

SU DI UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI FORMA PIÙ GENERALE DI QUELLA DI RICCATI, E SUL RAPPORTO ANARMONICO DI QUATTRO RADICI DI UNA EQUAZIONE ALGEBRICA A COEFFICIENTI VARIABILI.

Nota di **Ernesto Pascal**, in Milano.

Adunanza del 12 aprile 1903.

Lo scopo di questa breve Nota è di stabilire una formola per il rapporto anarmonico di quattro soluzioni particolari di una equazione differenziale di primo ordine del tipo :

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = P_n y^n + P_{n-1} y^{n-1} + \dots + P_1 y + P_0$$

(in cui le P sieno funzioni di sola x), formola che contiene come caso particolare quella nota ed importante proprietà della equazione di RICCATI [cui si riduce la (1) per $n = 2$] scoperta nel 1875 da ED. WEYR *), e indi ritrovata da PICARD **) nel 1877. Per la integrazione della equazione differenziale la indicata formola non può però, per $n > 2$, rendere quei rilevanti servigi che rende, per $n = 2$, il suo caso particolare; ciò nonpertanto essa può essere utilizzata in altri modi, come faccio vedere nella seconda parte, in cui, servendomi degli stessi principii da me adoperati ultimamente nella Nota: *Su di una classe di equazioni di RICCATI integrabili algebricamente* ***), deduco delle curiose relazioni fra il rapporto anarmonico di quattro radici e i coefficienti, di una equazione algebrica i cui coefficienti sieno funzioni di una variabile.

*) Abhand. d. Böhm. Gesell. d. Wiss., (6), t. VIII, B., n° 1, 1875, pag. 30.

**) Annales de l'École Normale supérieure, (1), t. VI, 1877, pag. 341.

***) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2), t. XXXVI, 1903.

§ 1.

Consideriamo i determinanti del tipo:

$$(2) \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} dy_1 & y_1^{k-2} & y_1^{k-3} & \dots & 1 \\ dy_2 & y_2^{k-2} & y_2^{k-3} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ dy_k & y_k^{k-2} & y_k^{k-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Si può far vedere che per $k \leq 4$ questi determinanti Δ_k sono, a meno di fattori, differenziali esatti di funzioni di tutte le y , mentre per $k > 4$ non godono più di questa proprietà.

Se poniamo:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} y_1^s & y_1^{s-1} & \dots & y_1 & 1 \\ y_2^s & y_2^{s-1} & \dots & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{s+1}^s & y_{s+1}^{s-1} & \dots & y_{s+1} & 1 \end{vmatrix} = [y_1 y_2 \dots y_{s+1}],$$

abbiamo:

$$(4) \quad [y_1 \dots y_{s+1}] = (-1)^{r-1} (y_r - y_1) \dots (y_r - y_{s+1}) [y_1 \dots y_{r-1} y_{r+1} \dots y_{s+1}]$$

e:

$$(5) \quad \Delta_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} [y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_k] dy_i.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma pfaffiana (5) di 1° ordine sia, a meno di un fattore, un differenziale esatto sono, come è noto, date dall'annullarsi di tutte le espressioni del tipo:

$$S_{ijl} (-1)^{i-1} [y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots y_k] \left\{ (-1)^{l-1} \frac{\partial}{\partial y_j} [y_1 \dots y_{l-1} y_{l+1} \dots y_k] \right. \\ \left. - (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial y_l} [y_1 \dots y_{j-1} y_{j+1} \dots y_k] \right\},$$

dove con S_{ijl} intendiamo, per brevità, l'operazione del sommare le tre espressioni che si ottengono da quella che le è sottoposta, permutando circolarmente i tre indici i, j, l .

Adoperando la formola (4) e sopprimendo indi un fattore comune simmetrico nei tre indici i, j, l , si ha che dovrebbe annullarsi:

$$(6) \quad \left\{ S_{ijl} (y_j - y_l) \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (y_j - y_1) \dots (y_j - y_{l-1}) (y_j - y_{l+1}) \dots (y_j - y_k) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y_l} (y_l - y_1) \dots (y_l - y_{j-1}) (y_l - y_{j+1}) \dots (y_l - y_k) \right] \right\},$$

in cui l'indice i , che parrebbe non figurarvi, è contenuto invece nella parentesi quadra.

Intendendo sviluppata la parentesi quadra e calcolata la più alta potenza di y_j e di y_i , si hanno i termini

$$(7) \quad (k-2)S_{ijl}(y_j - y_i)[y_j^{k-3} + y_i^{k-3}]$$

e questa espressione dovrebbe essere zero da sè se lo fosse la (6). Ora per $k > 4$ la (7) non è zero, e quindi non lo potrà essere la (6).

Per $n \leq 4$ invece la (7) è zero e lo è anche la (6) come è facile riconoscere direttamente.

Resta dunque dimostrata la proprietà enunciata.

È facile poi calcolare i valori di Δ_3 , Δ_4 , e si trova

$$(8) \quad \Delta_3 = (y_1 - y_3)^2 d \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3},$$

$$(9) \quad \Delta_4 = (y_1 - y_4)^2 (y_2 - y_3)^2 d \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)}.$$

§ 2.

Indicando con y_1, y_2, y_3 tre integrali particolari di (1) ed eliminando i due coefficienti P_1, P_0 , si ha

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} - P_n y_1^n - \dots - P_2 y_1^2 & y_1 & 1 \\ \frac{dy_2}{dx} - P_n y_2^n - \dots - P_2 y_2^2 & y_2 & 1 \\ \frac{dy_3}{dx} - P_n y_3^n - \dots - P_2 y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Poniamo ora

$$(11) \quad \begin{vmatrix} y_1^s & y_1 & 1 \\ y_2^s & y_2 & 1 \\ y_3^s & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot A_{s-2}(y_1, y_2, y_3),$$

dove, come si sa, le A_{s-2} sono delle funzioni *intere*, di grado $s-2$, delle y , le cosiddette funzioni *aleph* di WRONSKI *).

Esse si ottengono sviluppando la potenza $(s-2)^{ma}$ di $(y_1 + y_2 + y_3)$ e indi sostituendo l'unità a ciascuno dei coefficienti.

*) Vedi il mio libro sui *Determinanti* (ediz. italiana) Milano 1897, p. 169; (ediz. tedesca) Leipzig 1900, pag. 130.

La loro espressione sotto forma di determinanti fu anche elegantemente trovata da STUDNIČKA *), ed è la seguente:

Indicando con c_1, c_2, c_3 la somma delle tre y , quella dei loro prodotti a due a due, e il loro prodotto, si ha:

$$(12) \quad A_{s-2} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_1 \end{vmatrix},$$

in cui il secondo membro è un determinante di ordine $s - 2$.

Sviluppando il determinante (10), tenendo conto di (8) e (11) e integrando, si ha la formola:

$$(13) \quad \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = C e^{\int (P_n A_{n-2} + P_{n-1} A_{n-3} + \dots + P_2)(y_2 - y_3) dx},$$

essendo C una costante.

Considerando ora quattro integrali particolari di (1), eliminando P_2, P_1, P_0 si ha, invece di (10), un determinante di 4° ordine che, per brevità, tralasciamo di scrivere.

Sviluppando questo determinante, introducendo le funzioni *aleph* di quattro y , anziché di tre, adoperando la formola (9), e indicando infine con λ il rapporto anarmonico delle quattro y :

$$(14) \quad \lambda = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)},$$

si ha:

$$(15) \quad \lambda = C e^{\int (P_n A'_{n-3} + P_{n-1} A'_{n-4} + \dots + P_3)(y_1 - y_2)(y_3 - y_4) dx}$$

in cui C è una costante, e le A' sono le funzioni *aleph* di quattro lettere y_1, y_2, y_3, y_4 .

Per l'equazione di RICCATI è $n = 2$, le P di indice superiore a 2 sono tutte zero, e quindi la (15) dà il ricordato importante teorema di WEYR-PICARD, mentre la (13) dà

$$(16) \quad \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = C e^{\int P_2 (y_2 - y_3) dx},$$

formola che, considerandovi ignoto y_1 , può servire a ricavare l'integrale

*) Ueber Potenzdeterminanten, etc. (Sitzungsb. d. k. Böhm. Gesell. der Wiss. zu Prag), anni 1896 e 1897.

generale y_1 dell'equazione di RICCATI, da due noti integrali particolari y_2, y_3 .

§ 3.

Si abbia ora un'equazione algebrica di grado $n + 1$ i cui coefficienti sieno funzioni di x :

$$(17) \quad y^{n+1} + \varphi_1(x)y^n + \varphi_2(x)y^{n-1} + \dots + \varphi_{n+1}(x) = 0.$$

Esistono, come abbiamo già ricordato nella Nota citata in principio, delle relazioni differenziali fra le radici e i coefficienti, trovate da RAABE *) e BRIOSCHI **); esse sono

$$(18) \quad \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{ij} \frac{\partial y}{\partial \varphi_j} + y^i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

dove

$$\alpha_{ij} = S_{i+j-1} + \varphi_1 S_{i+j-2} + \dots + \varphi_{j-1} S_i$$

ed S_k è la somma delle potenze simili k^{me} delle radici di (17) e quindi è nota funzione razionale delle φ .

Se, insieme alla (18), consideriamo la relazione identica

$$(19) \quad \sum_{j=1}^{n+1} \varphi'_j(x) \frac{\partial y}{\partial \varphi_j} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

in cui con $\varphi'_j(x)$ si indica la derivata di φ_j , ed eliminiamo fra le (18), (19) le derivate parziali di y rispetto alle φ , otteniamo:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & \varphi'_1(x) & \dots & \varphi'_{n+1}(x) \\ -1 & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,n+1} \\ -y & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y^n & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

che è un'equazione differenziale del tipo (1), se si ammette che l'equazione algebrica (17) abbia in generale (cioè indipendentemente dal valore di x) tutte le sue radici *distinte*, cioè che il suo discriminante, che

*) Crelle's Journal, t. XLVIII, 1854, pp. 167-177.

**) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. V, 1854, pp. 416-421 (*Opere Matematiche*, Milano 1901, t. I, pp. 157-161).

è il complemento algebrico di $\frac{dy}{dx}$ in (20) *), non sia identicamente zero per qualunque x .

Per il modo stesso con cui è stata ricavata è evidente che l'equazione differenziale (20) ha per integrali particolari tutte le radici della (17).

Se quindi indichiamo con $P_0 P_1 \dots P_n$ i rapporti dei complementi algebrici degli elementi della prima colonna (a cominciare dal secondo) nel determinante (20), al discriminante di (17) [cioè propriamente al determinante di tutte le α_{ij} ($i = 0, 1, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n+1$)], le formole (13), (15) vengono a rappresentare delle relazioni fra tre o quattro radici dell'equazione algebrica (17).

Così, per $n = 3$, il rapporto anarmonico λ delle quattro radici dell'equazione di 4° grado

$$(21) \quad y^4 + \varphi_1(x)y^3 + \varphi_2(x)y^2 + \varphi_3(x)y + \varphi_4(x) = 0$$

a discriminante D (diverso da zero) soddisfa alla relazione

$$(22) \quad \lambda = C e^{\int P(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_3 - \gamma_4) dx},$$

in cui C è indipendente da x , e **)

$$P = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & \varphi'_4 \\ 4 & 3\varphi_1 & 2\varphi_2 & \varphi_3 \\ -\varphi_1 & -2\varphi_2 & -3\varphi_3 & -4\varphi_4 \\ \varphi_1^2 - 2\varphi_2 & \varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_3 & \varphi_1\varphi_3 - 4\varphi_4 & \varphi_1\varphi_4 \end{vmatrix}.$$

Se $P = 0$, si ha $\lambda = \text{cost.}$ e si torna ad un teorema del § 2 della predetta Nota.

Milano, aprile 1903.

E. PASCAL.

*) Vedi la mia Nota sopracitata, § 1.

**) Vedi il § 2 della mia Nota sopracitata.