher

1) Maxwell, l. c. p. 331.

2) Maxwell, l. c. p. 277.

$\Omega' = \frac{4\pi}{3} Ni \frac{z}{a}$; $\Omega'' = -\frac{4\pi}{6} Ni a^2 \frac{z}{r^3}$. Befinden sich N' -Lagen concentrischer dünner Kugelschalen übereinander, deren jede die gleiche Anzahl Ströme besitzt, und bedeutet a_1 den innern, a_2 den äussern Radius der Schale, dann kann man ohne merklichen Fehler jede Spirale als von Strömen der Intensität i' stetig erfüllt denken und hat $N'i = (a_2 - a_1)i'$; ferner ist $i'da$ die zu einer Kugelschicht von der Dicke da gehörige Intensität, daher wird die Potentialfunction der ganzen Schale für innere und äussere Punkte:

$$\Omega' = \frac{4\pi}{3} NN'i \frac{z}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a}; \quad \Omega'' = -\frac{4\pi}{6} NN'i \frac{z}{r^3} \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} a^2 da.$$

Man setze zur Abkürzung:

$$-\frac{4\pi}{3} NN' \frac{1}{a_2 - a_1} \log \frac{a_2}{a_1} = F; \quad -\frac{4\pi}{6} \frac{NN'}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} = M_s;$$

es sind dies nur von der Construction und den Dimensionen der Schale abhängende Constanten, deren Bedeutung jedoch für die Folge sehr wichtig wird; F ist nämlich die Grösse der electromagnetischen Kraft im Innern der Schale, wenn dieselbe die Stromeinheit durchfliesst, M_s bedeutet das magnetische Moment der Schale für einen äussern Punkt bei derselben Stromintensität. Es ist daher:

$$(1) \quad \Omega' = -Fiz; \quad \Omega'' = M_s i \frac{z}{r^3}.$$

Nun ist das Potential der Schale auf die innere und auf die äussere Rolle zu bilden; bezeichnen W' und W'' diese Functionen, dann ist für die Schale und das astatiche Paar $W = W' + W''$, und das gegenseitig aufeinander ausgeübte Drehungsmoment:

$$(2) \quad -\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\frac{\partial W'}{\partial \varphi} - \frac{\partial W''}{\partial \varphi},$$

wobei φ einen vorläufig unbestimmt gelassenen Drehungswinkel bedeutet.

Man hat nun $W' = \sum m' \Omega'$, wenn m' das Element der an Stelle der electricen Ströme substituirten magnetischen Belegungen der innern Rolle bedeutet. Sowohl die

Axe der Schale als die der Rolle liegt horizontal; man hat daher, wie für jede Rolle im homogenen Felde:

$$(3) \quad W' = M' Fi^2 \cos \varphi;$$

dabei ist das magnetische Moment der cylindrischen Rolle von R_1' und R_2' innerm und äusserm Radius und $2b$ Breite, wenn dieselbe von der Stromeinheit durchflossen wird, und mn die gesammte Anzahl ihrer Windungen bedeutet:

$$(4) \quad M' = \frac{\pi mn}{2b(R_2' - R_1')} \frac{R_2'^3 - R_1'^3}{3} 2b;$$

schliesslich ist φ der Winkel zwischen der Rollen- und Schalenaxe.

Das Drehungsmoment, welches die innere Rolle von der Schale erleidet, ist somit:

$$(5) \quad - \frac{\partial W'}{\partial \varphi} = M' Fi^2 \sin \varphi.$$

Die Bestimmung von $W'' = \sum m'' \Omega''$ ist nicht so schnell zu erledigen, da sie selbst im einfachsten Falle zu elliptischen Integralen führt, welchen jede Uebersichtlichkeit abgeht. Wir wollen jedoch diese Function auf andere Art ganz allgemein darstellen.

Man setze $W'' = \sum m'' \sum \frac{m_{\mu}}{r}$; m_{μ} ist das Element des magnetischen Quantum, welches man bei ihrer Wirkung nach aussen für die Kugelschale substituiren kann; da jedoch nach Obigem für letztere ein unendlich kurzer Magnet von endlichem Momente gesetzt werden kann, so hat man:

$$W'' = m_{\mu} \sum \frac{m''}{r''} - m_{\mu} \sum \frac{m''}{r'' + dr''},$$

wenn jetzt m_{μ} das in einem seiner Pole concentrirt gedachte magnetische Quantum, $2h = \frac{dr''}{\cos(hr'')}$ die Entfernung beider Pole bedeutet. Man kann also schreiben:

$$(6) \quad W'' = M_s i \frac{\partial V''}{\partial h}.$$

Die Potentialfunction V'' der obern cylindrischen Rolle besteht aus zwei Theilen, welche von der magne-

tischen Belegung der vordern und der rückwärtigen Endfläche des Cylinders herrühren. Man setze also $V'' = V_1 + V_2$, und es ist für eine Endfläche eines Solenoides von n Windungen¹⁾ und der Dicke dR , durch welche ein Strom von der Intensität i' fließt:

$$V = 2\pi n i' dR \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} - \frac{1}{8} \frac{R^4}{r^3} Q_2 + \dots \right\};$$

ist die Dicke der cylindrischen Schale $R_2 - R_1$ und m die Anzahl der einzelnen cylindrischen Lagen, dann ist $inm = i' 2b (R_2 - R_1)$; daher für eine Endfläche einer solchen Spule:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} V = \frac{\pi m n i}{b (R_2 - R_1)} \\ \left\{ \frac{1}{2.3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r} - \frac{1}{2.4.5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^3} Q_2 + \frac{1}{2.4.6.7} \frac{R_2^7 - R_1^7}{r^5} Q_4 - \dots \right\} \end{array} \right\}$$

dabei sind Q_2, Q_4 etc. die bekannten Kugelfunctionen:

$$\frac{1.2.3\dots n}{1.3.5\dots(2n-1)} Q_n = \mu^n - \frac{n.n-1}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \dots$$

$\mu = \cos(r/b)$; r die Entfernung des räumlichen Punktes vom Mittelpunkte der Endfläche, $2b$ die Axe der Rolle.

Es hängen also V_1 und V_2 lediglich von den Entfernungen r_1 und r_2 und den Cosinis μ_1 und μ_2 der Winkel, die r_1 und r_2 mit der Rollenaxe einschliessen, ab, daher $V_1 = f(r_1 \mu_1)$; $V_2 = f(r_2 \mu_2)$.

Es sei nun HH (Taf. IV Fig. 9) die Axenrichtung der Kugelschale, BB die der obern Rolle, r_0 die Entfernung ihrer Mittelpunkte; die gegenseitigen Lagen der Axen seien beliebig; jedoch die eventuellen Bewegungen der Beschränkung unterworfen, dass sie nur in Drehungen um die verticale Axe bestehen können.

Um die hier auftretenden Verhältnisse leichter untersuchen zu können, verschieben wir HH parallel zu sich selbst, bis C mit O zusammenfällt. Man bilde nun aus den Richtungen r_0, b, h das sphärische Dreieck ZHB (Taf. IV Fig. 10). Es ist evident, dass die Horizontalprojectionen von h und b auf der Ebene XY miteinander

1) Maxwell, l. c. p. 280.

den Winkel η bilden, welcher durch die Ebenen ZOB und ZOH bestimmt ist. Dieser Winkel ist es, der sich bei den hier möglichen Bewegungen ändern kann, es ist das Drehungsmoment eines oder des andern Electromagnets um eine verticale Axe:

$$(8) \quad -\frac{\partial W''}{\partial \eta} = -M_s i \frac{\partial^2 V''}{\partial \eta \partial h} = -M_s i \left\{ \frac{\partial^2 V_1}{\partial \eta \partial h} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial \eta \partial h} \right\}.$$

Man hat aber allgemein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial h} + \frac{\partial V}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial h} &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial r}{\partial h} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h} \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \mu} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial r}{\partial h} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h} \right\} + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial h} + \frac{\partial V}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mu}{\partial \eta \partial h}. \end{aligned}$$

Aus (7) folgt:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= -D \left\{ \frac{1}{2.3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} - \dots \right\}; \\ \frac{\partial V}{\partial \mu} &= -D \left\{ \frac{1}{2.4.5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^3} Q_2' - \dots \right\}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= D \left\{ \frac{1}{3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^3} - \dots \right\}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} = -D \left\{ \frac{1}{2.4.5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^3} Q_2'' - \dots \right\}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \mu} &= D \left\{ \frac{3}{2.4.5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^4} Q_2' - \dots \right\}, \end{aligned} \right.$$

dabei ist $Q_2' = \frac{\partial Q_2}{\partial \mu}$, $Q_2'' = \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \mu^2}$ etc. und $D = \frac{\pi m n i}{b(R_2 - R_1)}$.

Will man die Quotienten für V_1 haben, so setze man $r = r_1$, $\mu = \mu_1$ in Q_2 , Q_2' , Q_2'' etc.; für V_2 aber $r = r_2$, $\mu = \mu_2$ und kehre sämtliche Vorzeichen um.

Die Differentialquotienten von r_1 , r_2 , μ_1 , μ_2 bestimmen sich folgendermassen.

Es seien die Richtungswinkel von $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha_0\beta_0\gamma_0$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$; ferner die Winkel $\angle r_0 h = \vartheta$, $\angle r_0 b = \vartheta'$, $\angle h b = \varepsilon$, $\angle r_1 b = \mu_1$, $\angle r_2 b = \mu_2$; schliesslich φ der Winkel zwischen den Ebenen SOB und SOH . Man hat nun (Taf. IV Fig. 9):

$$\begin{aligned}r_1 \cos \alpha_1 &= r_0 \cos \alpha_0 - b \cos \alpha' + h \cos \alpha \\r_1 \cos \beta_1 &= r_0 \cos \beta_0 - b \cos \beta' + h \cos \beta \\r_1 \cos \gamma_1 &= r_0 \cos \gamma_0 - b \cos \gamma' + h \cos \gamma\end{aligned}$$

Die Quadrirung und Summirung dieser und der für r_2 geltenden Ausdrücke gibt:

$$(10) \begin{cases} r_1^2 = r_0^2 + h^2 + b^2 + 2r_0 h \cos \vartheta - 2hb \cos \varepsilon - 2r_0 b \cos \vartheta' \\ r_2^2 = r_0^2 + h^2 + b^2 + 2r_0 h \cos \vartheta + 2hb \cos \varepsilon + 2r_0 b \cos \vartheta' \end{cases}$$

Multiplicirt man aber obige drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ und addirt sie und behandelt die Ausdrücke für r_2 ebenso, dann wird:

$$(11) \quad r_1 \mu_1 = r_0 \cos \vartheta' - b + h \cos \varepsilon, \quad r_2 \mu_2 = r_0 \cos \vartheta' + b + h \cos \varepsilon.$$

Das System (10) und (11) genügt, um die gewünschten Quotienten zu finden; doch muss bezüglich der Differentiirung nach η eine für die praktische Anwendung wichtige Bemerkung Platz greifen. Der Winkel η hängt von den Winkeln ε , ϑ , ϑ' ab, wenn beide Stromträger beweglich sind; hingegen nur von ε und ϑ' , wenn die Kugelschale fixirt, oder nur von ε und ϑ , wenn die cylindrische Rolle festliegt. Wir werden die Differentialquotienten nach η so bilden, als ob beide Stromträger zugleich beweglich wären; man kann dann, wie später gezeigt wird, durch Weglassen einiger Glieder zu denjenigen Quotienten gelangen, welche einem oder dem andern Specialfalle entsprechen. Zu dem Zwecke führe man die Hülfswinkel η_1 und η_2 ein, sodass (Taf. IV Fig. 10): $\eta = \eta_1 + \eta_2$, ferner:

$$(12) \quad \begin{cases} \cos \vartheta = \cos \gamma_0 \cos \gamma - \sin \gamma_0 \sin \gamma \cos \eta_1 \\ \cos \vartheta' = \cos \gamma_0 \cos \gamma' - \sin \gamma_0 \sin \gamma' \cos \eta_2 \end{cases}$$

und ebenso:

$$(13) \quad \begin{cases} \cos \varepsilon = \cos \gamma \cos \gamma' - \sin \gamma \sin \gamma' \cos \eta \\ \cos \varepsilon = \cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi \end{cases}$$

Aus dem Gleichungssysteme (10) bildet man $\frac{\partial r_1}{\partial h}$, $\frac{\partial r_2}{\partial h}$; ferner:

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial \eta} = \frac{\partial (r^2)}{\partial (\cos \eta)} \cdot \frac{\partial (\cos \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial (r^2)}{\partial (\cos \vartheta)} \cdot \frac{\partial (\cos \vartheta)}{\partial \eta_1} + \frac{\partial (r^2)}{\partial (\cos \vartheta')} \cdot \frac{\partial (\cos \vartheta')}{\partial \eta_2};$$

daraus findet sich mit Hülfe von (12) und (13) $\frac{\partial r_1}{\partial \eta}$, ebenso

$\frac{\partial r_2}{\partial \eta}$; ähnliche Rechnungen ergeben $\frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta \partial h}$, $\frac{\partial^2 r_2}{\partial \eta \partial h}$. Differenziert man das System (11) einmal vollständig nach h und einmal vollständig nach η , dann ergibt sich mit Berücksichtigung der bisherigen Resultate $\frac{\partial \mu_1}{\partial h}$, $\frac{\partial \mu_2}{\partial h}$; $\frac{\partial \mu_1}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mu_2}{\partial \eta}$; schliesslich liefert die vollständige Differentiirung des Systems (11) nach h und η mit Hülfe sämtlicher bisher gefundener Quotienten $\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \eta \partial h}$, $\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \eta \partial h}$.

Es folgen hier die allgemein gültigen Werthe dieser Differentialquotienten unter der Beschränkung, dass h unendlich klein sei, wie dies auch in unserem Falle vollkommen stattfindet.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial r_1}{\partial h} &= \frac{r_0 \cos \vartheta - b \cos \varepsilon}{r_1}, & \frac{\partial r_2}{\partial h} &= \frac{r_0 \cos \vartheta + b \cos \varepsilon}{r_2}, \\
 \frac{\partial r_1}{\partial \eta} &= \frac{r_0 b}{r_1} \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2, & \frac{\partial r_2}{\partial \eta} &= -\frac{r_0 b}{r_2} \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2, \\
 \frac{\partial \mu_1}{\partial h} &= \frac{(r_1 + \mu_1 b) \cos \varepsilon - \mu_1 r_0 \cos \vartheta}{r_1^2}, & \frac{\partial \mu_2}{\partial h} &= \frac{(r_2 - \mu_2 b) \cos \varepsilon - \mu_2 r_0 \cos \vartheta}{r_2^2}, \\
 \frac{\partial \mu_1}{\partial \eta} &= -\frac{r_0(r_1 + \mu_1 b)}{r_1^2} \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2, & \frac{\partial \mu_2}{\partial \eta} &= \frac{r_0(r_2 - \mu_2 b)}{r_2^2} \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2, \\
 \frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta \partial h} &= \frac{\sin \gamma}{r_1} (b \sin \gamma' \sin \eta - r_0 \sin \gamma_0 \sin \eta_1) \\
 &\quad - \frac{r_0 b}{r_1^3} (r_0 \cos \vartheta - b \cos \varepsilon) \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2, \\
 \frac{\partial^2 r_2}{\partial \eta \partial h} &= -\frac{\sin \gamma}{r_2} (b \sin \gamma' \sin \eta + r_0 \sin \gamma_0 \sin \eta_1) \\
 &\quad + \frac{r_0 b}{r_2^3} (r_0 \cos \vartheta + b \cos \varepsilon) \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2, \\
 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \eta \partial h} &= \frac{r_0}{r_1^4} \{r_0(r_1 + 3\mu_1 b) \cos \vartheta - b(2r_1 + 3\mu_1 b) \cos \varepsilon\} \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2 \\
 &\quad - \frac{1}{r_1^2} \{(r_1 + \mu_1 b) \sin \gamma' \sin \eta - r_0 \mu_1 \sin \gamma_0 \sin \eta_1\} \sin \gamma, \\
 \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \eta \partial h} &= \frac{r_0}{r_2^4} \{r_0(r_2 - 3\mu_2 b) \cos \vartheta + b(2r_2 - 3\mu_2 b) \cos \varepsilon\} \sin \gamma_0 \sin \gamma' \sin \eta_2 \\
 &\quad + \frac{1}{r_2^2} \{(-r_2 + \mu_2 b) \sin \gamma' \sin \eta + r_0 \mu_2 \sin \gamma_0 \sin \eta_1\} \sin \gamma.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)
 \end{aligned}$$

Will man das auf nur einen der Stromträger ausgeübte Drehungsmoment bestimmen, dann ist entweder ϑ oder ϑ' constant, somit $\frac{\partial}{\partial \eta_1} (\cos \vartheta) = 0$ oder $\frac{\partial}{\partial \eta_2} (\cos \vartheta') = 0$; man hat daher die Regel: liegt die Kugelschale (resp. der dafür substituirte unendlich kleine Magnet) fest, dann setze man in System (14) sämmtliche Glieder, die den Factor $\sin \eta_1$ besitzen, gleich Null, ist hingegen die cylindrische Rolle festliegend und die Schale beweglich, dann sind alle, den Factor $\sin \eta_2$ enthaltenden Glieder gleich Null zu nehmen.

Damit ist unsere Aufgabe: die Bestimmung des Drehungsmomentes eines unendlich kurzen Magnets von endlichem Momente auf eine cylindrische Spule von endlicher Länge und Dicke und von beliebiger Lage, oder auch vice versa, vollständig gelöst.

Es sollen nun zwei in der Praxis vorkommende wichtige Fälle näher untersucht werden.

1. Die Kugelschale liege fest, ihre Axe horizontal; die bewegliche Rolle befinde sich oberhalb derselben mit ebenfalls horizontaler Axe, sodass die geometrischen Mittelpunkte beider in ein und dieselbe verticale Linie fallen; man sucht das auf die Rolle ausgeübte Drehungsmoment. Alle mit $\sin \eta_1$ behafteten Glieder verschwinden; ausserdem ist $\gamma_0 = 0$, $\gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}$; $\vartheta = \vartheta' = \frac{\pi}{2}$; $\varepsilon = \eta = \varphi$, $r_1 = r_2 = r$;

$\mu_1 = -\mu_2$; daher $\frac{\partial r_1}{\partial h} = -\frac{\partial r_2}{\partial h} = -\frac{b}{r} \cos \varphi$; $\frac{\partial r_1}{\partial \eta} = \frac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0$;
 $\frac{\partial \mu_1}{\partial h} = \frac{\partial \mu_2}{\partial h} = \frac{r + \mu_1}{r^2} b$; $\frac{\partial \mu_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu_2}{\partial \eta} = 0$; $\frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta \partial h} = -\frac{\partial^2 r_2}{\partial \eta \partial h} = \frac{b}{r} \sin \varphi$;
 $\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \eta \partial h} = -\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \eta \partial h} = \frac{r + \mu_1}{r^2} b \sin \varphi$. Man hat daher für diesen Fall:

$$-\frac{\partial W''}{\partial \eta} = -\frac{\partial W''}{\partial \varphi} \\ = -M_s i \left\{ \frac{b}{r} \left(\frac{\partial V_1}{\partial r_1} - \frac{\partial V_2}{\partial r_2} \right) - \frac{r + \mu_1}{r^2} b \left(\frac{\partial V_1}{\partial \mu_1} + \frac{\partial V_2}{\partial \mu_2} \right) \right\} \sin \varphi;$$

doch ist in V_1 und V_2 auch $r_1 = r_2 = r$ und $\mu_1 = -\mu_2$; also $Q_{1,2} = Q_{2,2}$; $Q_{1,4} = Q_{2,4}$ etc.; ebenso $Q'_{1,2} = -Q'_{2,2}$;

$Q_{1,4} = -Q_{2,4}$ etc.; da erstere nur aus geraden, letztere nur aus ungeraden Potenzen von μ_1 resp. μ_2 bestehen. Somit wird $V_1 = -V_2$; $\frac{\partial V_1}{\partial r_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial r_2}$; $\frac{\partial V_1}{\partial \mu_1} = +\frac{\partial V_2}{\partial \mu_2}$. Die Werthe dieser Quotienten nehme man aus Gl. 9; substituirt man, zieht alles zusammen und bemerkt, dass das magnetische Moment der obern Rolle, wenn dieselbe von der Stromeinheit durchflossen wir, den Werth:

$$(15) \quad M'' = \frac{\pi m n}{2b(R_2'' - R_1'')} \cdot \frac{R_2''^3 - R_1''^3}{3} 2b$$

annimmt, und dass $\mu_1 = -\mu_2 = \frac{b}{r}$, so findet sich schliesslich:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial W''}{\partial \varphi} &= M_s M'' i^2 \frac{1}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3}{4.5} \left(3Q_2 + \left(\frac{r}{b} + \frac{b}{r} \right) Q_2' \right) \frac{R_2''^5 - R_1''^5}{R_2''^3 - R_1''^3} \cdot \frac{1}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4.6.7} \left(5Q_4 + \left(\frac{r}{b} + \frac{b}{r} \right) Q_4' \right) \frac{R_2''^7 - R_1''^7}{R_2''^3 - R_1''^3} \cdot \frac{1}{r^4} + \dots \right\} \sin \varphi, \end{aligned} \right.$$

wobei: $Q_2 = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2}$, $Q_2' = 3\mu$; $Q_4 = \frac{35}{8} \mu^4 - \frac{15}{4} \mu^2 + \frac{3}{8}$,

$$Q_4' = \frac{5}{2} (7\mu^2 - 3)\mu; \quad \mu = \frac{b}{r}.$$

Man wird wohl in den seltensten Fällen genöthigt sein, mehr als die hier entwickelten Glieder zu rechnen; das Bildungsgesetz derselben ist aber leicht ersichtlich.

Dieses Drehungsmoment ist es, welches bei Anwendung unseres Instrumentes in Betracht kommt; das gesammte, von der Kugelschale auf das astatische Rollenpaar ausgeübte Drehungsmoment wird:

$$(17) \quad -\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\left(\frac{\partial W'}{\partial \varphi} + \frac{\partial W''}{\partial \varphi} \right) = \left(FM' + M_s M' \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4.5} \dots \right) \right) i^2 \sin \varphi.$$

Somit ist unsere frühere Behauptung vollständig erwiesen, nämlich dass dies Drehungsmoment vom Winkel φ in einfachster Weise abhängt. Die in den Klammern befindlichen Grössen F , M_s , M' , M'' sind Constanten des Instrumentes, r die Entfernung des Kugelmittelpunktes von den Axenenden der obern Rolle, ferner Q_2 etc., sämmtlich unabhängig von φ .

Hat man das Rollenpaar bifilar aufgehängt, sind α , β und λ die Entfernungen der Aufhänge- resp. Befestigungspunkte von einander und die Länge eines Drahtes, τ der von der Torsion der Drähte abhängige Coëfficient, m die Masse des Rollenpaares, g die Beschleunigung der Schwere, dann ist das rückwirkende Drehungsmoment der Schwere und das der Torsion¹⁾: $\frac{1}{4} \frac{\alpha\beta}{\lambda} mg \sin \chi + \tau \chi$, wenn χ den Ablenkungswinkel bedeutet. Nun ist bei jeder Bifilarsuspension χ klein, und wenn es 3° nicht übersteigt, kann man statt $\tau \chi$, $\tau \sin \chi$ setzen, was von sehr geringem Einfluss ist, da das erste, vom Gewicht des aufgehängten Apparates herrührende Glied vielmal grösser ist als das zweite.

In Bezug auf den Einfluss des Erdmagnetismus ist zu bemerken, dass das von ihm verursachte Drehungsmoment, wie schon erwähnt, der Differenz $M' - M''$ oder $M'' - M'$ direct proportional ist, je nach der Stromrichtung, dies ist jedoch bei genauer Anfertigung der Rollen fast unmerklich, sodass man nur das Mittel zweier, infolge dessen sehr nahe aneinander liegender Ablesungen bei entgegengesetzten Stromrichtungen zu nehmen hat, um diesen Einfluss gänzlich zu eliminiren.

Stellt man nun die Axen des Rollenpaares in den magnetischen Meridian²⁾, die Axe der Kugelschale senkrecht darauf; bedeutet ferner ψ den Ablenkungswinkel und A das Trägheitsmoment des aufgehängten Apparates, dann wird seine Bewegungsgleichung:

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(FM' + M_s M'' \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{4.5} \dots \right) \right) i^2 \cos \psi - \left(\frac{1}{4} \frac{\alpha\beta}{\lambda} mg + \tau \right) \sin \psi.$$

Tritt Gleichgewicht ein, dann ist $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, und man hat für die Stromintensität:

1) Maxwell, l. c. p. 109. Eigentlich wäre das erste Glied mit $\sqrt{1 - \frac{4\alpha\beta}{\lambda^2} \sin^2 \frac{1}{2} \chi}$ zu dividiren.

2) Bei dieser Stellung ist das Drehungsmoment des Erdmagnetismus am geringsten.

$$(18) \quad i^2 = \frac{\frac{\alpha\beta}{\lambda} mg + r}{FM' + M_s M'' \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4.5} \dots\right)} \cdot \operatorname{tg} \psi.$$

Unser Instrument ist somit ein theoretisch richtiges Tangenten-Electrodynamometer. Man bemerkt sofort, dass bei Benutzung des Milligramms, Millimeters und der Zeitsecunde die Intensität nach Weber'schen mechanischen Einheiten, Dimension $\frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}}{t}$, ausgedrückt wird. —

2. Der zweite zu untersuchende Fall sei der, wo die Wirkung einer cylindrischen Rolle auf einen unendlich kleinen Magnet zu bestimmen ist, wenn die Rollenaxe und die des Magnets in derselben horizontalen Ebene liegen, und erstere zugleich in die Richtung der Verbindungslinie r_0 der beiden Mittelpunkte fällt. Dieser Fall kam bei Bestimmung der Constanten des Instrumentes in Anwendung.

Man setze die mit $\sin \eta_2$ behafteten Glieder gleich Null; ausserdem ist $\gamma_0 = \gamma' = \gamma = \frac{\pi}{2}$; $\vartheta' = 0$; $\varepsilon = \vartheta = \eta_1 = \eta$; $r_1 = r_0 - b$, $r_2 = r_0 + b$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$; $Q_2 = Q_4 = \dots = 1$;
 $\frac{\partial r_1}{\partial h} = \frac{\partial r_2}{\partial h} = \cos \eta$; $\frac{\partial r_1}{\partial \eta} = \frac{\partial r_2}{\partial \eta} = 0$; $\frac{\partial \mu_1}{\partial h} = \frac{\partial \mu_2}{\partial h} = 0$; $\frac{\partial \mu_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu_2}{\partial \eta} = 0$;
 $\frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta \partial h} = \frac{\partial^2 r_2}{\partial \eta \partial h} = \sin \eta$, $\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \eta \partial h} = \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \eta \partial h} = 0$. Es

$$\begin{aligned} \text{bleibt} \quad & - \frac{\partial W''}{\partial \eta} = M_s i \left(\frac{\partial V_1}{\partial r_1} + \frac{\partial V_2}{\partial r_2} \right) \\ & = \frac{\pi m n i^2}{b(R_2 - R_1)} \left\{ \frac{1}{2.3} (R_2^3 - R_1^3) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2.4.5} (R_2^5 - R_1^5) \left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_2^4} \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

Entwickelt man die negativen Potenzen von r_1 und r_2 nach fallenden Potenzen von r_0 und steigenden von b , ordnet und setzt wieder M'' für das magnetische Moment der von der Stromeinheit durchflossenen Rolle, dann ist:

$$9) \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial W''}{\partial \eta} = M_s M'' i^2 \frac{2}{r_0^3} & \left\{ 1 + \left(2b^2 - \frac{9}{10} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \right) \frac{1}{r_0^2} \right. \\ & + \left(3b^4 - \frac{9}{2} \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \cdot b^2 + \frac{13}{30} \frac{R_2^7 - R_1^7}{R_2^3 - R_1^3} \right) \frac{1}{r_0^4} \\ & \left. + \left(4b^6 - \frac{63}{5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \cdot b^4 + \frac{5}{4} \frac{R_2^7 - R_1^7}{R_2^3 - R_1^3} \cdot b^2 - \frac{7}{144} \frac{R_2^9 - R_1^9}{R_2^3 - R_1^3} \right) \frac{1}{r_0^6} + \dots \right\} \sin \eta. \end{aligned} \right.$$

Es ist dies das Drehungsmoment, welches bei den meisten Galvanometern vorkommt, wo eine cylindrische Rolle einen kleinen Magnet vom Meridian ablenkt. In den meisten Fällen begnügt man sich mit der Genauigkeit des ersten Gliedes und setzt $-\frac{\partial W''}{\partial \eta}$ dem Momente M'' , oder, was dasselbe bedeutet, der gesamten stromumflossenen Fläche direct proportional. Dies kann nur dann als genügend genau gelten, solange r_0 etwa hundertmal grösser ist als R_2 , R_1 und b . Ist aber r_0 nur etwa zehnmal grösser als diese Dimensionen, dann kann man der Spule durch die Bedingung:

$$2b^2 - \frac{9}{10} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} = 0$$

eine solche Form geben, dass das zweite Glied der Entwicklung immer verschwindet, während die übrigen zu vernachlässigen sind.

Besteht die Spule aus einer einzigen cylindrischen Schicht von Radius R , dann ist $R_2^5 - R_1^5 = d(R^5)$; $R_2^3 - R_1^3 = d(R^3)$, und man findet $b^2 = \frac{3}{4} R^2$.

Ist hingegen der innere Radius R_1 gegen den äusseren zu vernachlässigen, dann wird $b^2 = \frac{9}{20} R_2^2$.

In allen anderen Fällen wird man sich an die Bedingungsgleichung halten.

Bei Construction von Galvanometern sind diese Verhältnisse nicht ausser Acht zu lassen.

III. Vor Bestimmung der eigentlichen Constanten des Instrumentes müssen wir vor allem nachweisen, inwiefern man berechtigt ist, die Wirkung unserer Kugelschale so aufzufassen, als ob in jeder concentrischen Kugelfläche derselben wirklich unzählige lineare Ströme vorhanden

wären, und daher im Innern der Schale ein thatsächlich homogenes Feld entstünde.

Wir hatten für die Potentialfunction einer solchen unendlich dünnen Lage für einen innern Punkt $\Omega' = \frac{4\pi}{3} Ni \frac{z}{a}$; daher die Kraft in Richtung der Z-Axe $P = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{N}{a} i$. Bei unserem Instrumente ist $N=40$, somit $P = \frac{2\pi i}{a} 26,667$.

Berechnet man nun dieselbe Kraft für den Mittelpunkt der Kugel nach den bekannten Regeln als die Summe der Wirkungen der vierzig einzelnen Kreisströme,

dann ist $P = 2\pi i 2 \sum_1^n \frac{a^2}{(a^2 + \varrho_k^2)^{\frac{3}{2}}}$; dabei ist die Entfernung

der Stromebene vom Mittelpunkt $\varrho_k = a \cdot \frac{2k-1}{2n}$; und $2n = N$.

Für $n = 20$, findet sich $P = \frac{2\pi i}{a} 26,6750$.

Der Unterschied zwischen beiden Berechnungsarten ergibt 0,00032 des ganzen Werthes; derselbe ist aber hier durchaus nicht massgebend, da, genau genommen, die erste Berechnungsart nur dann angewendet werden darf, wenn N ausserordentlich gross ist.

Das Hauptgewicht ist auf die Gleichförmigkeit des Feldes zu legen; berechnen wir zu diesem Zwecke die Kraft, welche die vierzig Kreisströme auf einen Punkt der Axe ausüben, welcher um die Hälfte des Radius, $\frac{a}{2}$, vom Kugelmittelpunkte absteht. Bedeutet ψ_k den Winkel zwischen der Axe und dem vom fraglichen Punkte zum Kreisstrom gezogenen Strahl, dann hat man $P = \frac{2\pi i}{a} \sum_1^{2n} \frac{\sin^2 \psi_k}{(1,25 + \cos \psi_k)^{\frac{3}{2}}}$, dabei $\cos \psi = \pm \frac{2k-1}{2n}$. Man setze $n = 20$, und es ergibt sich $P = \frac{2\pi i}{a} 26,6794$.

Die Aenderung der Kraft vom Mittelpunkte der Schale bis zur Entfernung des halben Radius beträgt sonach 0,00016 des ganzen Werthes. Man kann daher ohne mess-

bare Fehler den Raum, welchen die concentrische Kugelfläche vom Radius $\frac{a}{2}$ einschliesst, als homogenes Feld betrachten, und dies bei unserem Instrumente um so mehr, als der Raum, den die innere Rolle einnimmt, im Verhältniss zur mittlern Kugelfläche der Schale kleiner ist als der hier betrachtete.

Man bemerkt zugleich, dass im selben Maasse, wie das innere Feld als homogen angenommen werden kann, auch die Aussenwirkung der Kugelschale gleich der eines unendlich kurzen Magnets von endlichem Momente gesetzt werden kann. —

Die Constanten des Instrumentes liessen sich aus den Dimensionen, der Anzahl der Windungen etc. leicht berechnen; doch da ein kleiner Fehler bei den schwierig messbaren Grössen, etwa der Dicke der Kugelschale etc. von bedeutendem Einfluss auf den Werth derselben sind, schien es zweckmässiger, mit Hülfe einer grossen, cylindrischen Spule von leicht und sicher messbaren Dimensionen die Wirkungen der Kugelschale und der einzelnen Rollen des astatischen Paares mit denen der Vergleichsrolle zu vergleichen und so ihre Constanten, resp. Momente, zu bestimmen. Die Dimensionen der Vergleichsrolle waren $R_1 = 94,12$ mm, $R_2 = 112,07$ mm, $b = 27,51$ mm; ferner war $mn = 429 = 13 \times 33$; dessen Moment $\log M = 7,11363$.

Wir skizziren nur den Vorgang dieser Messungen, bei welchen Hr. st. ph. G. Bartonieck gütigst mitwirkte, und geben dann ihre Resultate.

1. Ein sehr kleiner Ringmagnet wurde in das Innere der Kugelschale gehängt (doch trug ersterer oben einen hinausragenden Spiegel). Die Schalenaxe und die der Vergleichsrolle fielen in dieselbe horizontale Linie und zwar senkrecht zum magnetischen Meridian. Der Strom verzweigte sich in die Schale und in die Vergleichsrolle; die Intensität der Zweigströme wurde durch successives Einschalten von Widerständen so lange abgeändert, bis sich die Wirkungen beider vollständig compensirten, während jeder

für sich einen sehr bedeutenden Ausschlag hervorrief. Das Verhältniss der Intensitäten in der Kugel und in der Rolle war 58,715; die Entfernung des Mittelpunktes derselben von der Aufhängungsaxe des kleinen Magnets 302,55 mm. Aus diesen Daten ergab sich die constante Kraft im Innern der Schale, wenn dieselbe von der Stromeinheit durchflossen wird, $\log F = 0,98361$.

2. Die relative Lage der Rolle und der Schale zum Meridian blieb dieselbe; der kleine Magnet wurde so aufgehängt, dass sein Mittelpunkt in der Verlängerung beider Axen zu liegen kam. Derselbe Strom ging durch beide; es wurde die Summe und Differenz ihrer Wirkungen gemessen. Die Kräfte der Schale und der Rolle verhielten sich wie 3,0908 : 1; die Entfernung ihrer resp. Mittelpunkte von der Drehungsaxe des Magnets betrug $r_s = 240,58$ mm; $r_r = 419,85$ mm. Daraus ergab sich das magnetische Moment der Schale nach aussen, wenn die Stromeinheit dieselbe durchfliesst, $\log M_s = 6,84077$.

3. und 4. Die Vergleichsrolle behielt ihre vorige Stellung zum Meridian; zwischen ihr und dem aufgehängten Magnet wurde eine Rolle des astatischen Paares so aufgestellt, dass ihre Axe mit der der erstern in dieselbe horizontale Linie fiel; nun wurde bei gleicher Stromintensität in beiden die Entfernung der kleinen Rolle so lange geändert, bis sich die Wirkungen beider ebenfalls compensirten. Dasselbe geschah mit der andern Rolle des Paares. Man beachte nun, dass der allgemeine Ausdruck (19) des auf den kleinern Magnet ausgeübten Drehungsmomentes für die grosse und die kleine Rolle gültig ist; man berechne die in der Klammer befindlichen höheren Glieder für letztere aus den direct gemessenen Grössen $R_1' = R_1'' = 4,00$ mm; $R_2' = 27,65$ mm; $R_2'' = 27,13$ mm; $b' = b'' = b = 15,0$ mm der kleineren Rollen und bilde den numerischen Werth der Klammer, welcher von 1 nur wenig abweicht; daraus, und mit Hülfe der vollständig bekannten Wirkung der Vergleichsrolle ergibt sich für das magnetische Moment der innern und äussern Rolle, wenn die-

selbe von der Stromeinheit durchflossen wird, $\log M' = 5,74153$, $\log M'' = 5,72189$; ihr Verhältniss 1,046.

Schliesslich wurde die Entfernung r des Kugelmittelpunktes von den Axenenden der obern Rolle bei dem zur Beobachtung eingerichteten Instrumente gleich 236,21 mm gefunden; man hat $b = 15,0$ mm, $\mu = 0,06349$, und daraus für den Werth $\frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4.5} \dots\right)$ (16) ... $\log \frac{1}{r^3}$ (...) = 2,87877 - 10; ferner ist nach dem Bisherigen $FM' = 5,310,550$; $M_s M'' \cdot \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{4.5} \dots\right) = 276,335$.

Noch ist das Drehungsmoment zu bestimmen, welches durch das Gewicht des aufgehängten Apparates und die Torsion der Drähte entsteht. Dies geschieht am besten nach der bekannten Methode von Gauss durch Aufhängen bekannter Gewichte auf den Querarm AA (Taf. IV Fig. 6) und Messung der Schwingungszeiten. Es fand sich für unser Instrument $\left(\frac{1}{4} \frac{\alpha \beta}{\lambda} mg + \tau\right) = 65\,873\,400$.

Somit haben wir schliesslich folgenden Ausdruck für die Intensität i eines Stromes, der im Electrodynamometer eine Ablenkung ψ hervorruft:

$$i^2 = 11,7908 \operatorname{tg} \psi; \quad \text{Dimension } \frac{ml}{l^2};$$

i wird hier unmittelbar in mechanischen Stromeinheiten ausgedrückt. Fliesst daher die Weber'sche Stromeinheit durch das Instrument, dann erzeugt der Strom eine Ablenkung von $4^\circ 51' 54,8''$.

Der Vollständigkeit wegen theilen wir noch die gemessenen Widerstände w_s, w', w'', w der Kugelschale, der innern, der äussern Rolle und der beiden Aufhängungsdrähte mit, sämmtlich in Ohm'schen Einheiten ausgedrückt, $w_s = 10,084$, $w' = 2,6010$, $w'' = 2,4917$, $w = 8,1307$.

Es ist noch zu bemerken, dass bei Aenderungen der Suspension etc. nur r (die Entfernung der Mittelpunkte der Endflächen des Cylinders vom Kugelmittelpunkte), α, β, λ variabel sind, während F, M', M'', M_s unbedingt constant bleiben.

Hätte man nach Edelmann's Vorgange¹⁾ Unifilar-suspension angewendet, so würde man $\tau_1 \chi$ statt

$\left(\frac{1}{4} \frac{\alpha \beta}{\lambda} mg + \tau\right) \sin \chi$ zu setzen haben, und das Quadrat der Stromintensität wäre mit $\frac{\psi}{\cos \psi}$ proportional.

Wir haben im Obigen gezeigt, dass die praktische Ausführung eines Electrodynamometers, dessen Bewegungen den theoretisch einfachsten Gesetzen folgen, nicht mit so grossen Schwierigkeiten verbunden ist, als dies beim ersten Anblicke erscheint; ja man wird bei grösseren Instrumenten die Anzahl der konischen Spiralen leicht auf hundert bringen können und dadurch eine so bedeutende Annäherung an das theoretisch homogene electromagnetische Feld erzielen, dass auch die feinste Messung²⁾ weit hinter dieser zurückbleibt.

Entfernt man schliesslich das astatische Rollenpaar und hängt an dessen Stelle einen Magnet von beliebiger Form und Dimension in das Innere der Kugel, so hat man ein vollständiges, theoretisch genaues Tangentengalvanometer.

Bevor wir diesen Gegenstand gänzlich verlassen, mögen hier einige allgemeinere Bemerkungen über die Erzeugung eines homogenen electromagnetischen Feldes mittelst galvanischer Ströme Platz finden.

Man denke sich einen homogenen, magnetisirbaren Körper in ein gleichförmiges magnetisches Feld gebracht und durch Induction magnetisirt. Entspricht seine Form gewissen Gesetzen³⁾, dann ist seine Magnetisirung gleichförmig, und auch das magnetische Feld im Innern des Körpers gleichförmig; somit erzeugt der magnetisirte Körper für sich auch ein homogenes Feld in seinem Innern.⁴⁾

1) Wiedemann, Galvanismus II. (2) p. 720. 1874.

2) Die Genauigkeit der magnetischen und electrischen absoluten Messungen übersteigt wohl nie 0,0001 des ganzen Werthes.

3) Maxwell, l. c. p. 62 u. 63.

4) Thomson, reprint of papers on electrostatics, p. 470, Note, 1872.

Man kann aber den Körper durch äquidistante, zur magnetisirenden Kraft verticale Schnitte in parallele, gleichdicke Lamellen theilen, deren magnetisches Moment ihrer Fläche direct proportional ist. Jede solche unendlich dünne Lamelle lässt sich nach bekannten Gesetzen durch einen galvanischen Strom substituiren, dessen Bahn mit dem Rande der Lamelle zusammenfällt.

Die magnetische Wirkung eines solchen gleichmässig magnetisirten Körpers auf innere und äussere Punkte, jedoch nicht für Punkte seiner Oberfläche, lässt sich durch diejenige einer unendlichen Anzahl gleichgerichteter, diese Fläche bedeckender Ströme von gleichem Ebenenabstand vollständig ersetzen. Dies gibt eine einfache, allgemeine Methode zur Herstellung eines homogenen Feldes durch galvanische Ströme.

Der einzige bisher bekannte Körper, welcher im homogenen Felde gleichmässig magnetisirt werden kann, ist das Ellipsoid.¹⁾

Mit Leichtigkeit wird man eine solche Fläche in der angegebenen Weise mit einer Lage von Strömen, resp. Stromträgern bedecken können; aber schon die Legung der zweiten Schichte ist mit ausserordentlichen Schwierigkeiten verbunden, denn die äussere Oberfläche der ersten, aus gleichdicken Drähten bestehenden Lage ist keine Ellipsoidfläche mehr, da es bekanntlich keine zwei confocale oder auch nur concentrische Ellipsoide gibt, die eine überall gleich dicke Schicht zwischen sich haben.²⁾ Ausserdem ist die Aussenwirkung einer strombedeckten Ellipsoidfläche, obwohl deren Moment leicht zu bestimmen³⁾, im allgemeinen durchaus nicht gleich derjenigen eines unendlich kurzen Magnets von endlichem Momente, da auch die Attraction eines homogenen Ellipsoides nicht

1) Maxwell, l. c. p. 63.

2) In letzter Zeit construirte E. Riecke, Wied. Ann. IV. p. 226. 1878, ein Galvanometer, in welchem zwei strombedeckte Halbellipsoidschalen zur Erzeugung eines homogenen Feldes dienen.

3) Beer, Electrostatik. p. 189. 1865.

durch die einer in einem Punkte concentrirten Masse substituirt werden darf. Man wird sich daher auch fernerhin auf den speciellen, jedoch für die praktische Ausführung vorzüglich geeigneten Fall der Kugel beschränken.

Physikal. Inst. d. Univ. Budapest, am 24. April 1879.

IV. *Ueber das Verhalten von Membranen in tönenden Luftsäulen; von W. Kohlrausch.*

Als Seebeck¹⁾ die Versuche von N. Savart über die Lage der Knoten und Bäuche in einem reflectirten stehenden Schallwellensystem wiederholte, fand er, dass Membranen, die von beiden Seiten der Luft frei zugänglich sind, in den Bäuchen, dagegen solche, die über ein geschlossenes Gefäss luftdicht gebunden nur einseitig mit der Aussenluft in Berührung stehen, in den Knoten schwingen. Er suchte die letztere Thatsache bekanntlich durch Umbeugung der Schallwellen an den Rändern des Gefässes zu erklären. Seitdem sind mehrfach ähnliche Beobachtungen²⁾ an Membranen in stehenden Luftschwingungen gemacht worden, aber nirgends finde ich die Erklärung der erwähnten Erscheinung dahin präcisirt, dass die Bewegung einer beiderseits freien „offenen“ Membran durch Mitnahme derselben von den Bewegungen der umgebenden Luft bedingt ist, dass dagegen eine Membran, die luftdicht über ein geschlossenes Gefäss gebunden ist — kurz „gedeckte“ Membran — durch schnell wechselnde Druckänderungen der äussern Luft in Schwingungen versetzt wird. Die im Folgenden zu beschreibenden Versuche bestätigen diese Erklärung des Verhaltens der Membranen und führen gleichzeitig auf einige andere erwähnenswerthe Erschei-

1) Pogg. Ann. LIX. p. 177. 1843.

2) V. v. Lang, Wied. Ann. VII. p. 303. 1879. Lord Rayleigh, Philos Mag. (5) Vol. VII. p. 149. 1879.