Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen.

Von

Walter Schnee in Berlin.

§ 1.

Einleitung.

In seiner kürzlich erschienenen großen Arbeit*): „Beiträge zur analytischen Zahlentheorie" hat Herr Landau folgenden Satz bewiesen, in welchem $s = \sigma + ti$ gesetzt ist:

„Es sei für jedes $\delta > 0$ und alle n von einer gewissen Stelle $n_0 = n_0(\delta)$ an

$$|b_n| < n^{\delta},$$

also a fortiori

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $\Re(s) > 1$ absolut konvergent. Die durch die Reihe dargestellte Funktion sei für $\Re(s) \geqq \eta$ regulär, wo $0 < \eta < 1$ ist; und für $|t| \geqq 1$, $\sigma \geqq \eta$ sei

$$|f(s)| < B|t|^k,$$

wo B und $k \geqq 0$ konstant sind. Dann ist die Reihe auf der Geraden $\Re(s) = 1$ und darüber hinaus konvergent, nämlich mindestens für

$$\Re(s) > 1 - \frac{1-\eta}{2^{\nu}},$$

wo ν die kleinste ganze Zahl $> k$ bedeutet."

Dieser Satz erscheint mir darum besonders interessant, weil zum ersten Mal aus den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion allgemein eine Aussage über das Konvergenzgebiet der Reihe entwickelt wird; bekanntlich braucht auf der Konvergenzgeraden einer Dirichletschen Reihe kein singulärer Punkt der durch diese Reihe dargestellten Funktion zu liegen, nicht einmal in beliebiger Nähe

*) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26, 2. Sem. 1908, S. 169—302, siehe besonders für den zitierten Satz S. 252—255.

derselben. Im Falle $k < 1$ ergibt der Satz die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > \frac{\eta+1}{2}$; dieser Fall ist darum von besonderem Interesse, weil umgekehrt, wenn η innerhalb, aber nicht auf dem Rande des Konvergenzgebietes der Reihe $f(s)$ gelegen ist, stets für $\sigma \geqq \eta$, $|t| \geqq 1$ die Beziehung

$$|f(s)| < B|t|^k$$

stattfindet, wo k eine Zahl < 1 ist.*) Es ist mir nun gelungen, im Falle $k < 1$ aus den Voraussetzungen von Herrn Landau, aus welchen noch die Annahme $0 < \eta$ weggelassen werden kann, durch eine andere Beweisanordnung die Konvergenz der Reihe sogar für

$$\Re(s) > \eta + \frac{k(1-\eta)}{1+k} = \frac{\eta+k}{1+k}$$

zu beweisen. Die Reihe ist also z. B. speziell sicher so weit konvergent, als die durch die Reihe dargestellte Funktion regulär ist und kurz gesagt die Größenordnung $(\log|t|)^\gamma$ hat, wo γ eine beliebig große positive Zahl bedeuten kann. Die Zahl $\frac{\eta+k}{1+k}$ noch durch eine kleinere zu ersetzen, gestattet wenigstens die von mir angewendete Beweismethode nicht.

Ich werde die behauptete Tatsache gleich für allgemeinere Dirichletsche Reihen beweisen, da dies nicht viel schwieriger sein wird. Für diese lautet der betreffende Satz:

Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s},$$

---

*) Durch partielle Summation kann man nämlich leicht folgenden Satz beweisen (vergl. die zitierte Arbeit von Herrn Landau, S. 259—260):

„Wenn

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

für $s > 1$ absolut konvergiert und für $s > \alpha$ $(0 \leqq \alpha < 1)$ konvergiert, so ist, wenn $\delta > 0$, $\lambda > \alpha$ gegeben ist und $\lambda \leqq 1$ ist, für $\sigma \geqq \lambda$, $|t| \geqq 1$

$$|f(s)| < B \cdot |t|^k,$$

wo $k = \frac{1-\lambda}{1-\alpha} + \delta$ ist und B eine absolute Konstante bezeichnet.".

Der analoge Satz gilt natürlich auch, wie Herr Hadamard an der noch im Text zu zitierenden Stelle gezeigt hat, für den allgemeineren Reihentypus

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ_n eine beliebige Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Zahlen bedeuten, für welche die Beziehung (1) des Textes erfüllt ist.

wo die λ_n eine beliebige Folge positiver, monoton ins Unendliche wachsender Zahlen bedeuten, für welche

$$\text{(1)} \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = a$$

endlich ist, und welche für jede Zahl $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle ϱ_0 an der Beziehung

$$\text{(2)} \qquad \lambda_{\varrho+1} - \lambda_\varrho > e^{-(a+\delta)\lambda_\varrho}$$

*genügen.**) *Es sei ferner für jede Zahl $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle n_0 an*

$$\text{(3)} \qquad |b_n| < e^{\delta \lambda_n},$$

so daß die Reihe $f(s)$ infolge (1) für $\Re(s) > a$ absolut konvergiert. Es sei die durch die Reihe $f(s)$ dargestellte Funktion für $\Re(s) > \eta$ regulär, wo η eine beliebige reelle Zahl $< a$ ist, und es sei für $\sigma > \eta$, $|t| \geqq 1$

$$\text{(4)} \qquad |f(s)| < B|t|^k,$$

wo $0 \leqq k < 1$ ist. Dann konvergiert die Reihe $f(s)$ mindestens für

$$\Re(s) > \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} = \frac{\eta + ka}{1+k}.$$

Zum Beweise benütze ich für positive Zahlen w das Riemannsche Integral

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{f(s) e^{ws}}{s}\, ds,$$

welches schon von den Herren Phragmén**) und von Mangoldt***) in der analytischen Zahlentheorie zu strengen Schlüssen angewandt worden ist; Herr Hadamard†) hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit allgemein bewiesen, daß dieses Integral nicht nur konvergiert, wenn die Integrations-

*) Aus (1) folgt bekanntlich, daß die Reihe $f(s)$, wenn sie überhaupt für einen reellen Punkt $s = s_0$ konvergiert, in der Halbebene $\Re(s) > s_0 + a$ absolut konvergiert, d. h. daß die Breite des Streifens bedingter Konvergenz höchstens a betragen kann. Die Beziehung (2) muß noch hinzugefügt werden, da aus (1) nur folgt, daß sie unendlich oft, aber nicht von einer gewissen Stelle an erfüllt ist.

**) „Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel", Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar, Bd. 48, 1891, S. 721—744, besonders S. 741—744.

***) Zu Riemanns Abhandlung: „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe", Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), Bd. 114, 1895, S. 255—305, besonders S. 274—277.

†) „Sur les séries de Dirichlet", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 25, 1. Sem. 1908, S. 326—330. „Rectification à la note ‚Sur les séries de Dirichlet'", l. c., S. 395—396.

gerade $\Re(s) = c$ dem absoluten, sondern auch, wenn sie dem bedingten Konvergenzbereich der Dirichletschen Reihe $f(s)$ angehört, für welche ebenfalls die Beziehung (1) vorausgesetzt wird. Ich gelange nun dadurch zum Ziel, daß ich Integrale der Form

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{f(s)\, e^{ws}}{s}\, ds$$

untersuche, auch wenn die Gerade $\Re(s) = c$ nicht dem bedingten Konvergenzbereich der Reihe $f(s)$, sondern nur dem Definitionsgebiet der analytischen Funktion $f(s)$ angehört. Allerdings werde ich für den vorliegenden Zweck nicht den Grenzübergang zu $T = \infty$ auszuführen haben.

§ 2.

Hilfssatz 1: *Es ist für jede Zahl $T > 0$ und zwei Zahlen $c > 0$, $v > 0$*

$$\left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds \right| < \frac{2e^{-vc}}{vT}, \qquad \left| \int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s}\, ds - 2\pi i \right| < \frac{2e^{vc}}{vT}.$$

Um die erste Formel zu beweisen, wenden wir den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $A \pm Ti$ an, wo A eine sehr große positive Zahl ist; in diesem Rechteck ist der Integrand $\frac{e^{-vs}}{s}$ regulär, und wir erhalten:

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds = \int_{c-Ti}^{A-Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds + \int_{A-Ti}^{A+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds + \int_{A+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds.$$

Gehen wir zur Grenze $A = \infty$ über, so verschwindet das an zweiter Stelle rechts stehende Integral, weil dann der Integrand gleichmäßig beliebig klein wird, während der Integrationsweg die konstante Länge $2T$ behält; die beiden anderen Integrale nähern sich ebenfalls bestimmten Grenzwerten. Es ergibt sich also:

$$\int_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds = \int_{c-Ti}^{\infty-Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds + \int_{\infty+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s}\, ds = e^{-vc} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v(\sigma - Ti)}}{c+\sigma-Ti}\, d\sigma - e^{-vc} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v(\sigma+Ti)}}{c+\sigma+Ti}\, d\sigma$$

$$= 2iJ\left(e^{-vc} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v(\sigma-Ti)}}{c+\sigma-Ti}\, d\sigma \right),$$

wo $J(a+ib)$ den imaginären Teil b der komplexen Zahl $a+ib$ bedeutet. Also ist:

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{-vs}}{s} \cdot ds\right| < \frac{2e^{-vc}}{T} \int\limits_0^\infty e^{-v\sigma} d\sigma = \frac{2e^{-vc}}{vT},$$

womit die erste Formel der Behauptung bewiesen ist.

Um die zweite Formel zu beweisen, wenden wir den Cauchyschen Satz auf das Rechteck mit den Ecken $c \pm Ti$, $-A \pm Ti$ an, wo wieder A eine sehr große positive Zahl ist; dann hat der Integrand $\frac{e^{vs}}{s}$ in diesem Rechteck die einzige außerwesentliche Singularität $s = 0$, und wir erhalten:

$$\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds = \int\limits_{c-Ti}^{-A-Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds + \int\limits_{-A-Ti}^{-A+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds + \int\limits_{-A+Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds + 2\pi i.$$

Aus demselben Grunde wie oben verschwindet auch hier das auf der rechten Seite in der Mitte stehende Integral beim Grenzübergang $A = \infty$, und wir erhalten:

$$\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds = -\int\limits_0^\infty \frac{e^{v(c-\sigma-Ti)}}{c-\sigma-Ti} d\sigma + \int\limits_0^\infty \frac{e^{v(c-\sigma+Ti)}}{c-\sigma+Ti} d\sigma + 2\pi i,$$

$$\left|\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{e^{vs}}{s} ds - 2\pi i\right| < \frac{2e^{vc}}{T} \int\limits_0^\infty e^{-v\sigma} d\sigma = \frac{2e^{vc}}{vT},$$

womit auch die zweite Formel des Hilfssatzes 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2: *Bezeichnet w_n den Mittelpunkt jedes Intervalles λ_n bis λ_{n+1}, so daß also $w_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$ ist, so ist zu jeder Zahl $\delta > 0$ stets eine Konstante B_1 anzugeben, so daß für alle diese $w = w_n$ die Beziehung*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w - \lambda_\nu|} < B_1$$

*besteht.**)

Beweis: Ist n hinlänglich groß, so sind stets zwei Zahlen ϱ und τ vorhanden, so daß

$$\lambda_{\varrho-1} < \lambda_n - 1 \leqq \lambda_\varrho, \qquad \lambda_\tau \leqq \lambda_{n+1} + 1 < \lambda_{\tau+1}$$

ist. Dann ist für $w = w_n$ sowie alle $\nu = 1, 2, \cdots, \varrho - 1$ die Differenz

$$w - \lambda_\nu > \lambda_n - \lambda_\nu > 1,$$

---

*) Eine ähnliche Formel ist für $\lambda_n = \log n$ zu ganz anderem Zwecke schon von Herrn Landau aufgestellt worden, l. c., S. 283, 286.

und ebenso für alle $\nu = \tau + 1,\ \tau + 2, \cdots$ bis ins Unendliche die Differenz

$$\lambda_\nu - w > \lambda_\nu - \lambda_{n+1} > 1.$$

Es ist ferner für alle ν der Beziehung $\nu_0 \leqq \nu \leqq n$, wo ν_0 nur von δ abhängt, infolge (2)

$$\begin{aligned} w - \lambda_\nu &= (w - \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) + \cdots + (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \\ &> \frac{1}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n} + e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_{n-1}} + \cdots + e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_\nu} \\ &> \frac{n-\nu+1}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n}, \end{aligned}$$

und andererseits für $n < \nu \leqq \tau$

$$\begin{aligned} \lambda_\nu - w &= (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) + (\lambda_{\nu-1} - \lambda_{\nu-2}) + \cdots + (\lambda_{n+1} - w) \\ &> e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_{\nu-1}} + e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_{\nu-2}} + \cdots + \frac{1}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n} \\ &> \frac{\nu-n}{2} e^{-\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_\tau}. \end{aligned}$$

Endlich konvergiert infolge (1) die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-(a+\delta)\lambda_\nu} = B_2.$$

Man erhält daher für hinlänglich großes n unter Berücksichtigung von (1)

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{w-\lambda_\nu} + \sum_{\nu=\varrho}^{n} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{w-\lambda_\nu} + \sum_{\nu=n+1}^{\tau} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{\lambda_\nu - w} + \sum_{\nu=\tau+1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{\lambda_\nu - w} \\ &< \sum_{\nu=1}^{\varrho-1} e^{-(a+\delta)\lambda_\nu} + e^{-(a+\delta)\lambda_\varrho} \cdot e^{+\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_n} \cdot 2 \cdot \sum_{\nu=\varrho}^{n} \frac{1}{n-\nu+1} \\ &\qquad + e^{-(a+\delta)\lambda_{n+1}} e^{+\left(a+\frac{\delta}{4}\right)\lambda_\tau} \cdot 2 \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\tau} \frac{1}{\nu-n} + \sum_{\nu=\tau+1}^{\infty} e^{-(a+\delta)\lambda_\nu} \\ &< B_2 + 3e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_\varrho + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)(\lambda_n - \lambda_\varrho)} \log n + 3e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_{n+1} + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)(\lambda_\tau - \lambda_{n+1})} \log\tau \\ &< B_2 + 3e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_\varrho + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)} (a+1)\lambda_n + 3e^{-\frac{3\delta}{4}\lambda_{n+1} + \left(a+\frac{\delta}{4}\right)} (a+1)\lambda_\tau \\ &< B_2 + 4(a+1)e^{-\frac{\delta}{2}\lambda_\varrho}\lambda_\varrho + 4(a+1)e^{-\frac{\delta}{2}\lambda_{n+1}}\lambda_{n+1} \\ &< B_2 + 1 \leqq B_1. \end{aligned}$$

Wird B_1, welches ebenso wie alle folgenden Konstanten $B_2, B_3, \cdots$ nur von δ abhängt, hinlänglich groß gewählt, so gilt dieses Resultat nicht nur für alle n von einer gewissen, von δ abhängigen Stelle an, sondern für alle $n = 1, 2, \cdots$.

Zusatz: Es sei $a' < a$ und es sei p der größte Index, für welchen $\lambda_p \leqq \beta w$ ist, wo β irgend eine Zahl > 0 bezeichnet. Dann ergibt sich unter Benutzung der vorangestellten Rechnung:

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-(a'+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} e^{(a-a')\lambda_\nu} < e^{(a-a')\lambda_p} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|}$$

$$< e^{(a-a')\lambda_p} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-(a+\delta)\lambda_\nu}}{|w-\lambda_\nu|} < B_1 e^{(a-a')\lambda_p} \leqq B_1 e^{w\beta(a-a')}.$$

Von nun an wird die Beziehung (2) nicht mehr gebraucht werden.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes: Es sei zur Abkürzung

$$a_1 = \eta + k(a-\eta) + 3\delta, \quad b = (1-k)(a-\eta) - \delta, \quad c = k(a-\eta) + \delta$$

gesetzt, wo $\delta > 0$ ist und δ so gewählt wird, daß $f(a_1)$ nicht verschwindet und b positiv ist, und es sei für eine beliebig große Zahl n, bzw. für das nach dem Hilfssatze 2 zugehörige w, die Zahl $T = e^{w(a-\eta)}$ gesetzt. Wir wenden nun den Cauchyschen Satz auf den Integranden

$$f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $b \pm Ti, -c \pm Ti$ an, in welchem nach Voraussetzung der Integrand regulär ist bis auf die außerwesentliche Singularität im Punkte $s = 0$. Dann ergibt sich, wenn nacheinander

$$s = \sigma - Ti, \quad s = -c + ti, \quad s = \sigma + Ti$$

gesetzt wird:

$$J_0 = \int_{b-Ti}^{b+Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds$$

$$= \int_{b-Ti}^{-c-Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds + \int_{-c-Ti}^{-c+Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds + \int_{-c+Ti}^{b+Ti} f(a_1+s)\frac{e^{ws}}{s}\,ds + 2\pi i f(a_1)$$

$$(5) \quad = -\int_{-c}^{b} f(a_1+\sigma-Ti)\frac{e^{w(\sigma-Ti)}}{\sigma-Ti}\,d\sigma + i\int_{-T}^{+T} f(\eta+2\delta+ti)\frac{e^{w(-c+ti)}}{-c+ti}\,dt$$

$$+ \int_{-c}^{b} f(a_1+\sigma+Ti)\frac{e^{w(\sigma+Ti)}}{\sigma+Ti}\,d\sigma + 2\pi i f(a_1)$$

$$= -J_1 + iJ_2 + J_3 + 2\pi i\, f(a_1).$$

Wir schätzen zunächst die rechts stehenden Integrale ab. Infolge (4) ergibt sich:

$$|J_1| = \left| \int_{-c}^{b} f(a_1 + \sigma - Ti) \frac{e^{w(\sigma - Ti)}}{\sigma - Ti} d\sigma \right| < (b + c) B \frac{e^{wb} T^k}{T}$$

$$= B_3 \frac{e^{w[(1-k)(a-\eta)-\delta]} e^{wk(a-\eta)}}{e^{w(a-\eta)}} = B_3 e^{-\delta w},$$

$$|J_2| = \left| \int_{-T}^{+T} f(\eta + 2\delta + ti) \frac{e^{w(-c+ti)}}{-c+ti} dt \right| < 2Be^{-wc} \int_1^T \frac{t^k}{t} dt + B_4 e^{-wc}$$

$$< B_5 e^{-wc} T^k = B_5 e^{-w[k(a-\eta)+\delta]} e^{wk(a-\eta)} = B_5 e^{-\delta w}.$$

Das Integral J_3 unterscheidet sich für reelle Koeffizienten b_n von J_1 nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles und genügt auch bei komplexen Werten der Koeffizienten derselben Abschätzung. In dem in Gleichung (5) links stehenden Integrale J_0 dürfen wir für $f(a_1 + s)$ die Reihenentwicklung einsetzen, da ja unsere Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = a + 2\delta$ (absolut) konvergiert, und dürfen weiter gliedweise integrieren, da sie auf dieser Geraden sogar gleichmäßig konvergiert. Wir erhalten:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} J_0 &= \int_{b-Ti}^{b+Ti} f(a_1 + s) \frac{e^{ws}}{s} ds = \int_{b-Ti}^{b+Ti} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\lambda_\nu (a_1 + s)} \right\} \frac{e^{ws}}{s} ds \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1} \int_{b-Ti}^{b+Ti} \frac{e^{(w-\lambda_\nu)s}}{s} ds. \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Hilfssatz 1 an, indem wir für $\nu = 1, 2, \cdots n$ den Exponenten $w - \lambda_\nu = v$, für $\nu = n + 1, n + 2, \cdots$ den Exponenten $w - \lambda_\nu = -v$ annehmen, so daß immer $v > 0$ ist, und erhalten:

$$\left| J_0 - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1} \right| < \frac{2}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu| e^{-\lambda_\nu a_1} \cdot \frac{e^{(w-\lambda_\nu)b}}{|w - \lambda_\nu|} = \frac{2e^{wb}}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_\nu| e^{-\lambda_\nu (a+2\delta)}}{|w - \lambda_\nu|}.$$

Wenden wir weiter die Beziehung (3) und den Hilfssatz 2 an, so ergibt sich:

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \left| J_0 - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1} \right| &< B_6 \frac{e^{wb}}{T} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_\nu (a+\delta)}}{|w - \lambda_\nu|} < B_7 \frac{e^{wb}}{T} \\ &= B_7 \cdot \frac{e^{w[(1-k)(a-\eta)-\delta]}}{e^{w(a-\eta)}} = B_7 e^{-w[k(a-\eta)+\delta]}. \end{aligned}$$

Setzt man alle Abschätzungen in Gleichung (5) ein, so folgt:

$$(8)\quad \left|2\pi i\left(f(a_1)-\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1}\right)\right| < 2B_3 e^{-\delta w} + B_5 e^{-\delta w} + B_7 e^{-w[k(a-\eta)+\delta]}$$
$$< B_8 e^{-\delta w},$$

wo B_8 eine absolute, nur von δ, aber nicht von n oder w abhängige Konstante ist. Hieraus aber ergibt sich die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $s = a_1 = \eta + k(a-\eta) + 3\delta$, und, da δ beliebig klein sein konnte, in der ganzen Halbebene $\Re(s) > \eta + k(a-\eta)$. Ist nämlich bei festem δ eine beliebig kleine Zahl δ' gegeben, so bestimmen wir w_0 so groß, daß $\frac{B_8}{2\pi} e^{-\delta w_0} < \delta'$ ist; dann ist für alle $n \geqq n_0$

$$\left|f(a_1) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu a_1}\right| < \delta',$$

wo n_0 durch dasjenige Intervall λ_{n_0} bis λ_{n_0+1} bestimmt wird, in dessen Mitte w_0 gelegen ist. Also konvergiert $f(s)$ für $s = a_1$.

Zweiter Teil des Beweises: Es soll nunmehr im Falle $0 < k < 1$ bewiesen werden, daß die Reihe $f(s)$ nicht nur für $\Re(s) > \eta + k(a-\eta)$, sondern sogar für $\Re(s) > \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k}$ konvergiert, und zwar unter Benutzung des gefundenen Resultates. Dazu nehmen wir allgemein an, daß die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > d$ bewiesen sei, wo d eine beliebige, aber bestimmte Zahl ist, welche den Beziehungen

$$\eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} < d < a$$

genügt, und setzen

$$a' = a(1-k) + kd, \quad a_1' = \eta + k(a-\eta) - k^2(a-d).$$

Dann ist für alle diese d:

$$\eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k} < a_1' < d < a' < a;$$

hierbei vertritt a' im folgenden die Rolle, welche die Größe a in dem vorangestellten Beweise spielte, und a_1' ist dasjenige Argument, von dem ab wir die Konvergenz der Reihe $f(s)$ beweisen wollen. Dazu wenden wir den Cauchyschen Satz auf den Integranden

$$f(a_1' + 2\delta + s)\,\frac{e^{ws}}{s}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $b' \pm Ti$, $-c' \pm Ti$ an, wo

$$b' = a' - a_1' - \delta, \quad c' = a_1' - \eta + \delta, \quad T = e^{w(a'-\eta)}$$

ist; da bei hinreichend kleinem δ die Zahl $b' > 0$ ist, und da wir der Bequemlichkeit halber $f(a_1' + 2\delta)$ verschieden von Null annehmen dürfen, so ist in diesem Rechteck der Integrand regulär bis auf die außerwesentliche Singularität im Punkte $s = 0$. Wir erhalten genau wie oben die (5) entsprechende Formel:

$$(5') \qquad J_0' = -J_1' + iJ_2' + J_3' + 2\pi i f(a_1' + 2\delta),$$

wo die Integrale J' wie die Integrale J definiert sind, nur daß an Stelle der Größen $a_1, b, c, \eta + 2\delta$ die Größen $a_1' + 2\delta, b', c', \eta + \delta$ zu setzen sind.

Es ergeben sich daher ganz analoge Abschätzungen:

$$|J_1'| < (b' + c') B \frac{e^{wb'} T^k}{T} = B_3' e^{w(a' - a_1' - \delta - (a' - \eta)(1-k))} = B_3' e^{-\delta w},$$

$$|J_2'| < B_5' e^{-wc'} T^k = B_5' e^{w(-a_1' + \eta - \delta + k(a' - \eta))} = B_5' e^{-\delta w};$$

J_3' erfüllt dieselbe Ungleichung wie J_1'. Da ferner die Reihe $f(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = a' + \delta$ konvergiert und, wie aus der Konvergenz von $f(s)$ für $s = a'$ folgt, für jedes endliche Stück der Geraden $\Re(s) = a' + \delta$ sogar gleichmäßig konvergiert, so darf sie auf dieser Geraden gliedweise integriert werden; wir erhalten für J_0' die Formel (6), in welcher nur anstatt a_1 der Wert $a_1' + 2\delta$ und anstatt b der Wert b' zu schreiben ist. Auf die rechte Seite dieser Formel wenden wir nun wie oben den Hilfssatz 1, die Beziehung (3) und den Zusatz zu Hilfssatz 2 an, die beiden letzteren für $\delta' = \frac{\delta}{2}$; die in dem Zusatz zu Hilfssatz 2 auftretende Zahl p, welche als der größte Index definiert ist, für welchen $\lambda_p \leqq \beta w$ ist, sei durch die Gleichung

$$\beta = \frac{k(a' - \eta)}{a - a'} = \frac{(1-k)(a' - \eta)}{a' - d}$$

bestimmt, wo übrigens infolge unserer numerischen Annahmen $\beta > 1$ ist. Dann ergibt sich die (7) entsprechende Gleichung:

$$\left| J_0' - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta)} \right|$$

$$(7') \quad < B_6' \frac{e^{wb'}}{T} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-\lambda_\nu \left(a' + \frac{\delta}{2}\right)}}{|w - \lambda_\nu|} + \left| \sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu \int_{b'-Ti}^{b'+Ti} e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta + s)} \frac{e^{ws}}{s} ds \right|$$

$$< B_7' \frac{e^{wb'}}{T} e^{w\beta(a - a')} + |S_p| = B_7' \frac{e^{wb'}}{T} T^k + |S_p| = B_7' e^{-\delta w} + |S_p|.$$

Aus (5′) und (7′) in Verbindung mit den Abschätzungen der Integrale J_1', J_2', J_3' folgt analog zu (8):

$$(8') \quad \left| 2\pi i \left(f(a_1' + 2\delta) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta)} \right) \right| < (2B_3' + B_5' + B_7') e^{-\delta w} + |S_p|$$

$$= B_8' e^{-\delta w} + |S_p|.$$

Um nun S_p abzuschätzen, wenden wir analog wie im Hilfssatze 1 den Cauchyschen Satz auf den Integranden

$$e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta + s)} \frac{e^{ws}}{s}$$

und auf das Rechteck mit den Ecken $b' \pm Ti$, $A \pm Ti$ an, in welchem der Integrand regulär ist. Wir dürfen dann wie in Hilfssatz 1 zur Grenze $A = \infty$ übergehen, da für $\nu \geqq p+1$ die Differenz $\lambda_\nu - w > 0$ ist, und erhalten:

$$\int\limits_{b'-Ti}^{b'+Ti} e^{-\lambda_\nu (a_1'+2\delta+s)} \frac{e^{ws}}{s} ds$$

$$= \int\limits_{b'-Ti}^{+\infty-Ti} e^{-\lambda_\nu (a_1'+2\delta+s)} \frac{e^{ws}}{s} ds + \int\limits_{+\infty+Ti}^{b'+Ti} e^{-\lambda_\nu (a_1'+2\delta+s)} \frac{e^{ws}}{s} ds$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_\nu (a_1'+2\delta+b'+\sigma-Ti)} \frac{e^{w(b'+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti} d\sigma - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_\nu (a_1'+2\delta+b'+\sigma+Ti)} \frac{e^{w(b'+\sigma+Ti)}}{b'+\sigma+Ti} d\sigma$$

$$= c_\nu - c_\nu',$$

wo sich c_ν und c_ν' nur um das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden.

Setzen wir ferner in den Integralausdruck, den wir mit c_ν bezeichnet haben, im Exponenten

$$a_1' + 2\delta + b' = a' + \delta = (d+\delta) + (a'-d)$$

ein und bezeichnen mit s_ν die Summe der Glieder $b_\varrho e^{-\lambda_\varrho (d+\delta)}$ vom Gliede $\varrho = p+1$ bis zum Gliede $\varrho = \nu$, so ergibt sich:

$$\sum_{\nu=p+1}^{q} b_\nu c_\nu = e^{w(b'-Ti)} \sum_{\nu=p+1}^{q} b_\nu e^{-\lambda_\nu (d+\delta)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_\nu (a'-d+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti} e^{w\sigma} d\sigma$$

$$= e^{w(b'-Ti)} \sum_{\nu=p+1}^{q} s_\nu \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_\nu (a'-d+\sigma-Ti)} - e^{-\lambda_{\nu+1} (a'-d+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti} e^{w\sigma} d\sigma$$

$$+ e^{w(b'-Ti)} s_q \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_{q+1} (a'-d+\sigma-Ti)}}{b'+\sigma-Ti} e^{w\sigma} d\sigma$$

$$= e^{w(b'-Ti)} \sum_{\nu=p+1}^{q} s_\nu \int\limits_0^\infty \frac{a'-d+\sigma-Ti}{b'+\sigma-Ti} e^{w\sigma} \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-z(a'-d+\sigma-Ti)} dz\, d\sigma$$

$$+ e^{w(b'-Ti)} s_q e^{-\lambda_{q+1} (a'-d-Ti)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-(\lambda_{q+1}-w)\sigma}}{b'+\sigma-Ti} d\sigma.$$

Nun sind einerseits infolge der Konvergenz von $f(s)$ für $s = d + \delta$ alle Summen s_ν absolut genommen < 1, wenn nur w und also auch p hinlänglich groß ist. Andererseits ist das im zweiten Summanden rechts auftretende Integral absolut genommen $< \frac{1}{\lambda_{q+1} - w}$, so daß, da auch $a' - d > 0$ ist, der zweite Summand rechts für $q = \infty$ den Grenzwert Null hat. Es ergibt sich, da im ersten Summanden rechts die Integrationen vertauscht werden können, für hinreichend kleines δ sowie für hinreichend großes w:

$$\sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu c_\nu = e^{w(b' - Ti)} \sum_{\nu=p+1}^{\infty} s_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_\nu + 1} e^{-z(a' - d - Ti)} \int_0^{\infty} e^{-(z-w)\sigma} \frac{a' - d + \sigma - Ti}{b' + \sigma - Ti} d\sigma\, dz,$$

$$\left| \sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu c_\nu \right| < e^{wb'} \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_\nu + 1} e^{-z(a'-d)} \int_0^{\infty} e^{-(z-w)\sigma} d\sigma\, dz = e^{wb'} \int_{\lambda_{p+1}}^{\infty} \frac{e^{-z(a'-d)}}{z - w} dz$$

$$< e^{wb'} \int_{\lambda_{p+1}}^{\infty} e^{-z(a'-d)} dz = \frac{1}{a' - d} e^{wb'} e^{-\lambda_{p+1}(a'-d)}$$

$$< B_9 e^{wb' - w\beta(a'-d)} = B_9 e^{w(a' - a_1' - \delta - (1-k)(a' - \eta))} = B_9 e^{-\delta w}.$$

Es folgt daher schließlich aus (8′)

$$\left| 2\pi i \left(f(a_1' + 2\delta) - \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{-\lambda_\nu (a_1' + 2\delta)} \right) \right| < B_8' e^{-\delta w} + \left| \sum_{\nu=p+1}^{\infty} b_\nu (c_\nu - c_\nu') \right|$$
$$< (B_8' + 2B_9) e^{-\delta w} = B_{10} e^{-\delta w},$$

woraus sich wie oben die Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $s = a_1' + 2\delta$, also in der ganzen Halbebene $\Re(s) > a_1'$ ergibt.

Wir haben also bewiesen, daß aus der Konvergenz der Reihe $f(s)$ für $\Re(s) > d$, wo

$$\eta + \frac{k(a - \eta)}{1 + k} < d < a \tag{9}$$

ist, unter unseren Voraussetzungen die Konvergenz dieser Reihe sogar für

$$\Re(s) > \eta + k(a - \eta) - k^2(a - d) \tag{10}$$

folgt. Nach dem ersten Teil unseres Beweises dürfen wir in (10) den Wert $d = d_0 = \eta + k(a - \eta)$ einsetzen und erhalten die Konvergenz von $f(s)$ für

$$\Re(s) > \eta + k(a - \eta)(1 - k + k^2) = d_1.$$

Hieraus aber folgt weiter, wenn in (10) der Wert $d = d_1$ eingesetzt wird, daß die Reihe für

$$\Re(s) > \eta + k(a - \eta)(1 - k + k^2 - k^3 + k^4) = d_2$$

konvergiert. Es sei die Konvergenz von $f(s)$ schon für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)(1-k+k^2-\cdots-k^{2\nu-1}+k^{2\nu}) = d_\nu$$

bewiesen; setzen wir den Wert von d_ν, der ebenfalls noch innerhalb der durch (9) bezeichneten Grenzen liegt, in (10) ein, so ergibt sich die Konvergenz von $f(s)$ für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)(1-k+k^2-\cdots-k^{2\nu+1}+k^{2\nu+2}).$$

Wenden wir unser Verfahren unendlich oft an, so ergibt sich, daß die Reihe $f(s)$ für

$$\Re(s) > \eta + k(a-\eta)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu k^\nu = \eta + \frac{k(a-\eta)}{1+k}$$

konvergiert, was bewiesen werden sollte.

In der Einleitung wurde die Bemerkung gemacht, daß dieses Resultat das Äußerste ist, was unsere Methode liefert. In der Tat haben wir nach der bis auf gewisse Grenzen willkürlichen Annahme einer Zahl d, von der ab die Konvergenz der Reihe $f(s)$ vorausgesetzt wird, zunächst über den numerischen Wert von a_1' freie Verfügung; a_1' bedeutet diejenige Zahl $< d$, von der ab die Konvergenz der Reihe bewiesen werden soll. Ferner darf das Rechteck, auf dessen Rand das Argument $\bar{s} = a_1' + 2\delta + s$ bei der Integration liegt, passend angenommen werden. Dabei muß zunächst die linke vertikale Seite, die nach der getroffenen Festsetzung auch wirklich von der Geraden $\Re(\bar{s}) = \eta + \delta$ gebildet wird, möglichst nahe an η angenommen werden, da dann das Integral J_2' eine möglichst kleine Größenordnung hat, während die Wahl dieser Seite für alle übrigen Abschätzungen irrelevant ist. Die Wahl der rechten vertikalen Seite $\Re(\bar{s}) = a' + \delta$ dagegen, welche für alle Abschätzungen außer der von J_2' von Bedeutung ist, ist die zweite in unserer Verfügung stehende numerische Annahme, die Wahl von T, welche für alle Abschätzungen außer der von S_p von Bedeutung ist, die dritte. Damit ist das Integrationsrechteck völlig bestimmt; wir dürfen nunmehr noch über β verfügen, welches für die Abschätzung des ersten Teiles von J_0' sowie für die Abschätzung von S_p von Bedeutung ist. Es stehen also vier numerische Annahmen frei, durch die erreicht werden muß, daß vier ganz verschieden gebaute Ausdrücke, J_1', J_2', der erste Teil von J_0' sowie S_p, die Größenordnung $e^{-\delta w}$ haben; dadurch werden die vier Konstanten a_1', a', T und β völlig bestimmt. Wir würden also durch andere Wahl der Konstanten immer nur ein weniger genaues Resultat erhalten.

Berlin, den 21. Juli 1908.