

Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf räumliche Figuren.

(Von Herrn O. Hermes.)

§. 1

Wenn man mit t, u, v, w resp. in der Geometrie der geraden Linie, der Ebene und des Raumes die Abstände von zwei festen Punkten, von drei festen Geraden und von vier festen Ebenen bezeichnet, so erhält man in der Geometrie der geraden Linie als Gleichungen eines harmonischen Punktsystems

$$lt + mu = 0, \quad lt = mu.$$

Diesem System entspricht in der Geometrie der Ebene das System einer Geraden und eines Punktes, deren Gleichungen sind:

$$(g) : lt + mu + nv = 0,$$

$$(p) : lt = mu = nv,$$

und welche in der Beziehung zu einander stehen, daß, wenn man zu den Durchschnittspunkten der Geraden g mit den Coordinatenseiten auf diesen die conjugirten harmonischen Punkte construirt, die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den entsprechenden Gegenecken des Coordinatendreiecks sich im Punkte p durchschneiden: oder man kann auch g als die Axe und p als den Pol zweier homologen Dreiecke definiren, welche als Seiten haben die Coordinatenseiten und die Verbindungsgeraden der Eckpunkte derselben mit den Durchschnittspunkten von g und den correspondirenden Gegenseiten. Der Punkt p soll künftig *der Pol der Geraden g in Beziehung auf das Coordinatendreieck* *) heißen.

Ein ähnlicher Zusammenhang findet in der Geometrie des Raumes statt zwischen einer Ebene E und einem Punkte P , welche definirt werden durch die Gleichungen:

$$(E) : lt + mu + nv + pw = 0$$

$$(P) : lt = mu = nv = pw.$$

*) Der Punkt p ist der Pol der Geraden g in Beziehung auf die durch die Coordinatenseiten gebildete Linie dritten Grades. Vergl. *Salmon, Higher plane curves, Art. 155.*

Construirt man zu den Durchschnittsgeraden der Ebene E mit den Coordinatenebenen die Pole in Beziehung auf die entsprechenden Coordinatendreiecke, so ist P der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien dieser vier Pole mit den correspondirenden Gegenecken des Coordinatentetraeders; oder auch, wenn man zu den Durchschnittspunkten der Ebene E mit den Seitenkanten des Coordinatentetraeders auf diesen die conjugirten harmonischen Punkte zeichnet, so durchschneiden sich die Verbindungslinien der auf den drei Gegenkantenpaaren liegenden Punkte im Punkte P ; endlich ist P der Pol und E die Ebene der Homologie zweier homologen Tetraeder (*Poncelet, traité des propr. project. Art. 582*), nämlich des Coordinatentetraeders und des Tetraeders, dessen Seitenflächen die Verbindungsebenen sind der Eckpunkte des Coordinatentetraeders mit den Durchschnittsgeraden ihrer Gegenflächen und der Ebene E . Der Punkt P heiße *der Pol der Ebene E in Beziehung auf das Coordinatentetraeder*.

Wie bei der geraden Linie einem unendlich entfernten Punkte als conjugirter harmonischer Punkt der Mittelpunkt derselben entspricht, so erhält man in der Ebene als Pol einer unendlich entfernten Geraden den Schwerpunkt des Coordinatendreiecks und im Raume als Pol einer unendlich entfernten Ebene in Beziehung auf das Coordinatentetraeder den Schwerpunkt desselben.

§. 2.

Dies vorausgesetzt, handle es sich um die Ausdehnung des bekannten Satzes von den Mitten der Diagonalen des vollständigen Vierseits auf den Raum, oder des allgemeineren Satzes: (Man vergleiche *Chasles, géom. supérieure, Art. 349.*)

Wenn man durch ein vollständiges Vierseit mit seinen drei Diagonalen eine Transversale legt und auf jeder Diagonale zu deren Endpunkten und dem Durchschnittspunkte mit der Transversale die vierten harmonischen Punkte construirt, so liegen diese drei Punkte auf einer geraden Linie.

Man kann die Diagonalen des Vierseits definiren als die Verbindungsgeraden der Eckpunkte eines beliebigen der vier durch die Seiten des Vierseits gebildeten Dreiecke mit den Durchschnittspunkten der Gegenseiten und der jedesmaligen vierten Seite. Dem entsprechend sei das durch drei Seiten

des Vierseits gebildete Dreieck das Coordinatendreieck, und die Gleichung der vierten Seite:

$$(x) : t + u + v = 0,$$

wo t, u, v beliebige Constanten enthalten, so sind die drei Diagonalen des Vierseits $tuvx$:

$$(uv, tx) : u + v = 0 = t_1,$$

$$(vt, ux) : t + v = 0 = u_1,$$

$$(tu, vx) : t + u = 0 = v_1,$$

woraus sich umgekehrt als Ausdrücke der alten Coordinatenseiten durch die Coordinaten t_1, u_1, v_1 ergeben:

$$2t = -t_1 + u_1 + v_1, \quad 2u = t_1 - u_1 + v_1, \quad 2v = t_1 + u_1 - v_1.$$

Jetzt sei durch das System die Transversale

$$(g) : \lambda t_1 + \mu u_1 + \nu v_1 = 0$$

gelegt, so ist deren Schnittpunkt mit der Diagonale t_1 :

$$(g, t_1) : t_1 = 0, \quad \mu u_1 + \nu v_1 = 0,$$

und als der zugehörige vierte harmonische Punkt in Bezug auf die beiden Endpunkte der Diagonale t_1 :

$$(t, x) : t_1 = 0, \quad u_1 + v_1 = 0$$

und

$$(u, v) : t_1 = 0, \quad u_1 - v_1 = 0$$

ergibt sich der Punkt:

$$(p_i) : t_1 = 0, \quad \frac{u_1}{\mu} + \frac{v_1}{\nu} = 0;$$

denn setzt man etwa $u_1 + v_1 = 2y$ und $u_1 - v_1 = 2z$, so werden die Punkte (g, t_1) und p_i respective $(\mu + \nu)y + (\mu - \nu)z = 0$ und $(\mu + \nu)y - (\mu - \nu)z = 0$, woraus die harmonische Beziehung der vier Punkte zu erkennen ist.

Ebenso ergeben sich als die fraglichen harmonischen Punkte auf den Diagonalen u_1 und v_1 respective

$$(p_u) : u_1 = 0, \quad \frac{t_1}{\lambda} + \frac{v_1}{\nu} = 0,$$

$$(p_v) : v_1 = 0, \quad \frac{t_1}{\lambda} + \frac{u_1}{\mu} = 0,$$

welche drei Punkte auf der Geraden

$$\frac{t_1}{\lambda} + \frac{u_1}{\mu} + \frac{v_1}{\nu} = 0$$

liegen: diese Gerade mag *die Conjugirte* der Geraden g in Beziehung auf das Vierseit $tuvx$ heißen.

§. 3.

Ein analoger Satz aus der ebenen Geometrie ist der folgende:

Die Pole einer beliebigen Transversale in Beziehung auf alle Dreiecke, welche eine gemeinsame Spitze haben, und deren Grundlinien in eine und dieselbe gerade Linie fallen, liegen auf einer Geraden.

Der Beweis dieses Satzes, welcher sich leicht aus den harmonischen Beziehungen der Figur ergibt, läßt sich der späteren Anwendung wegen analytisch, etwa wie folgt, führen. Die Transversale sei:

$$(1.) \quad \lambda t + \mu u + \nu v = 0,$$

die gemeinsame Grundlinie der Dreiecke:

$$(2.) \quad t + u + v = 0,$$

wo t, u, v beliebige Constanten enthalten mögen, der gemeinsame Eckpunkt der Punkt:

$$(3.) \quad t = u = v$$

und die in demselben zusammentreffenden Seiten von irgend drei Dreiecken:

$$(4.) \quad -2t + u + v = 0, \quad t - 2u + v = 0, \quad t + u - 2v = 0.$$

Um jetzt den Pol zu erhalten der Transversale (1.) in Beziehung auf irgend eines dieser Dreiecke, z. B. welches zu Seiten hat:

$$(5.) \quad t + u + v = 0 = t_1, \quad t - 2u + v = 0 = u_1, \quad t + u - 2v = 0 = v_1,$$

nehme man diese Seiten als neue Coordinatenseiten, woraus:

$$(6.) \quad 3t = t_1 + u_1 + v_1, \quad 3u = t_1 - u_1, \quad 3v = t_1 - v_1;$$

folglich ergibt sich als Gleichung der Transversale (1.):

$$t_1(\lambda + \mu + \nu) + u_1(\lambda - \mu) + v_1(\lambda - \nu) = 0$$

und als Pol dazu:

$$t_1(\lambda + \mu + \nu) = u_1(\lambda - \mu) = v_1(\lambda - \nu),$$

oder für die alten Coordinaten:

$$(7.) \quad (t + u + v)(\lambda + \mu + \nu) = (t - 2u + v)(\lambda - \mu) = (t + u - 2v)(\lambda - \nu).$$

Dieser Pol liegt auf der Geraden:

$$(8.) \quad (\mu + \nu)t + (\nu + \lambda)u + (\lambda + \mu)v = 0;$$

denn aus den Gleichungen (7.) ergeben sich durch Trennung der Coordinaten

die beiden Gleichungen:

$$t(2\mu + \nu) + u(-\mu + \nu + 3\lambda) + v(2\mu + \nu) = 0$$

und

$$t(2\nu + \mu) + u(2\nu + \mu) + v(-\nu + \mu + 3\lambda) = 0$$

und durch deren Addition die Gleichung (8.), d. h. der Pol (7.) liegt auf dieser Geraden. Aber aus der Symmetrie der Gleichung (8.) ergibt sich, daß die durch sie dargestellte Gerade zugleich die Pole der Transversale (1.) in Beziehung auf die beiden anderen Dreiecke enthält, was zu beweisen war.

§. 4.

In der Geometrie des Raumes nunmehr tritt eine erste Analogie des Satzes (§. 2) in gewissen Eigenschaften des *allgemeinen Fünfflachs* hervor, d. h. des Systems von Figuren, welche sich aus der Durchschneidung von fünf irgend wie im Raume liegenden Ebenen ergeben.

Man kann sich vorstellen, daß das Fünfflach aus dem Tetraeder hervorgeht durch die Durchschneidung mit einer fünften Ebene; als *Diametralebenen* ergeben sich dann, wie früher die Diagonalen des Vierseits, diejenigen vier Ebenen, welche die Eckpunkte des Tetraeders mit den Durchschnittsgeraden der fünften Ebene und der jedesmaligen Gegenflächen verbinden. Jede dieser Diametralebenen durchschneidet die Seitenflächen des Tetraeders in vier geraden Linien, von denen immer drei durch einen Punkt, den betreffenden Eckpunkt des Tetraeders, gehen, d. h. welche drei Dreiecke bilden mit gemeinsamer Spitze, und deren Grundlinien auf derselben Geraden liegen. Nennt man diese Dreiecke *Diametraldreiecke*, so hat man folgenden Satz:

Wenn man durch ein Fünfflach eine Transversalebene legt und in jeder Diametralebene zu deren Durchschnitt mit der Transversalebene in Beziehung auf jedes Diametraldreieck den Pol construirt, so liegen die Pole jeder drei Dreiecke derselben Diametralebene auf einer geraden Linie (§. 3). Diese geraden Linien sind zu vier die Generatrices desselben Systems eines Hyperboloids.

Das Fünfflach sei durch die Durchschneidung des Coordinatentetraeders mit der fünften Ebene:

$$(x) : t + u + v + w = 0$$

entstanden, wo wieder die Coordinaten t, u, v, w beliebige Constanten enthalten, so sind die Gleichungen der Diametralebenen des Fünfflachs, d. h. der Ebenen, welche die Eckpunkte des Coordinatentetraeders mit den Durchschnitts-

geraden der entsprechenden Gegenflächen und der fünften Seitenfläche x verbinden:

$$(uvw, tx) : u + v + w = 0 = 3t_1,$$

$$(vwt, ux) : t + v + w = 0 = 3u_1,$$

$$(wtu, vx) : t + u + w = 0 = 3v_1,$$

$$(tuv, wx) : t + u + v = 0 = 3w_1;$$

für diese Ebenen als neue Coordinatenebenen ergeben sich als Ausdrücke der alten Coordinaten:

$$t = -2t_1 + u_1 + v_1 + w_1,$$

$$u = t_1 - 2u_1 + v_1 + w_1,$$

$$v = t_1 + u_1 - 2v_1 + w_1,$$

$$w = t_1 + u_1 + v_1 - 2w_1.$$

Nunmehr werde als Transversalebene hindurchgelegt die Ebene:

$$(E) : \lambda t_1 + \mu u_1 + \nu v_1 + \bar{w} w_1 = 0,$$

so ist deren Durchschnitt mit der Diametralebene w_1 :

$$(E, w_1) : w_1 = 0, \quad \lambda t_1 + \mu u_1 + \nu v_1 = 0.$$

Diese Diametralebene aber schneidet aus dem Tetraeder $tuvw$ drei Dreiecke aus, deren Seiten bestimmt sind durch die Durchschneidung mit den Ebenen $u, v, w; v, t, w; t, u, w$, d. h. welche für die Coordinaten t_1, u_1, v_1, w_1 zu Gleichungen haben:

$$-2t_1 + u_1 + v_1 = 0, \quad t_1 - 2u_1 + v_1 = 0, \quad t_1 + u_1 - 2v_1 = 0,$$

und die gemeinsame Grundlinie ist:

$$t_1 + u_1 + v_1 = 0.$$

Nach §. 3 liegen die Pole der Transversale (E, w_1) auf der Geraden

$$(g_w) : w_1 = 0, \quad (\mu + \nu)t_1 + (\nu + \lambda)u_1 + (\lambda + \mu)v_1 = 0.$$

Nennt man diese Gerade g_w die *Conjugirte* der Transversalebene in Beziehung auf die Diametraldreiecke in w_1 , so erhält man im Ganzen für alle vier Diametralebenen folgendes System von Conjugirten:

$$(g_t) : t_1 = 0, \quad (\nu + \bar{w})u_1 + (\bar{w} + \mu)v_1 + (\mu + \nu)w_1 = 0,$$

$$(g_u) : u_1 = 0, \quad (\nu + \bar{w})t_1 + (\bar{w} + \lambda)v_1 + (\lambda + \nu)w_1 = 0,$$

$$(g_v) : v_1 = 0, \quad (\mu + \bar{w})t_1 + (\bar{w} + \lambda)u_1 + (\lambda + \mu)w_1 = 0,$$

$$(g_w) : w_1 = 0, \quad (\mu + \nu)t_1 + (\nu + \lambda)u_1 + (\lambda + \mu)v_1 = 0,$$

Gleichungen, in denen die Coefficienten in Beziehung auf die Diagonale symmetrisch sind, d. h. welche ein System von Generatrices derselben Erzeugungsart eines Hyperboloids darstellen (Siehe später).

Das allgemeine Fünfflach gestattet fünf Gruppierungen seiner Seitenflächen zu vier als Seitenflächen von Tetraedern, je durchschnitten von der fünften Ebene als Transversalebene, und darum ebensoviel Systeme von je vier Diametralebene, von denen jedoch immer zwei zusammenfallen; der eben bewiesene Satz läßt sich also folgendermaßen verallgemeinern:

In jeder der zehn Diametralebene des vollständigen Fünfflachs liegen drei Diametraldreiecke und die Pole der Durchschnittsgeraden einer beliebigen Transversalebene mit den einzelnen Diametralebene in Beziehung auf die zugehörigen Diametraldreiecke je auf einer Geraden, alle dreißig Pole also auf zehn Geraden. Diese zehn Geraden sind zu vier die Generatrices desselben Systems von fünf verschiedenen Hyperboloiden.

§. 5.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung eines *Sechsfachs* über, von welchem drei Paar Ebenen sich in geraden Linien einer und derselben Ebene durchschneiden, und betrachten dasselbe etwa als Hexaeder im engeren Sinne, d. h. als Körper mit acht dreikantigen Ecken, jedoch mit erweiterten Seitenflächen, und dessen Gegenflächenpaare in einer (nunmehr außerhalb des Kernkörpers liegenden) siebenten Ebene das Dreieck ABC ausschneiden. Die Gegenflächenpaare des Kernhexaeders seien:

$$A_1 = A_1 B_2 D_1 C_2 \quad \text{und} \quad A_2 = A_2 B_1 D_2 C_1,$$

$$B_1 = B_1 C_2 D_1 A_2 \quad - \quad B_2 = B_2 C_1 D_2 A_1,$$

$$I_1 = C_1 A_2 D_1 B_2 \quad - \quad I_2 = C_2 A_1 D_2 B_1,$$

von denen sich

$$A_1 \text{ und } A_2 \text{ in } BC, B_1 \text{ und } B_2 \text{ in } CA, I_1 \text{ und } I_2 \text{ in } AB$$

durchschneiden mögen. Zieht man jetzt die zwölf Diagonalen in den Seitenflächen des Kernhexaeders, so sind diese die Seitenkanten von zwei Tetraedern $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$, von denen sich leicht ergibt, daß sie homologe Tetraeder sind. Nimmt man nämlich irgend zwei correspondirende Seitendreiecke dieser Tetraeder, z. B. $B_1 C_1 D_1$ und $B_2 C_2 D_2$, so durchschneiden sich deren entsprechende Seiten $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$, $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$, $D_1 B_1$

D_2B_2 als gerade Linien in den Gegenflächen des Kerntetraeders und, weil sie zu zwei in einer Ebene liegen, resp. in Punkten auf den Seiten CB , AB und CA des Dreiecks ABC , d. h. die Seitenflächen $B_1C_1D_1$ und $B_2C_2D_2$ selbst durchschneiden sich in einer geraden Linie, welche in der Ebene des Dreiecks ABC liegt. Dasselbe gilt von den drei übrigen Paaren von Seitenflächen der beiden Tetraeder, und diese liegen darum nach der *Ponceletschen* Erweiterung des *Desarguesschen* Satzes homolog, d. h. die Verbindungsgeraden der correspondirenden Eckpunkte beider Tetraeder A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 und D_1D_2 gehen durch einen und denselben Punkt. Diese Verbindungsgeraden aber sind die Diagonalen des Kerntetraeders: man hat darum folgenden Satz:

Wenn sich die drei Gegenflächenpaare eines Hexaeders in Geraden einer Ebene durchschneiden, so gehen die vier Diagonalen desselben durch einen und denselben Punkt.

Dieser Durchschnittspunkt der vier Diagonalen sei der Punkt D und werde als vierter Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ genommen, dessen drei Kanten BC , CA und AB die gemeinschaftlichen dritten Diagonalen der Vierseite in den Gegenflächenpaaren A_1 und A_2 , B_1 und B_2 , I_1 und I_2 sind. Deshalb möge das Tetraeder $ABCD$, sowie die beiden Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$, deren Kanten die Diagonalen in den Seitenflächen des Kernhexaeders sind, mit dem gemeinsamen Namen *Diagonaltetraeder* bezeichnet werden.

Diese Benennung rechtfertigt sich auch dadurch, daß ebenfalls die Kanten AD , BD , CD als Diagonalen gewisser Vierecke auftreten, nämlich zugleich mit zwei Diagonalen der Gegenflächenpaare in den Vierseiten, welche in den Diametralebene des Hexaeders durch zwei Gegenkanten und zwei Diagonalen des Hexaeders ausgeschnitten werden, z. B. die Kante AD bildet zugleich mit A_1D_1 und A_2D_2 das System der drei Diagonalen des Vierseits, welches in der Diametralebene $A_1D_1A_2D_2$ zu aufeinanderfolgenden Seiten die Diagonalen des Hexaeders A_1A_2 und D_1D_2 und die Gegenkanten A_1D_2 und A_2D_1 hat, oder auch AD , BC und B_1C_1 sind die drei Diagonalen des Vierseits, welches in der Diametralebene $B_1C_1B_2C_2$ zu aufeinanderfolgenden Seiten die Diagonalen des Hexaeders B_1B_2 und C_1C_2 und die Gegenkanten B_1C_2 und B_2C_1 hat, und ähnlich die beiden andern Kanten BD und CD .

§. 6.

Nunmehr heißt der Satz vom Hexaeder, dessen vollständige Analogie zu dem von den Diagonalen des Vierseits (§. 2) nicht zu verkennen ist:

Die Pole einer beliebigen Transversalebene in Beziehung auf die drei Diagonaltetraeder des Hexaeders liegen auf einer geraden Linie,
oder, wenn die Transversalebene im Unendlichen liegt,

Die Schwerpunkte der drei Diagonaltetraeder des Hexaeders liegen auf einer geraden Linie,

wo also vorausgesetzt ist, das sich die Gegenflächenpaare des Hexaeders in Geraden einer Ebene durchschneiden, oder die vier Diagonalen desselben durch einen und denselben Punkt gehen.

Das Sechsfach enthält in seinen sechs Seitenflächen und sechs Diametralebenen zwölf vollständige Vierseite, welche zu zwei eine Diagonale gemeinsam haben: zunächst nämlich die Vierseite der Gegenflächen, deren gemeinschaftliche Diagonalen die Kanten **BC**, **CA**, **AB** sind, dann die Vierseite jeder zwei Diametralebenen, welche in einer der Kanten **AD**, **BD**, **CD** als gemeinsamer Diagonale zusammenstosen, endlich jede zwei Vierseite einer Seitenfläche und einer Diametralflche, welche durch Gegenkanten zweier Diagonaltetraeder (z. B. durch die Gegenkanten **BC** und **AD**, **B₁C₁** und **A₁D₁**) gehen, also in einer Diagonale einer Seitenfläche des Kernhexaeders (**A₂D₂**) Übereinkommen. Legt man jetzt durch das ganze System eine Transversalebene und construirt zu den Durchschnittsgeraden derselben mit den einzelnen Vierseitsebenen die Conjugirten (§. 2), so liegen diese für jede zwei Vierseite, welche eine Diagonale gemeinsam haben, in einer Ebene, weil sie durch denselben Punkt dieser Diagonale gehen müssen, im Ganzen also zu vier in drei Ebenen. Die Conjugirten nämlich jeder vier Vierseite, welche durch Gegenkantenpaare der drei Diagonaltetraeder (z. B. durch **BC** und **AD**, **B₁C₁** und **A₁D₁**, **B₂C₂** und **A₂D₂**) gehen, liegen in einer und derselben Ebene. Jede dieser drei Ebenen muſs alle drei Pole der Transversalebene in Bezug auf die Diagonaltetraeder enthalten, weil jede durch die conjugirten harmonischen Punkte zu den Durchschnittspunkten von Gegenkanten dieser Tetraeder mit der Transversalebene geht (§. 1.): darum schneiden sich diese Ebenen in einer geraden Linie, auf welcher zugleich die fraglichen Pole selbst liegen müssen.

§. 7.

Der analytische Beweis des eben entwickelten Satzes giebt zu einer neuen Auffassung der in ihm enthaltenen Resultate und damit zu einer ferneren Analogie unseres Satzes von den Diagonalen des ebenen Vierseits für die Geometrie des Raumes Anlaß.

Die drei Diagonaltetraeder nämlich stehen in der eigenthümlichen Beziehung zu einander, daß sie zu zwei in vier verschiedenen Anordnungen ihrer Eckpunkte homolog sind, nämlich:

$ABCD$ und $D_1C_1B_1A_1$ mit dem Pol A_2 ,

$ABCD - C_1D_1A_1B_1 - - - B_2$,

$ABCD - B_1A_1D_1C_1 - - - C_2$,

$ABCD - A_1B_1C_1D_1 - - - D_2$;

ferner:

$ABCD$ und $D_2C_2B_2A_2$ mit dem Pol A_1 ,

$ABCD - C_2D_2A_2B_2 - - - B_1$,

$ABCD - B_2A_2D_2C_2 - - - C_1$,

$ABCD - A_2B_2C_2D_2 - - - D_1$;

endlich:

$A_1B_1C_1D_1$ und $D_2C_2B_2A_2$ mit dem Pol A ,

$A_1B_1C_1D_1 - C_2D_2A_2B_2 - - - B$,

$A_1B_1C_1D_1 - B_2A_2D_2C_2 - - - C$,

$A_1B_1C_1D_1 - A_2B_2C_2D_2 - - - D$.

Es läßt sich beweisen, daß *die Gegenflächenpaare des Kernhexaeders A_1 und A_2 , B_1 und B_2 , C_1 und C_2 respective conjugirte harmonische Ebenen zu den Seitenflächenpaaren des Diagonaltetraeders $ABCD$, welche in den Kanten BC , CA , AB zusammenstoßen, sind.* Von diesen Ebenen nämlich enthält jedes Paar des ersten Systems zwei Diagonalen und das entsprechende Paar des zweiten Systems die Endpunkte der dritten Diagonale eines Paares von Diametralvierseiten, z. B. in A_1 und A_2 liegen die Diagonalen A_1D_1 und A_2D_2 , und BCD und BCA gehen respective durch die Endpunkte D und A der Diagonale DA des Diametralvierecks DA_2AD_2 , oder auch in A_1 und A_2 liegen respective die Diagonalen B_2C_2 und B_1C_1 , und BCD und BCA gehen respective durch die Endpunkte D und A der Diagonale DA des Diametralvierecks DB_1AC_1 , und ähnlich die übrigen.

Nimmt man darum das Diagonaltetraeder $ABCD$ als Coordinatentetraeder, so lassen sich die Gegenflächenpaare des Hexaeders durch folgende Gleichungen darstellen:

$$(1.) \quad \begin{cases} A_1 = A_1 B_2 D_1 C_2 : t + w = 0, & \text{und} & A_2 = A_2 B_1 D_2 C_1 : t - w = 0, \\ B_1 = B_1 C_2 D_1 A_2 : u + w = 0, & \text{und} & B_2 = B_2 C_1 D_2 A_1 : u - w = 0, \\ I_1 = C_1 A_2 D_1 B_2 : v + w = 0, & \text{und} & I_2 = C_2 A_1 D_2 B_1 : v - w = 0, \end{cases}$$

wo t, u, v, w als mit beliebigen Constanten multiplicirt angenommen werden. Es ergeben sich hieraus als Gleichungen der Diametralebenenpaare, welche eine der Kanten AD, BD, CD gemeinschaftlich haben:

$$(2.) \quad \begin{cases} B_1 C_1 B_2 C_2 : u + v = 0, & \text{und} & A_1 D_1 A_2 D_2 : u - v = 0, \\ C_1 A_1 C_2 A_2 : v + t = 0, & \text{und} & B_1 D_1 B_2 D_2 : v - t = 0, \\ A_1 B_1 A_2 B_2 : t + u = 0, & \text{und} & C_1 D_1 C_2 D_2 : t - u = 0, \end{cases}$$

d. h. auch *die Diametralebenen sind zu zwei conjugirte harmonische Ebenen in Beziehung auf die in dem Durchschnittspunkt der Diagonalen des Hexaeders zusammenstossenden Seitenflächen des Diagonaltetraeders $ABCD$.*

Die Eckpunkte ferner des Diagonaltetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ erhält man der Reihe nach als Durchschnittspunkte der Ebenensysteme $A_1, B_2, I_2; B_1, I_2, A_2; I_1, A_2, B_2; A_1, B_1, I_1$: ihre Gleichungen sind also:

$$(3.) \quad \begin{cases} A_1 : -t = u = v = w, \\ B_1 : t = -u = v = w, \\ C_1 : t = u = -v = w, \\ D_1 : t = u = v = -w, \end{cases}$$

und demnach die Gleichungen ihrer Seitenflächen:

$$(4.) \quad \begin{cases} B_1 C_1 D_1 : -t + u + v + w = 0 = 2t_1, \\ C_1 A_1 D_1 : t - u + v + w = 0 = 2u_1, \\ A_1 B_1 D_1 : t + u - v + w = 0 = 2v_1, \\ A_1 B_1 C_1 : t + u + v - w = 0 = 2w_1. \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Eckpunkte des Diagonaltetraeders $A_2 B_2 C_2 D_2$, als Durchschnittspunkte der Ebenensysteme $A_2, B_1, I_1; B_2, I_1, A_1; I_2, A_1, B_1; A_2, B_2, I_2$, die Gleichungen:

$$(5.) \quad \begin{cases} A_2 : & t = -u = -v = w, \\ B_2 : & -t = u = -v = w, \\ C_2 : & -t = -u = v = w, \\ D_2 : & t = u = v = w \end{cases}$$

und daraus als Gleichungen ihrer Seitenflächen:

$$(6.) \quad \begin{cases} B_2 C_2 D_2 : & t - u - v + w = 0 = 2t_2, \\ C_2 A_2 D_2 : & -t + u - v + w = 0 = 2u_2, \\ A_2 B_2 D_2 : & -t - u + v + w = 0 = 2v_2, \\ A_2 B_2 C_2 : & t + u + v + w = 0 = 2w_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich leicht die am Anfange dieses Paragraphen gemachten Bemerkungen über die vierfach homologe Lage der Diagonaltetraeder verificiren, und zugleich ergeben sich die Gleichungen der Ebenen der Homologie selber. Denn zunächst erhält man aus den Gleichungen (4.) als Gleichungen der Ebenen der Homologie für die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ oder $tuvw$ und $t_1 u_1 v_1 w_1$ in vier verschiedenen Gruppierungen:

$$(7.) \quad \begin{cases} t - u - v + w = -t_1 + u_1 + v_1 - w_1 = 0, \\ -t + u - v + w = t_1 - u_1 + v_1 - w_1 = 0, \\ -t - u + v + w = t_1 + u_1 - v_1 - w_1 = 0, \\ t + u + v + w = t_1 + u_1 + v_1 + w_1 = 0 \end{cases}$$

und als die zugehörigen Pole für die Coordinatentetraeder $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$:

$$(8.) \quad \begin{cases} t = -u = -v = w, & \text{oder} & -t_1 = u_1 = v_1 = -w_1, \\ -t = u = -v = w, & \text{oder} & t_1 = -u_1 = v_1 = -w_1, \\ -t = -u = v = w, & \text{oder} & t_1 = u_1 = -v_1 = -w_1, \\ t = u = v = w, & \text{oder} & t_1 = u_1 = v_1 = w_1, \end{cases}$$

d. h. die einzelnen Seitenflächen und zugehörigen Gegenecken des dritten Diagonaltetraeders $A_2 B_2 C_2 D_2$.

Dafs die Ebenen (7.) die Ebenen der Homologie der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ sind, folgt aus den Gleichungen (7.) selbst, welche zeigen, dafs jede dieser Ebenen bei dem Uebergange von dem einen Coordinatensystem zum andern sich selbst entspricht.

Aehnliche Resultate ergeben die Gleichungen (6.), und es läßt sich demnach folgender Satz aussprechen:

Die drei Diagonaltetraeder eines Hexaeders, dessen vier Diagonalen durch einen und denselben Punkt gehen, sind zu zwei in vier verschiedenen Anordnungen ihrer Eckpunkte homolog, und zwar sind für die vier Zusammenstellungen von irgend zwei dieser Tetraeder als homologer Tetraeder die Eckpunkte des dritten Diagonaltetraeders die zugehörigen Pole der Homologie, und die respectiven Gegenflächen desselben die zugehörigen Ebenen der Homologie.

§. 8.

Betrachten wir jetzt zwei vierfach homologe Tetraeder an und für sich, das eine als Coordinatentetraeder und das zweite durch eins der Systeme von Gleichungen (4.) oder (6.) dargestellt, also etwa die beiden Tetraeder $tuvw$ und $t_1u_1v_1w_1$, so ergibt sich durch die Vergleichung mit den analytischen Entwicklungen von §. 2 sehr einfach, dafs in jeder Seitenfläche eines der beiden Tetraeder durch die Seitenflächen des andern ein vollständiges Vierseit ausgeschnitten wird, dessen Diagonalen die Tetraederkanten dieser Seitenfläche selbst sind, z. B. in der Seitenfläche w des Coordinatentetraeders sind die Durchschnittsgeraden mit den Seitenflächen von $t_1u_1v_1w_1$:

$$w = 0, \quad -t + u + v = 0,$$

$$w = 0, \quad t - u + v = 0,$$

$$w = 0, \quad t + u - v = 0,$$

$$w = 0, \quad t + u + v = 0,$$

d. h. die Seiten eines Vierseits, dessen Diagonalen

$$w = t = 0, \quad w = u = 0, \quad w = v = 0$$

sind; legen wir nun durch das System der beiden Tetraeder die Transversalebene

$$(E) : \lambda t + \mu u + \nu v + \bar{w}w = 0,$$

so ist die zu ihrem Durchschnitt mit der Ebene $w=0$ gehörige Conjugirte (§. 2):

$$w = 0, \quad \frac{t}{\lambda} + \frac{u}{\mu} + \frac{v}{\nu} = 0,$$

und so ergeben sich als die Conjugirten zu den Durchschnitten der Transversalebene E mit allen vier Seitenflächen des Coordinatentetraeders:

$$\begin{aligned}
 t &= 0, & \frac{u}{\mu} + \frac{v}{\nu} + \frac{w}{\varpi} &= 0, \\
 u &= 0, & \frac{t}{\lambda} + \frac{v}{\nu} + \frac{w}{\varpi} &= 0, \\
 v &= 0, & \frac{t}{\lambda} + \frac{u}{\mu} + \frac{w}{\varpi} &= 0, \\
 w &= 0, & \frac{t}{\lambda} + \frac{u}{\mu} + \frac{v}{\nu} &= 0,
 \end{aligned}$$

Linien, welche in der Ebene

$$\frac{t}{\lambda} + \frac{u}{\mu} + \frac{v}{\nu} + \frac{w}{\varpi} = 0$$

liegen, d. h.:

Die Seitenflächen eines Tetraeders werden durch die eines ihm vierfach homologen Tetraeders in vier Vierseiten durchschnitten, welche in der Beziehung zu einander stehen, daß die Conjugirten der Durchschnitsgeraden einer beliebigen Transversalebene mit den Seitenflächen des ersten Tetraeders in Bezug auf diese Vierseite in derselben Ebene liegen.

Berlin, im October 1858.