

# Über eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Thetafunctionen zweier Variablen.

Von Dr. Wilhelm Wirtinger in Wien.

Die bereits von Borchardt und Cayley\*) constatierte innige Beziehung der Kummer'schen Fläche zu den Thetafunctionen zweier Variablen legt die Frage nahe, ob diese Beziehung speciell an die Zahl zwei gebunden ist oder ob wir es mit dem ersten Glied einer Reihe von Gebilden zu thun haben, welche zu den Thetafunctionen mehrerer Variablen in derselben Beziehung stehen, wie die Kummer'sche Fläche zu denen zweier.

Eine nähere Untersuchung dieser Frage bei den Thetafunctionen dreier Variablen, die ich auf Veranlassung des Herrn Klein unternahm, zeigte bald, dass für diesen Fall ein der Kummer'schen Fläche in Bezug auf die Configuration der Singularitäten vollständig analoges Gebilde existiere, und dass auch, was besonders bemerkenswert erscheint, das von Herrn Klein bei der Kummer'schen Fläche constatierte fundamentale Systeme von Collineationen und Correlationen in seinen charakteristischen Eigenschaften wiederkehre.\*\*)

Die l. c. an ein specielles Aronhold'sches Siebenersystem geknüpfte Darstellung lässt sich nun, unabhängig davon, auf Thetafunctionen von  $p$  Variablen erweitern, ohne dass dieselben der Beschränkung unterworfen zu werden brauchen, zu einem abstrahischen Gebilde vom Geschlechte  $p$  zu gehören.

Dass im folgenden Räume von höheren Dimensionen fortwährend verwendet werden, dürfte sich durch die Klarheit und Einfachheit der Resultate einerseits, durch die Analogie mit dem gewöhnlichen Raume andererseits rechtfertigen.

---

\*) Crelle, Bd. 83, 84.

\*\*) Nachrichten der kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen vom 3. Aug. 1889.

Zur leichteren Orientierung stellen wir die in der Folge gebrauchten Bezeichnungsweisen aus der Geometrie des Raumes von  $n$  Dimensionen zusammen.

Wir verstehen wie üblich unter einem  $R_\nu$  des Raumes von  $n$  Dimensionen eine durch  $n-\nu$  lineare Gleichungen zwischen den homogenen Punktkoordinaten  $x_i$  definierte lineare Mannigfaltigkeit.

Die Verhältnisse der Coefficienten  $U_i$  der Gleichung eines  $R_{n-1}$  bezeichnen wir als die Coordinaten des  $R_{n-1}$ . Eine lineare Transformation des  $n$  dimensionalen Raumes in sich, bei welcher jedem  $R_\nu$  wieder ein  $R_\nu$  zugewiesen wird, nennen wir eine Collineation.

Werden den Punkten des  $R_n$  durch  $n+1$  lineare Gleichungen von nicht verschwindender Determinante  $U_i = \varrho \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k$  die

$R_{n-1}$  desselben Raumes zugewiesen, so nennen wir dies eine Correlation. Wir nennen sie involutorisch, wenn ihre zweimalige Anwendung auf ein beliebiges Gebilde dasselbe reproduciert. Dann entspricht jedem durch den Punkt  $x$  gehenden  $R_{n-1}$  ein Punkt, welcher in dem  $x$  entsprechenden  $R_{n-1}$  liegt.

Die involutorischen Correlationen zerfallen, wie bekannt, in zwei Classen, in solche, für welche die Covariante der vereinigten Lage  $\sum_{i=1}^n U_i x_i$  identisch verschwindet, wenn für die  $U_i$  ihre Werte in den  $x_i$  gesetzt werden, und in solche, wo dies nicht der Fall ist.

Die ersteren, wo jeder Punkt auf dem entsprechenden  $R_{n-1}$  liegt, nennen wir Nullsysteme, die letzteren Polarsysteme.

Ein algebraisches Gebilde von  $\nu$  Dimensionen, welches von einem  $R_{n-\nu}$  in  $m$  Punkten geschnitten wird, soll kurz als  $M_\nu^m$  bezeichnet werden.

## I.

Bezeichnet man in üblicher Weise den Zahlencomplex  $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_p \\ h_1 & h_2 & \dots & h_p \end{pmatrix}$  kurz mit  $[\varepsilon]$ , setzt man ferner für die  $g, h$  alle Combinationen von Null und Eins, so gehört zu jedem der  $2^{2p}$  Complexe  $[\varepsilon]$  als Charakteristik eine Thetafunction von  $p$  Variablen  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , welche durch die Summe

$$(1) \sum_{\substack{e \\ m_1, m_2, m_3, \dots, m_p}} a_{ik} \left( m_i + \frac{g_i}{2} \right) \left( m_k + \frac{g_k}{2} \right) + 2 \sum_{k=1}^{k=p} \left( m_k + \frac{g_k}{2} \right) \left( v_k + \frac{h_k \pi i}{2} \right) \\ (m_\mu = -\infty \dots -1, 0, 1, 2 \dots +\infty) \\ (i, k, l, \mu = 1 \dots p)$$

wo die  $a_k$  nur den bekannten Convergenzbedingungen der Theta-reihe unterworfen sind, definiert ist und die wir mit  $\mathfrak{J}[\varepsilon]v_k$  bezeichnen.

Versteht man unter der Summe mehrerer Charakteristiken  $[\varepsilon], [\varepsilon'], \dots [\varepsilon^{(p)}]$ , wie gebräuchlich, denjenigen Zahlencomplex, dessen einzelne Zahlen aus den kleinsten positiven Resten modulo 2 der Summen der an correspondierenden Stellen in den einzelnen Complexen stehenden Zahlen gebildet sind, bezeichnet man ferner das Größensystem

$$\frac{1}{2} \omega'_k = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g'_{\mu} a_{k\mu} + \frac{1}{2} h'_k \pi i \quad (k=1 \dots p)$$

als ein zur Charakteristik  $[\varepsilon']$  gehöriges System halber Perioden, so besteht die Relation

$$\begin{aligned} (2) \quad & \mathfrak{J}[\varepsilon'](v_k + \frac{1}{2} \omega'_k) \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i,k} a_{i,k} g'_i g'_k - \frac{1}{2} \sum_k g'_k (h_k + h'_k) \pi i - \sum_k g'_k v_k^*) \\ = & \mathfrak{J}[\varepsilon + \varepsilon'](v_k) \cdot e \quad (k=1 \dots p) \end{aligned}$$

Es geht also die zur Charakteristik  $[\varepsilon + \varepsilon']$  gehörige Function aus der zur Charakteristik  $[\varepsilon]$  gehörigen durch Vermehrung der Argumente um ein zu  $[\varepsilon']$  gehöriges System halber Perioden hervor, abgesehen von dem Vorzeichen und einem Exponentialfactor, welcher nur von  $[\varepsilon']$  abhängt.

Von den  $2^{2p}$  so definierten Functionen sind, wie bekannt, die  $\frac{4^p - 2^p}{2}$ , für welche  $\sum_1^p g_i h_i \equiv 1 \pmod{2}$  ist, ungerade, die  $\frac{4^p + 2^p}{2}$  mit  $\sum_1^p g_i h_i \equiv 0 \pmod{2}$  gerade.

Die ungeraden Functionen verschwinden für die Nullwerte der Argumente, dagegen sind für diese Argumente die geraden im allgemeinen nicht Null. Überhaupt verschwindet, wie aus Formel (2) ersichtlich ist, eine beliebige Thetafunction nur für diejenigen Systeme halber Perioden, welche zu Charakteristiken gehören, die gleich der Charakteristik der gegebenen Thetafunction mehr einer ungeraden Charakteristik sind.

Die Quadrate dieser  $2^{2p}$  Functionen sind Thetafunctionen 2. Ordnung, die sich bei Vermehrung der Argumente um ein zusammengehöriges System ganzer Perioden um denselben Exponentialfactor ändern und können daher sämmtlich nach bekannten Sätzen durch ein System von  $2^p$  linear unabhängigen unter ihnen linear und homogen ausgedrückt werden.

\*) Man vergleiche hierfür etwa Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel.

Solche Systeme liefert die allgemeine Theorie der Charakteristiken in den von Frobenius sogenannten „Göpel'schen Systemen“.\*)

Hier wollen wir uns damit begnügen, eine Regel anzugeben, welche erlaubt, solche specielle Systeme hinzuschreiben, welche die Eigenschaft, dass die zugehörigen Thetaquadrate linear unabhängig sind, auch dann noch beibehalten, wenn in den vorgelegten Thetafunctionen  $a_{ik} = 0$  für  $i$  ungleich  $k$  ist, die Thetafunctionen also in Producte von lauter elliptischen Theta's zerfallen.

Man nehme zwei Charakteristiken an

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_p \end{pmatrix} \quad [\beta] = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 & \cdots & g'_p \\ h'_1 & h'_2 & \cdots & h'_p \end{pmatrix}$$

von der Beschaffenheit, dass für kein  $i$  zugleich  $g_i = g'_i$  und  $h_i = h'_i$  ist.

Wir behaupten, dass die  $2^p$  Charakteristiken, welche dadurch entstehen, dass man in der ersten beliebige  $g_i, h_i$  durch die correspondierenden  $g'_i, h'_i$  der zweiten ersetzt, die in Rede stehende Eigenschaft haben.

Für den Beweis genügt es nun offenbar zu zeigen, dass in dem oben erwähnten Specialfalle eine lineare Relation zwischen den zugehörigen Thetaquadraten nicht bestehen kann, da ja eine im allgemeinen Falle bestehende lineare Identität beim Übergang zum Specialfall erhalten bleiben müsste.

Dann gehen aber die zu den beiden Charakteristiken  $[\alpha], [\beta]$  gehörigen Thetafunctionen über in Producte von elliptischen Thetafunctionen.

Bezeichnen wir also die zur Charakteristik  $\begin{bmatrix} g_i \\ h_i \end{bmatrix}$  und der Periode  $a_{ii}$  gehörige elliptische Thetafunction des einen Argumentes  $u_i$  mit  $\mathcal{F}_i^{(\alpha)}(u_i)$  und dem entsprechend die zur Charakteristik  $\begin{bmatrix} g'_i \\ h'_i \end{bmatrix}$  und derselben Periode gehörige mit  $\mathcal{F}_i^{(\beta)}(u_i)$ , so verschwindet niemals  $\mathcal{F}_i^{(\alpha)}(u_i)$  zugleich mit  $\mathcal{F}_i^{(\beta)}(u_i)$ . Irgend eine Thetafunction unseres Systems von  $2^p$  Functionen besteht dann aus  $\nu$  Factoren  $\mathcal{F}_i^{(\alpha)}(u_i)$  und  $p - \nu$  Factoren  $\mathcal{F}_k^{(\beta)}(u_k)$ , so dass alle auftretenden unteren Indices  $i, k$  von einander verschieden sind.

Gibt man nun  $\nu$  Argumenten  $u_i$  solche Werte, dass  $\nu$  Functionen  $\mathcal{F}_i^{(\beta)}(u_i)$  verschwinden und den  $u_k$  solche Werte, dass

\*) Frobenius, Untersuchungen über das Additionstheorem der Thetafunctionen, Crelle, 89.

Die hier verwendeten Systeme sind specielle Göpel'sche, wie hier ausdrücklich bemerkt sei, da man sonst nach dem Folgenden vermuthen könnte, man könne für beliebige  $a_{ik}$  stets alle Thetafunctionen des Systems bis auf eine durch ein passendes System halber Perioden zum Verschwinden bringen, was nicht der Fall ist.

$p - \nu$  Functionen  $\mathfrak{F}_k^{(\alpha)}(u_k)$  ebenfalls verschwinden, wo  $i$  irgend  $\nu$  Zahlen aus der Reihe  $1 \dots p$  bedeuten mag,  $k$  aber dann die übrigen  $p - \nu$  durchläuft, so ist klar, dass dann alle Thetafunctionen des Systems bis auf eine verschwinden. Dann müssen aber ihre Quadrate linear unabhängig sein, weil die eine nicht verschwindende beliebig gewählt werden kann.

## II.

Definiert man nun ein  $p$  dimensionales Gebilde des Raumes von  $N = 2^p - 1$  Dimensionen durch

$$x_i = \varrho \mathfrak{F}^2[\varepsilon_i](v_k) \quad (i = 1, 2, 3 \dots 2^p),$$

wo die  $[\varepsilon_i]$  eines der im vorigen besprochenen Systeme bilden sollen, die  $x_i$  aber homogene Punktcoordinaten des Raumes von  $N$  Dimensionen bedeuten, so folgt zunächst, dass dieses Gebilde ein algebraisches ist.

Die Quotienten  $\mathfrak{F}^2[\varepsilon_i](v_k) : \mathfrak{F}^2[\varepsilon_k](v_k)$  sind nämlich sämtlich eindeutige  $2p$ -fach periodische Functionen der  $v_k$  mit denselben Perioden, also nach einem Satze des Herrn Weierstrass\*) durch eine unter ihnen und ihre ersten partiellen Ableitungen nach den  $\nu$  rational darstellbar, während zwischen diesen letzteren und der Function selbst eine algebraische Gleichung besteht.

Die Frage nach der Ordnung des Gebildes können wir mit Hilfe eines Satzes von Poincaré beantworten.

Darnach hat nämlich ein System von  $p$  Gleichungen  $\Theta_1(v) = \Theta_2(v) = \dots = \Theta_p(v) = 0$ , wo die  $\Theta_i$  Thetafunctionen derselben  $a_{ik}$  von den resp. Ordnungen  $m_i$  bedeuten

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_p \cdot p!$$

modulis den Perioden incongruente Lösungen.\*\*)

In unserem Falle entsprechen also den Schnittpunkten des

durch  $p$  Gleichungen  $\sum_{i=1}^{N+1} b_{ik} x_i = 0 \quad (k=1 \dots p)$  definierten  $R_{N-p}$   $2^p \cdot p!$

Wertsysteme der  $v$ , die man als Lösungen derjenigen Gleichungen erhält, welche aus den Gleichungen des  $R_{N-p}$  durch Substitution von  $\mathfrak{F}^2[\varepsilon_i](v_k)$  für  $x_i$  hervorgehen.

Da jedoch zugleich mit  $(v_k)$  auch  $(-v_k)$  dieselben befriedigt, beide Argumentensysteme aber dieselben Wertsysteme der  $x_i$  definieren, so erhalten wir endlich  $p! \cdot 2^{p-1} = m$  als Ordnungszahl des fraglichen Gebildes.

\*) Monatsberichte der kgl. Akademie zu Berlin, 1869. Crelles Journal, Bd. 89.

\*\*) Bulletin de la Société mathématique de France, Tome XI. Die Anwendung auf den vorliegenden Fall hat Herr Klein gegeben in der Leipziger Vorlesung über hyperelliptische Functionen (Winter-Semester 1886, 87); vergl. auch den Nachtrag zu Reichardts Dissertation (Halle 1887).

Unsere  $M_p^m$ , wie wir in Hinkunft das Gebilde bezeichnen wollen, hat nun zunächst — entsprechend den 16 längs Kegelschnitten berührenden Ebenen der Kummer'schen Fläche —  $2^{2p}$  längs je einer  $M_{p-1}^{m+2}$  berührende  $R_{N-1}$ .

Denn untersuchen wir dasjenige auf unserer  $M_p^m$  gelegene Gebilde, welches durch Nullsetzen irgend einer der  $2^{2p}$  Thetafunction  $\vartheta[\omega](v_k)$  definiert ist, so hat es die angegebene Dimension und Ordnungszahl und liegt wegen der linearen Darstellbarkeit des Thetaquadrates durch unsere  $\vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  in einem  $R_{N-1}$ , dessen Gleichung man erhält, wenn man in der Darstellung des gewählten  $\vartheta^2$  durch die  $\vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  die letzteren durch die  $x_i$  ersetzt und das so erhaltene Polynom gleich Null setzt. Die  $M_{p-1}^{m+2}$  bildet doppelt gezählt den vollständigen Schnitt der  $R_{N-1}$  mit der  $M_p^m$  und die Bezeichnung der Beziehung als Berührung rechtfertigt sich dadurch, dass der Berührungs- $R_p$  eines Punktes der  $M_p^m$  auf der  $M_p^{m+2}$ , d. h. derjenige  $R_p$ , welcher in der Umgebung eines nicht singulären Punktes das Gebilde bis auf Größen 2. Ordnung darstellt, ganz in dem  $R_{N-1}$  liegt, wie

man durch Differentiation der Gleichung  $\vartheta^2[\omega](v_k) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  nach den  $v$  in Verbindung mit den Definitionsgleichungen des Tangential  $R_p$

$$x_i = \varrho \vartheta^2[\varepsilon_i](v_k) + \sum_{k=1}^{i=p} \frac{d \vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)}{d v_k} \lambda_k$$

wo die  $x_i$  den  $R_p$  durchlaufen, wenn die  $\lambda_k$  alle möglichen Werte annehmen, sofort einsieht.

Weiterhin geht unsere  $M_p^m$  durch — die Identität miteingerechnet —  $2^{2p}$  Collineationen, welche eine Gruppe bilden, in sich über.

Denn, wenn wir die  $v$  um ein System zusammengehöriger halber Perioden  $\frac{1}{2} \varepsilon_k$  mit der Charakteristik  $[\varepsilon]$  vermehren, so bleiben die neuen Functionen linear unabhängig und jeder Punkt des Gebildes geht in einen anderen desselben über.

Da nun zufolge der Formel (2) die  $\vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  bei dieser Substitution bis auf einen allen gemeinsamen Factor in die  $\vartheta^2[\varepsilon_i + \varepsilon](v_k)$  übergehen, die letzteren aber linear und homogen durch die  $\vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  darstellbar sind, so folgt, dass unser Gebilde bei denjenigen Collineationen, welche einem Punkt  $x_i$  denjenigen Punkt  $\xi_i$  zuordnen, dessen Coordinaten durch Ersetzung der  $\vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  durch die  $x_i$  in den Ausdrücken der  $\vartheta^2[\varepsilon_i + \varepsilon](v_k)$  durch die  $\vartheta^2[\varepsilon_i](v_k)$  erhalten werden, in sich übergeht.

Da man ferner aus den Ausdrücken der  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i + \varepsilon](v_k)$  durch die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](v_k)$  auch umgekehrt die letzteren durch die ersteren ausgedrückt erhält, und zwar durch die nämlichen Formeln, wenn man die Argumente noch einmal um das System halber Perioden  $\frac{1}{2} \varepsilon_k$  vermehrt, so folgt, dass auch die  $x_i$  durch dieselben Formeln in den  $\xi_i$  dargestellt werden wie umgekehrt, also die Collineationen involutorisch sind.

Dieses System von  $2^{2p}$  Collineationen bildet eine Gruppe.

Denn aus der Eindeutigkeit der Darstellung eines bestimmten Thetaquadrates durch die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](v_k)$  folgt sofort, dass man dieselben Substitutionscoefficienten erhält, ob man jetzt erst die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i + \varepsilon'](v_k)$  durch die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon](v_k)$  ausdrückt, dann die Argumente um das Periodensystem  $\frac{1}{2} \varepsilon'_k$  vermehrt und so erst  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i + \varepsilon + \varepsilon'](v_k)$  durch die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](v_k)$  ausdrückt oder ob man direct  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i + \varepsilon + \varepsilon'](v_k)$  durch die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](v_k)$  ausdrückt.

Es folgt als durch Zusammensetzung der zu  $[\varepsilon]$  gehörigen Collineation mit der zu  $[\varepsilon']$  gehörigen die zur Charakteristik  $[\varepsilon + \varepsilon']$  gehörige.

Diese Gruppe von Collineationen vertauscht nun offenbar die einzelnen Thetafunctionen zugeordneten  $R_{N-1}$  untereinander.

Denn die Gleichung des zur Charakteristik  $[\eta]$  gehörigen  $R_{N-1}$  geht durch die zur Charakteristik  $[\varepsilon]$  gehörige Collineation in die Gleichung des zur Charakteristik  $[\varepsilon + \eta]$  gehörigen  $R_{N-1}$  über.

Da nun bei gegebenen  $[\eta]$  und  $[\varepsilon + \eta]$  auch  $[\varepsilon] = [\eta] + [\varepsilon + \eta]$  ist, so ist dadurch, dass ein gegebener der  $2^{2p}$  Berührungs- $R_{N-1}$  in einen anderen übergeführt werden soll, die Collineation schon vollständig und eindeutig bestimmt, die Gruppe also genau einfach transitiv.

Die Collineationen der Gruppe vertauschen außerdem diejenigen Punkte des Gebildes untereinander, deren Argumentwerte gleich den zu den einzelnen Charakteristiken gehörigen Systemen halber Perioden sind.

Diese Punkte sind  $2^{p-1}$ -fache des Gebildes.

Da durch die Collineationen alle aus irgend einem unter ihnen hervorgehen, so genügt es, die Behauptung für einen unter ihnen zu beweisen, also z. B. denjenigen, für welchen alle Argumentwerte verschwinden.

Die Reihenentwicklungen der Thetaquadrate beginnen in der Nähe dieser Stelle mit Gliedern zweiter Ordnung für ein ungerades  $[\varepsilon_i]$ , für ein gerades  $[\varepsilon_i]$  dagegen mit Constanten.

Ein durch den in Rede stehenden Punkt hindurchgelegter  $R_{N-p}$  ist definiert durch  $p$  lineare Gleichungen zwischen den  $x_i$ , welche, wenn wir die  $x_i$  durch die  $\mathcal{G}^2[\varepsilon_i](v_k)$  ersetzen und für diese die Reihenentwicklungen einsetzen, durchaus mit Gliedern zweiter Ordnung beginnen.

Daraus folgt, dass unsere Stelle eine  $2^p$  fache Lösung dieses Gleichungssystems ist und da durch simultanen Zeichenwechsel sämtlicher  $v$  keine neuen Stellen erhalten werden, das Gebilde also bei unserer Darstellung doppelt überdeckt erhalten wird, so folgt, dass unser Punkt ein  $2^{p-1}$  facher des Gebildes ist.

Diese  $2^{2p}$  Punkte bilden zusammen mit den  $2^{2p}$   $R_{N-1}$  eine der Kummer'schen Configuration  $(16)_6$  analoge Configuration, derart, dass je  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  Punkte auf einem  $R_{N-1}$  liegen und je  $\frac{4^p - 2^p}{2}$   $R_{N-1}$  durch einen Punkt gehen.

Denn es verschwinden die  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  ungeraden Thetafunctionen für das aus lauter Nullen bestehende Argumentensystem, also treffen sich wegen der Collineationsgruppe in jedem Punkte ebensoviele  $R_{N-1}$ .

Ferner verschwindet jede Thetafunction für die  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  Systeme halber Perioden, welche durch Addition der Systeme mit ungerader Charakteristik zu dem zu ihrer eigenen Charakteristik gehörigen entstehen, also liegen auf jedem  $R_{N-1}$  auch  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  Punkte.

Wir finden also zunächst die Kummer'sche Configuration  $(16)_6$  als Configuration  $(2^{2p})_{2^{p-1}(2^p-1)}$  wieder. Wir bezeichnen diese Configuration in der Folge als Hauptconfiguration.

### III.

Es soll nun der Nachweis für folgende Behauptung geliefert werden:

Die  $M_p^m$  geht außer durch  $2^{2p}$  Collineationen auch durch  $2^{2p}$  Correlationen in sich über. Unter diesen sind  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  Nullsysteme und  $\frac{4^p + 2^p}{2}$  Polarsysteme. Dieselben bilden mit den  $2^{2p}$  Collineationen derart eine Gruppe, dass die Punkte und  $R_{N-1}$  des Raumes von  $N$  Dimensionen zu Configurationen  $(2^{2p})_{2^{p-1}(2^p-1)}$  zusammengeordnet werden.



Wenn wir sagen, dass die  $M_p^m$  dabei in sich übergeht, so ist dies so zu verstehen, dass die Punkte derselben mit gewissen  $R_{N-1}$  zusammen geordnet werden, welche im dualistischen Sinne als der  $M_p^m$  angehörig betrachtet werden können.

Die  $R_{N-1}$  sind unter allen  $R_{N-1}$  des Raumes von  $N$  Dimensionen dadurcharausgezeichnet, dass sie die  $M_p^m$  längs einer in einem  $R_{N-p-1}$  gelegenen  $M_{p-2}^{m:4}$  berühren, d. h. dass für die  $M_{p-1}^m$ , in welcher sie die  $M_p^m$  treffen, die Stellen der  $M_{p-2}^{m:4}$  Doppelstellen sind.

Durch jeden Punkt der  $M_p^m$  gehen  $\infty^{p-1}$  solcher  $R_{N-1}$ , darunter  $\infty^{p-2}$  den Tangential  $R_p$  des Punktes enthaltende, deren Berührungs- $M_{p-2}^{m:4}$  durch den Punkt hindurchgehen.

Die  $\infty^{p-1}$  Mannigfaltigkeit von solchen  $R_{N-1}$  durch einen Punkt der  $M_p^m$  ist so beschaffen, dass durch jeden  $R_{p-2}$   $m$  solcher  $R_{N-1}$  hindurchgehen.

Die  $\infty^{p-2}$  Mannigfaltigkeit der den Tangential  $R_p$  enthaltenden  $R_{N-1}$  dagegen ist so beschaffen, dass durch jeden  $R_{p-3}$   $\frac{m}{4}$  von ihnen hindurchgehen.

Die Beziehung zwischen den Punkten und  $R_{N-1}$  ist also eine durchaus dualistisch umkehrbare.

Zum Beweise erinnern wir zunächst daran, dass, wenn man die zur Charakteristik  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  gehörige Thetafunction kurz mit  $\mathfrak{J}(v)$  bezeichnet, eine Gleichung

$$\mathfrak{J}(u+v)\mathfrak{J}(u-v) = \sum \alpha_{i,h} \mathfrak{J}^2[\varepsilon_i](u_k) \mathfrak{J}^2[\varepsilon_h](v_k) \\ (i, h = 1 \dots N+1)$$

besteht.

Da die linke Seite bei Vertauschung von  $u$  und  $v$  ungedändert bleibt, so folgt  $\alpha_{ih} = \alpha_{hi}$ .

Führen wir nun die Bezeichnung ein

$$\Theta_i(u_k) = \sum_h \alpha_{i,h} \mathfrak{J}^2[\varepsilon_h](u_k) \quad \begin{matrix} (h = 1 \dots N+1) \\ (i = 1 \dots N+1) \end{matrix}$$

so wird die obige Formel zur

$$(3) \quad \mathfrak{J}(u+v)\mathfrak{J}(u-v) = \sum_i \Theta_i(u_k) \mathfrak{J}^2[\varepsilon_i](v_k) \\ = \sum_h \Theta_h(v_k) \mathfrak{J}^2[\varepsilon_h](u_k)$$

Die  $\Theta_i(v_k)$  sind nun ebenfalls linear unabhängig. Denn, wenn man für  $v$ , resp.  $u$  die Systeme halber Perioden mit den

Charakteristiken  $\varepsilon_i$  setzt, so erhält man auf der linken Seite die  $N$  linear unabhängigen Functionen  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](u_k)$ , resp.  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](v_k)$  durch die  $\Theta_i(u_k)$ , resp.  $\Theta_i(v_k)$  ausgedrückt.

Setzen wir nun in Formel (3) für die  $u_k$  die Werte  $u_k + \frac{1}{2} \omega_k$ , wo  $\frac{1}{2} \omega_k$  das zur Charakteristik  $\omega$  gehörige System halber Perioden bedeutet, so erhalten wir unter  $\varrho$  den aus Formel (2) zu entnehmenden Exponentialfactor verstanden

$$(4) \quad \varrho \mathfrak{P}[\omega](u_k + v_k) \mathfrak{P}[\omega](u_k - v_k) = \sum_1^{N+1} \Theta_i(u_k + \frac{1}{2} \omega_k) \mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](v_k).$$

Die  $\Theta_i(u_k + \frac{1}{2} \omega_k)$  können wir ausdrücken in der Form

$$(a) \quad \Theta_i(u_k + \frac{1}{2} \omega_k) = \varrho \sum_u \alpha_{ih} \mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](u_k). \quad (a)$$

Ferner sei dementsprechend durch die Gleichungen

$$U_i = \varrho \sum_h \alpha_{ih} x_h, \quad \begin{pmatrix} h = 1 \dots N+1 \\ i = 1 \dots N+1 \end{pmatrix},$$

wo die  $U_i$  die Coordinaten eines  $R_{N-1}$  bedeuten, jeder Charakteristik  $\omega$  eine Correlation zugewiesen.

Diese Correlationen sind für die  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  ungeraden Charakteristiken Nullsysteme, für die  $\frac{4^p + 2^p}{2}$  geraden Charakteristiken Polarsysteme.

Denkt man sich nämlich in Formel (4) die  $\Theta_i(u_k + \frac{1}{2} \omega_k)$  durch die  $\mathfrak{P}^2[\varepsilon_i](u_k)$  ausgedrückt, so ist für ungerades  $\omega$ , wegen des bei Vertauschung der  $u$  und  $v$  auf der linken Seite auftretenden Zeichenwechsels  $\alpha_{ih} = -\alpha_{hi}$ , also ist die Bedingung des Nullsystems erfüllt.

Für gerades  $\omega$  folgt durch Vertauschung der  $u$  mit den  $v$ :  $\alpha_{ih} = \alpha_{hi}$ , also ist die Bedingung des Polarsystems erfüllt.

Da zwischen den  $\Theta_i(u_k)$  keine lineare Relation besteht, so sind die Determinanten sämtlicher Null- und Polarsysteme von Null verschieden, die Correlationen also eigentliche.

Diese Correlationen führen die Punkte der Hauptconfiguration in deren  $R_{N-1}$  über und umgekehrt. Denn für  $u_k$  gleich einem System halber Perioden mit der Charakteristik  $[\eta]$  werden  $\Theta_i(u_k + \frac{1}{2} \omega_k)$  proportional den Coordinaten des zur Charakteristik  $[\omega + \eta]$  gehörigen  $R_{N-1}$ , wie Formel (4) ohneweiters zeigt.

Nun ist zu zeigen, dass unsere Correlationen zusammen mit den Collineationen eine Gruppe bilden.

Aus den Formeln a) ist sofort ersichtlich, dass, wenn man zuerst die zur Charakteristik  $[\omega]$  gehörige Collineation und dann die zur Charakteristik  $[\omega']$  gehörige Correlation anwendet, man die zur Charakteristik  $[\omega + \omega']$  gehörige Correlation erhält. Bezeichnen wir nun nach Analogie der Substitutionentheorie die zur Charakteristik  $[\omega]$  gehörige Collineation mit  $S_\omega$ , die zur selben Charakteristik gehörige Correlation aber mit  $T_\omega$ , so ist zunächst wegen des involutorischen Charakters beider Operationen  $S_\omega = S_\omega^{-1}$ ,  $T_\omega = T_\omega^{-1}$ .

Es ist dann nach dem obigen

$$S_\omega T_{\omega'} = T_{\omega + \omega'},$$

wo die Operationen in der Reihenfolge von links nach rechts anzuwenden sind.

Daraus folgt

$$S_\omega = T_{\omega + \omega'} T_{\omega'}^{-1} = T_{\omega + \omega'} T_\omega$$

oder wenn man beachtet, dass  $[\omega] = [\omega + \omega'] + [\omega']$  ist und  $[\omega']$  für  $[\omega + \omega']$  schreibt

$$S_{\omega'} + \omega'' = T_{\omega''} T_{\omega'},$$

so dass also die successive Anwendung der zu den Charakteristiken  $[\omega']$ ,  $[\omega'']$  gehörigen Correlationen die zur Charakteristik  $[\omega' + \omega'']$  gehörige Collineation erzeugt.

Wendet man ferner auf beiden Seiten die Operation  $T_{\omega''}$  an, so erhält man

$$T_{\omega'} + \omega'' + \omega''' = S_{\omega'} + \omega'' T_{\omega''} = T_{\omega''} \cdot T_{\omega'} T_{\omega''} = T_{\omega''} S_{\omega' + \omega''}$$

oder wenn man für  $[\omega' + \omega'']$  nur  $[\omega]$  schreibt

$$T_{\omega + \omega''} = T_{\omega''} S_\omega.$$

Da nun die Collineationen für sich eine Gruppe bilden und die Correlation, wie eben gezeigt, beliebig unter sich und mit Collineationen verbunden nur bereits vorhandene Operationen liefern, so ist damit die Gruppeneigenschaft erwiesen.

Aus der Gruppeneigenschaft folgt nun weiter, dass sich die Punkte und  $R_{N-1}$  des  $R_N$  zu Configurationen, ähnlich der Hauptconfiguration, zusammenordnen. Denn aus irgend einem Punkte entsteht durch die Operationen unserer Gruppe ein Aggregat von  $2^{2p}$  Punkten und ebensovielen  $R_{N-1}$  und durch keine Combination der Operationen kann man einen weiteren Punkt oder einen weiteren  $R_{N-1}$  erhalten.

Dann müssen aber wegen der  $\frac{4^p - 2^p}{2}$  Nullsysteme durch jeden der  $2^{2p}$  Punkte  $\frac{4^p - 2^p}{2} R_{N-1}$  gehen und umgekehrt in jedem  $R_{N-1}$   $\frac{4^p - 2^p}{2}$  Punkte liegen, so dass also die  $2^{2p}$  Punkte und  $2^{2p} R_{N-1}$  eine Configuration  $(2^{2p})_{2^{p-1}(2^p-1)}$  bilden.

Nachdem wir so die Analogie unseres Systems von Transformationen zu dem bei der Kummer'schen Fläche auftretenden, in welches es für  $p=2$  übergeht, erkannt haben, gehen wir dazu über, dasjenige Gebilde näher zu untersuchen, in welches unsere  $M_p^m$  durch das System von Correlationen übergeführt wird.

Man kann dieses offenbar durch die Gleichungen

$$U_i = \varrho \Theta_i(u_k)$$

definieren, wo die  $U_i$  die Coordinaten eines  $R_{N-1}$  bedeuten. Dies erhellt daraus, dass dieses zunächst durch die zur Charakteristik  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  gehörige Correlation aus  $M_p^m$  entstehende Gebilde in sich übergeht, wenn die Argumente um ein System halber Perioden mit der Charakteristik  $[\omega]$  vermehrt werden, wobei die Gleichungen desselben aber in die Gleichungen des durch die zur Charakteristik  $[\omega]$  gehörigen Correlation aus  $M_p^m$  hervorgehenden Gebildes übergehen, durch alle Correlationen also dasselbe Gebilde erhalten wird.

Wir untersuchen nun zunächst den Schnitt eines so definierten  $R_{N-1}$  mit der  $M_p^m$ . Die Gleichung zwischen den Parametern des Schnittgebildes erhalten wir, wenn wir in  $\sum_{i=1}^N U_i x_i = 0$  die  $x_i$  durch die  $\mathfrak{J}^2[\varepsilon_i](v_k)$ , die  $U_i$  durch die  $\Theta_i(u_k)$  ersetzen.

Nach Formel (3) geht aber dann diese Gleichung über in  $\mathfrak{J}(u_k + v_k) \mathfrak{J}(u_k - v_k) = 0$ . Die beiden Factoren liefern jedoch dasselbe Gebilde auf der  $M_p^m$ , da, wenn ein System  $v$  der ersten genügt, das System  $-v$  der zweiten genügt, beide Systeme aber dieselbe Stelle auf der  $M_p^m$  definieren.

In der Umgebung derjenigen Stellen aber, für welche beide Factoren simultan verschwinden, verhält sich das Gebilde offenbar so, wie zwei verschiedene Zweige eines und desselben Gebildes, und die Stellen sind Doppelstellen in Übereinstimmung damit, dass die Entwicklung von  $\sum_{i=1}^{N+1} \Theta_i(u_k) \mathfrak{J}^2[\varepsilon_i](v_k)$  in der Umgebung dieser Stellen nach Potenzen der  $v$  mit Gliedern 2. Ordnung beginnt, deren Aggregat in zwei im allgemeinen verschiedene Factoren zerfällt. Die Gesamtheit dieser Stellen in der  $R_{N-1}$  bildet nach dem Poincaré'schen Satze eine  $M_{p-2}^{m:4}$ .

Diese  $M_{p-2}^{m:4}$  liegt in einem linearen Raume von  $N-p-1$  Dimensionen. Denn durch Differentiation von Formel III nach den  $u$  erhält mit Formel III zusammen  $p+1$  unabhängige Gleichungen, denen die  $\mathfrak{J}^2[\varepsilon_i](v)$  für die Stellen der  $M_{p-2}^{m:4}$  genügen. Dieser  $R_{N-p-1}$  kann daher auch als Schnitt von  $p$  unendlich benachbarten  $R_{N-1}$  des Gebildes aufgefasst werden.

Hält man nun die  $v_k$  und  $x_i$  fest, und betrachtet die  $U_i$  und  $u_k$  als veränderlich, so erhält man die zu dem vorigen dualistischen Sätze. Dem vorigen  $R_{N-p-1}$  entspricht der Tangential  $R_p$  des Punktes mit den Parametern  $v$ , dem Schnitt des  $R_{N-1}$  eine  $\infty_{p-1}$  Mannigfaltigkeit von durch  $x$  gehenden  $R_{N-1}$ , der Doppel- $M_{p-2}^{m:4}$  eine  $\infty_{p-2}$  Mannigfaltigkeit  $R_{N-1}$ , welche durch den Tangential  $R_p$  von  $x$  hindurchgehen und deren Berührungs- $M_{p-2}^{m:4}$  den Punkt  $x_i$  enthält und von denen  $\frac{m}{4}$  durch jeden  $R_{p-3}$  hindurchgehen.

Es ergibt sich nun unmittelbar der Satz, dass durch unser System von Correlationen und Collineationen aus einem Punkte der  $M_p^m$  eine derselben ein- und umgeschriebene Configuration entsteht.

Das Gesagte soll durch einen kurzen Hinweis auf die Kummer'sche Fläche verdeutlicht werden.

Für  $p = 2$  wird unsere  $M_p^m$  zur Kummer'schen Fläche und die Gesammtheit der Punkte derselben wird durch die 16 Correlationen in eine Gesammtheit von Ebenen übergeführt, welche die Kummer'sche Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt ( $N-p-1=0$ ) treffen, also in die Tangentialebenen der Fläche. Durch jeden Punkt gehen unendlich viele solche Ebenen, darunter eine, welche in ihm selbst berührt. Durch jeden Punkt des Raumes gehen 4 Tangentialebenen des Tangentenkegels aus dem gegebenen Punkt auf der  $M_2^4$ , und da ein  $R_{p-3}$  für  $p = 2$  nicht existiert, so fällt der letzte Theil unserer allgemeinen Behauptung weg.

Die eingangs ausgesprochene Vermuthung, dass die Kummer'sche Fläche nur das erste einer Reihe von Gebilden sei, welche den Thetafunctionen von  $p$ -Variablen ebenso zugeordnet sind, wie diese denen von 2 Variablen und analoge Eigenschaften besitzen, hat sich also vollkommen bestätigt.

#### IV.

Zum Schlusse sollen noch diejenigen Verhältnisse besprochen werden, welche in gewissen Specialfällen eintreten.

Wenn man die Zahlen  $1, 2, 3 \dots p$  so in mehrere Gruppen vertheilt, dass die Zahlen der einzelnen Gruppe sowohl unter sich als von denen der anderen Gruppen verschieden sind, und alle bei  $k$ , deren  $i$  und  $k$  nicht derselben Gruppe angehören, verschwinden, so zerfallen die  $2^{2p}$  Thetafunctionen sämmtlich in Producte solcher von weniger als  $p$  Variablen.

Sei dann

$$\vartheta[\varepsilon](u_1 u_2 \dots u_p) = \vartheta[\varepsilon^{(1)}](u_1 \dots u_r) \vartheta[\varepsilon^{(2)}](u_{r+1} \dots u_\mu) \vartheta[\varepsilon^{(3)}](u_{\mu+1} \dots u_\lambda) \dots \vartheta[\varepsilon^{(p)}](u_{\rho+1} \dots u_p)$$

wo die einzelnen Charakteristiken  $[\epsilon^{(k)}]$  dann aus den den Variablen der entsprechenden Thetafunctionen zugehörigen  $g_i, h_i$  der Charakteristik  $[\epsilon]$  bestehen in der nämlichen Anordnung.

Da nun nach unserer früheren Darstellung die von uns zugrunde gelegten  $2^p$  Thetaquadrate auch für den specielsten Fall des Zerfallens in lauter elliptische Thetaquadrate linear unabhängig bleiben, so bleiben alle früheren bloß auf das System der Collineationen und Correlationen bezüglichen Sätze in Kraft. Das Gebilde dagegen und die Configuration werden specialisiert.

Zunächst ist bei der Bestimmung der Ordnung des Gebildes zu beachten, dass nicht bloß ein simultaner Zeichenwechsel sämtlicher Variablen, sondern bereits ein solcher innerhalb der Variablen eines der Factoren die Stelle des Gebildes unverändert lässt.

Dies ergibt, wenn  $r$  die Anzahl der Factoren ist, die Ordnung des Gebildes gleich  $p! 2^{p-r}$ .

Lässt man ferner nur die  $k$  Variablen der  $g^{\text{ten}}$  Factoren sich ändern, hält dagegen die übrigen fest, so erhält man eine  $M_k^{m_k}$ ,  $m_k = k! 2^{k-1}$ , welche zu den Thetafunctionen von  $k$  Variablen gehört und aus der allgemeinen  $M_p^m$  für  $p = k$  hervorgeht.

Indem man nun auch die übrigen Variablen verändert, erhält man ein ganzes System von  $\infty^{p-k}$  solcher  $M_k^{m_k}$ , so dass diejenigen Punkte, welche auf den einzelnen  $M_k^{m_k}$  des Systems gleiche Parameterwerte  $u$  haben, eine — wenn  $r > 2$  uneigentliche —  $M_{p-k}^{m_{p-k}}$  bilden.

Man sieht nun auch leicht ein, dass die Collineationen, welche die  $M_k^{m_k}$  in sich überführen, die  $M_{p-k}^{m_{p-k}}$  unter sich vertauschen und umgekehrt. Da man ferner für  $r > 2$  auf mannigfache Art die Factoren in 2 Gruppen zusammenfassen kann, so erhält man den Satz:

Im vorliegenden Specialfall kann die  $M_p^{p! 2^{p-r}}$  auf mannigfache Art durch die zu niedrigerem  $p$  gehörigen  $M_k^{m_k}$  erzeugt werden. Je zwei solcher Erzeugungsweisen sind immer conjugiert, derart, dass die Punkte gleicher Parameterwerte der  $M_k^{m_k}$  des einen Systems auf den  $M_{p-k}^{m_{p-k}}$  des anderen Systems liegen.

Die Collineationen, welche die Gebilde des einen Systems in sich überführen, vertauschen die des anderen unter sich und umgekehrt.

Entsprechend den verschiedenen Erzeugungsweisen des Gebildes setzt sich auch die Haupt-

configuration, welche degeneriert, und mit ihr alle durch unsere Transformationsgruppe erzeugten Configurationen auf mannigfache Art aus solchen Configurationen zusammen, welche zu niedrigerem  $p$  gehören. Darunter sind wieder je zwei Arten conjugiert.

Das letztere erhält man einfach dadurch, dass man mit dem zu irgend einer Charakteristik gehörigen System halber Perioden beginnend, erst die Variablen der ersten Factoren, dann die der zweiten etc. die ihnen zugehörigen Systeme halber Perioden durchlaufen lässt.

Seien nun die  $a$  Variablen in  $\nu$  Gruppen von je  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_i, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu$  Variablen vertheilt, und gibt man sämtlichen Argumenten den Wert Null, so verschwinden alle Thetafunctionen der  $p$  Variablen, bis auf diejenigen, welche nur aus geraden Thetafunctionen der Variablen der einzelnen Gruppen zusammengesetzt sind. Daher gehen durch den Punkt, dessen sämtliche Parameter gleich Null sind, und wegen den Collineationen dann durch jeden Punkt der Hauptconfiguration

$$2^{2p} - \prod_{i=1}^{\nu} \frac{4^{\lambda_i} + 2^{\lambda_i}}{2}$$

$R_{N-1}$  und wegen der Nullsysteme liegen auf jedem  $R_{N-1}$  so viele Punkte.

Betrachten wir, um einen anschaulichen Fall zu haben, wieder die Kummer'sche Fläche, wenn ihre Thetafunctionen in elliptische Factoren zerfallen.

Man kann dann setzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \mathcal{J}_0^2(u_1; \tau) \mathcal{J}_0^2(u_2; \tau') \\ x_2 &= \varrho \mathcal{J}_0^2(u_1; \tau) \mathcal{J}_1^2(u_2; \tau') \\ x_3 &= \varrho \mathcal{J}_1^2(u_1; \tau) \mathcal{J}_0^2(u_2; \tau') \\ x_4 &= \varrho \mathcal{J}_1^2(u_1; \tau) \mathcal{J}_1^2(u_2; \tau') \end{aligned}$$

$\mathcal{J}_i(u; \tau)$  in der üblichen Bezeichnungsweise der elliptischen Functionen zu verstehen ist.

Die Kummer'sche Fläche degeneriert dann in Übereinstimmung mit dem obigen in das Hyperboloid  $x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0$ .\*)

Da das zu  $p = 1$  gehörige Gebilde eine Gerade mit 4 ausgezeichneten Punkten ist, so sieht man, dass den beiden Systemen von Erzeugenden das Paar nach dem obigen conjugierter Erzeugungsweisen entspricht.

Die Configuration besteht aus den 16 Schnittpunkten von 4 Erzeugenden des einen Systems mit 4 des anderen. Durch jeden Punkt gehen 7 Ebenen und in jeder Ebene liegen 7 Punkte.

\*) Rohn, Münchener Dissertation 1878. Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche etc.

Für  $p = 3$  betrachten wir zunächst den Fall, dass die Thetafunctionen in Producte von elliptischen mit hyperelliptischen zerfallen.

Dann liegen auf dem Gebilde 12. Ordnung  $\infty^1$  Kummer'sche Flächen, deren entsprechende Punkte auf  $\infty^2$  Geraden liegen, und zwar so, dass, wenn  $x$  und  $y$  je zwei Punkte einer und derselben Kummer'schen Fläche sind, die auf zwei Geraden  $G_x$  und  $G_y$  liegen, die Punktreihen  $x$  und  $y$  projectiv sind.

Die Hauptconfiguration degeneriert so, dass 34  $R_6$  durch einen Punkt gehen, anstatt den 28 des allgemeinen Falles und sie besteht aus 4 Kummer'schen Configurationen  $(16)_6$ , deren entsprechende Punkte zu je 4 auf 16 Geraden liegen.

Zerfallen aber die Thetafunctionen in lauter elliptische Factoren, so erhält das Gebilde die Ordnung 6, und es treten an Stelle der Kummer'schen Flächen des vorigen Falls Hyperboloide, so dass drei Systeme von  $\infty^2$  Geraden von der Beschaffenheit auftreten, dass sich die Geraden von je 2 Systemen zu einer Reihe von Hyperboloiden zusammenschließen.

Die Singularitätenconfiguration lässt sich dann auf 3 Arten in 4 specielle Kummer'sche zerlegen, deren sämtliche 16 Punkte auf einem Hyperboloid liegen, und sich auf ebensoviele Arten aus Quadrupeln auf Geraden zusammensetzen und jede dieser letzteren Arten ist mit einer ersteren conjugiert. Statt der 28  $R_6$  des allgemeinen Falles gehen 37  $R_6$  durch einen Punkt und liegen je 37 Punkte in einem  $R_6$ .

Ybbs, im September 1889.

