

Note sur quelques séries de puissances trouvées dans la théorie de la fonction gamma.

(Par NIELS NIELSEN, à Copenhague.)

I. SÉRIES DE PUISSANCES OBTENUES POUR $\Gamma(1+x)$ ET POUR $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$.

P osons pour abréger

$$\Gamma(x) = e^{\gamma(x)}, \quad (1)$$

nous aurons, pour $n = 1$,

$$-\gamma^{(1)}(x) = -D_x \log \Gamma(x) = C + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1} \right) = s_1(x) \quad (*), \quad (2)$$

où C désigne la constante d'EULER, et plus généralement, pour $n \geq 2$,

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \gamma^{(n)}(x) = s_n(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \dots, \quad (2^{bis})$$

de plus nous posons

$$s_1 = C = s_1(1), \quad s_n = s_n(1) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \quad (3)$$

On sait que $\Gamma(1+x)$ est holomorphe aux environs du point $x=0$ et que la série de puissances correspondante, savoir la série

$$\Gamma(1+x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \quad (4)$$

a son rayon de convergence égal à un.

(*) On voit que cette définition de $s_1(x)$ est un peu différente de celle que j'ai appliquée dans mon mémoire précédent dans ce même volume, p. 189.

Pour déterminer l'expression développée du coefficient général a_n figurant au second membre de (4) appliquons cette formule due à feu M. R. HOPPE (*)

$$D_x^n F(y) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot T^{k,n}(x) F^{(n)}(y)$$

où $y = f(x)$, et où nous avons posé pour abréger

$$T^{k,n}(y) = \sum_{s=0}^{s=k} (-1)^s \binom{k}{s} y^s D_x^n (y^{k-s}).$$

Or, dans le cas particulier qui nous occupe ici, où $F(y) = e^y$, cette formule générale se simplifie beaucoup. En effet, il est évident que l'expression $T^{k,n}(x)$ ne peut pas contenir la fonction y elle-même; c'est-à-dire que la formule polynomiale symbolique pour l'évaluation de

$$D_x^n (y_1 y_2 y_3 \dots y_k)$$

donnera dans ce cas

$$T^{k,n}(y) = n! \sum \frac{y^{(r_1)} y^{(r_2)} \dots y^{(r_k)}}{r_1! r_2! \dots r_k!},$$

où la sommation qui figure au second membre doit être étendue à toutes les combinaisons possibles des k nombres positifs entiers

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$$

qui satisfont à cette seule condition

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k = n.$$

Posons maintenant $y = \gamma(x)$, nous aurons, en vertu de (2) et (2^{bis}),

$$T^{k,n}(y) = (-1)^n n! \sum \frac{s_{r_1}(x) s_{r_2}(x) \dots s_{r_k}(x)}{r_1! r_2! r_3! \dots r_k!} = (-1)^n n! V^{k,n}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$V^{k,n}(x) = \sum \frac{s_{r_1}(x) s_{r_2}(x) \dots s_{r_k}(x)}{r_1! r_2! r_3! \dots r_k!},$$

et nous obtenons finalement cette formule générale

$$\Gamma^{(n)}(x) = (-1)^n n! \Gamma(x) \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot V^{k,n}(x), \quad (5)$$

(*) *Théorie der höheren Differentialquotienten*, Leipsic, 1845. — Voir aussi: SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 6, Brunswick, 1879.

ce qui donnera pour le coefficient c_n cette expression

$$C_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot V(1), \quad (6)$$

où nous avons par conséquent

$$V(1) = \sum \frac{s_{r_1} s_{r_2} \dots s_{r_k}}{r_1! \cdot r_2! \dots r_k!}. \quad (6^{bis})$$

Considérons ensuite cette autre fonction

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x \Gamma(x)} = \frac{1}{x} \cdot e^{-\gamma(x)}, \quad (7)$$

la formule de LEIBNITZ donnera cette formule différentielle générale

$$D_x^n \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)} \right) + \frac{n}{x} \cdot D_x^{n-1} \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)} \right) = \frac{1}{x} \cdot D_x^n e^{-\gamma(x)}. \quad (8)$$

En effet multiplions par x les deux membre de (7), puis différencions n fois par rapport à x , une nouvelle division par cette variable nous conduira immédiatement à (8).

Appliquons maintenant la méthode que nous venons d'indiquer, nous aurons sans peine

$$\begin{aligned} D_x^n \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)} \right)_{x=1} + n D_x^{n-1} \left(\frac{1}{\Gamma(1+x)} \right)_{x=1} &= \\ &= (-1)^n n! \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot V(1), \end{aligned}$$

ce qui donnera pour les coefficients généraux de cette série de puissances

$$\frac{1}{\Gamma(2+x)} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots \quad (\alpha)$$

cette relation générale

$$d_n + d_{n-1} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot V(1). \quad (\beta)$$

Cela posé, multiplions par $(x+1)$ les deux membres de (α) , nous aurons, en vertu de (β) , pour le coefficient général de cette série de puissances qui est valable dans toute l'étendue du plan des x , savoir la série

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \dots, \quad (9)$$

cette expression

$$\gamma_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot V_{[1]}^{k,n}, \quad (9^{\text{bis}})$$

où $V_{[1]}^{k,n}$ désigne la quantité définie à l'aide de la formule (6^{bis}), de sorte que nous avons démontré ces deux théorèmes dont le premier est bien connu, tandis que le second semble être nouveau :

I. *Les coefficients généraux c_n et γ_n des séries de puissances (4) et (9) s'expriment sous forme des polynômes entiers et homogènes du degré n des nombres $s_1 s_2 \dots s_n$, si nous supposons s_r du degré r ; les coefficients de ces polynômes sont des nombres rationnels.*

II. *L'expression susdite de γ_n peut être déduite de celle obtenue pour c_n en y posant simplement $-s_r$ au lieu de s_r .*

Les expressions développées (6) et (9^{is}) pour c_n et γ_n qui sont nouvelles peut-être ne sont guère convenables pour un calcul numérique; pour obtenir les valeurs approchées des coefficients susdits on peut partir de certaines formules récurrentes, comme l'a fait M. BOURGUET (*).

II. SÉRIES DE PUISSANCES OBTENUES POUR $B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ET POUR $x \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Il est bien remarquable que les résultats précédents peuvent être étendus à un cas particulier de la fonction beta aussi. En effet, posons

$$B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\beta(x)}, \quad (10)$$

nous aurons, en vertu de (2),

$$-\beta^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \left(s_1 \left(\frac{x}{2} \right) - s_1 \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) = \sigma_1(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \dots$$

(*) *Acta Mathematica*, t. II, p. 288, p. 291; 1884.

et plus généralement

$$\sigma_r(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \cdot \beta^{(r)}(x) = \frac{1}{x^r} - \frac{1}{(x+1)^r} + \frac{1}{(x+2)^r} - \dots$$

Pour l'argument 1 nous posons encore pour abréger

$$\sigma_r(1) = \sigma_r = \frac{1}{1^r} - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \frac{1}{4^r} + \dots,$$

ce qui donnera

$$\sigma_1 = \log 2$$

et plus généralement, pour $n \geq 2$,

$$\sigma_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \cdot s_n.$$

Cela posé, considérons cette série de puissances

$$\frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots, \quad |x| < 1, \quad (11)$$

nous aurons

$$2 b_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(D_x^n B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)_{x=1},$$

de sorte que le même procédé que nous venons d'appliquer sur la fonction gamma donnera ici pour le coefficient b_n cette expression

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} \cdot U^{k,n}(1), \quad (12)$$

où nous avons posé pour abréger

$$U^{k,n}(1) = \sum \frac{\sigma_{r_1} \sigma_{r_2} \dots \sigma_{r_k}}{r_1 \cdot r_2 \dots r_k}, \quad (12\text{bis})$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k = n.$$

Appliquons ensuite cette formule fondamentale $\Gamma(1+x) = x \cdot \Gamma(x)$, nous aurons de même, en vertu de (10),

$$B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{x} \cdot \frac{1}{B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\pi}{x} \cdot e^{-\beta(x)},$$

ce qui donnera cette autre formule analogue à (8)

$$D_x^n B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{n}{x} \cdot D_x^{n-1} B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{x} \cdot D_x^n e^{-\beta(x)},$$

d'où pour $x = 1$

$$\begin{aligned} D_x^n B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{x=1} + n D_x^{n-1} B\left(\frac{x-1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{x=1} = \\ = (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot U^{k,n}(1), \end{aligned}$$

où $U^{k,n}(1)$ désigne la quantité que nous venons de définir à l'aide de (12^{bis}).

Considérons maintenant cette autre série de puissances

$$\frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots \quad |x| < 2, \quad (\alpha)$$

les coefficients d_n doivent satisfaire à cette condition

$$d_n + d_{n-1} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot U^{k,n}(1). \quad (\beta)$$

Cela posé, cette formule fondamentale

$$B\left(\frac{x+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{x+1} B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (\gamma)$$

donnera, si nous multiplions par $(x+1)$ les deux membres de (α) , cette nouvelle série de puissances

$$\frac{x}{2} \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots, \quad |x| < 2, \quad (13)$$

dont le coefficient général se détermine par cette formule

$$\beta_n = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot U^{k,n}(1), \quad (13^{\text{bis}})$$

de sorte que nous avons démontré ces deux théorèmes qui semblent être nouveaux :

III. Le coefficient β_n de la série de puissances (13) peut être formé si nous remplaçons, dans l'expression obtenue pour γ_n , s_r par σ_r .

IV. Le coefficient b_n de la série de puissances (11) peut être déduit en multipliant par $\frac{\pi}{2}$ l'expression obtenue de β_n en y posant $-\sigma_r$ au lieu de σ_r .

Il est évident que les expressions développées que nous venons de donner pour les coefficients généraux b_n et β_n ne sont guère commodes pour un calcul numérique. Cependant, il est très facile de représenter les deux coef-

ficient susdits sous forme d'une série numérique qui peut être calculée approximativement sans peine quand l'indice n est assez grand. Pour déduire de telles séries numériques appliquons cette formule bien connue

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \Re(x) > 0,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{(\log t)^n}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(D_x^n B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)_{x=1}. \quad (\partial)$$

Cela posé, la formule du binôme donnera

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot t^6 + \dots$$

d'où, en vertu de cette formule intégrale, où r désigne un entier non négatif

$$\int_0^1 t^{x-1} (\log t)^r dt = \frac{(-1)^r r!}{x^{r+1}}, \quad \Re(x) > 0,$$

et en appliquant (∂) , cette expression nouvelle de b_n

$$(-1)^n b_n = \frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^{n+1}} + \dots \quad (14)$$

Nous aurons de même

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 \right) \frac{(\log t)^n}{t} dt = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6^{n+1}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\varepsilon)$$

et, en vertu de (γ) ,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 \right) t^{x-1} dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x}$$

ce qui donnera, en appliquant la série de puissances (13),

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - 1 \right) t^{x-1} dt = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 + \dots,$$

de sorte que nous obtiendrons à l'aide de la série numérique (ε) , cette représentation nouvelle du coefficient β_n :

$$(-1)^{n-1} \beta_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6^n} + \dots \quad (15)$$

Les formules (14) (15) donnent précisément les représentations nouvelles des coefficients b_n et β_n que nous avons nous proposé de développer.

Quant aux séries numériques

$$A_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^n} + \dots$$

$$B_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6^n} + \dots$$

nous avons, en vertu des théorèmes III et IV, cette proposition remarquable:

V. *La somme de la série numérique B_n est égale à un polynome entier à coefficients rationnels de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ et homogène du degré n dans ces nombres, si nous supposons σ_r du degré r . La somme de la série A_n , au contraire, peut être déduite en multipliant par $-\frac{\pi}{2}$ l'expression obtenue de B_{n-1} en y posant $-\sigma_r$ au lieu de σ_r .*

Nous aurons par exemple

$$B_1 = \sigma_1 = \log 2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \log 2,$$

ou, ce qui vaut autant, cette formule *eulérienne*

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \log 2;$$

en effet, pour déduire cette formule nous n'avons qu'à mettre dans $(\partial) n = 1$ et $t = \sin \varphi$.

Copenhague, le 25 avril 1903.