

5.

Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen.

(Von dem Herrn Prof. *H. Graßmann*, Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

§. 1.

Die verschiedenen Formen der stereometrischen Gleichungen dritten Grades.

Eine stereometrische Gleichung, welche in Bezug auf den veränderlichen Punct x vom *dritten* Grade ist, hat die Form eines gleich Null gesetzten Products nullter Stufe, welches den Punct x dreimal als Factor enthält.

In diesem Producte läßt sich nach den in der zweiten Abhandlung (Stereometr. Multiplication §. 5.) entwickelten Gesetzen der stereometrischen Multiplication, jeder beliebige Factor auf die letzte Stelle schaffen; und zwar so, daß er von keiner Klammer mehr umschlossen wird: also läßt sich namentlich auch einer der drei Factoren x auf die letzte Stelle bringen. Dann nimmt das Product die Form $ABRx$ an, in welcher A und B Producte sind, die den Punct x nur einmal als Factor enthalten, und wo R eine Reihe constanten Factoren ist, welche fortschreitend verknüpft werden sollen.

Bezeichnet man durch R' die umgekehrte Reihe von Factoren, so kann man, nach den am angeführten Orte entwickelten Gesetzen der stereometrischen Multiplication, statt des Products $ABRx$ auch $AB(xR')$ setzen, und das Product besteht nun aus drei Factoren, deren jeder den Punct x einmal als Factor enthält. Da das Product von nullter Stufe sein soll, so muß die Summe der drei Stufenzahlen der Factoren durch 4 theilbar sein; und da jede Stufenzahl größer als Null und kleiner als 4 ist, so kann die Summe derselben nur entweder 4, oder 8 sein. Im ersten Falle sind die Stufenzahlen 1, 1, 2, im zweiten 3, 3, 2. In beiden Fällen ist einer der drei variablen Factoren von zweiter Stufe. Dieser Factor zweiter Stufe kann entweder ein Product zweier Puncte, oder ein Product zweier Ebenen sein; und zwar muß von den Factoren des Products, da dasselbe x nur einmal enthält, der eine constant, der andere variabel sein. Bringt man den constanten Factor auf die letzte Stelle des

Products, so erhält man folgende 4 Schemata:

$$1111, \quad 1133, \quad 3311, \quad 3333;$$

wo in jedem Schema die drei ersten Ziffern der Reihe nach die Stufenzahlen der drei variablen Factoren, wie sie bei der letzten Umgestaltung hervorgingen, bezeichnen, während die letzte Ziffer die Stufenzahl des constanten Factors ist. Es ergeben sich demnach folgende 4 Gleichungsformen:

$$prsa = 0, \quad pr\sigma\alpha = 0, \quad \bar{w}qsa = 0, \quad \bar{w}q\sigma\alpha = 0;$$

wo p, r, s variable Punkte, \bar{w}, q, σ variable Ebenen sind, a ein constanter Punkt, α eine constante Ebene ist, und wo jedes der variablen Elemente ein Product ist, welches x nur einmal, und zwar verbunden mit einer Reihe fester Elemente enthält.

Nun habe ich gezeigt (S. Abh. 3. §. 3), dafs man, wenn x mit einer Reihe fester Elemente multiplicirt ist, und das Product einen Punkt oder eine Ebene giebt, statt jener Reihe entweder eine Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen, die mit einem Punkt beginnt und mit einer Ebene schliesst, oder eine Reihe fester Geraden setzen kann; und zwar in dem Sinne, dafs die substituirte Reihe bei jedem beliebigen x dasselbe Product giebt, wie die ursprüngliche. Die Reihe der festen Geraden, mit dem Punkte x fortschreitend verbunden, giebt eine Ebene, oder einen Punkt, je nachdem die Anzahl der Geraden gerade oder ungerade ist; wohingegen die Reihe der abwechselnden Punkte und Ebenen, da sie mit einem Punkt beginnt und mit einer Ebene schliesst, stets wieder einen Punkt als Product liefert. Ist nun \mathfrak{R} (oder \mathfrak{R}_1 oder \mathfrak{R}_2) eine Reihe fester Elemente, deren Stufenzahlen eine durch 4 theilbare Summe haben, und zwar entweder eine Reihe abwechselnder Punkte und Ebenen, die mit einem Punkte beginnt und mit einer Ebene schliesst, oder eine Reihe gerader Linien, deren Anzahl gerade ist, und bedeutet \mathfrak{R} , dafs das Element x fortschreitend mit den Elementen der Reihe \mathfrak{R} multiplicirt werden soll, so läfst sich jede der Gröfsen p, r, s in der Form $x\mathfrak{R}$ darstellen, und jede der Gröfsen \bar{w}, q, σ in der Form $x\mathfrak{R}A$, wo A eine Gerade ist, und daher auch \mathfrak{R} eine Reihe von Geraden bezeichnet. Setzt man $p \equiv x\mathfrak{R}$, $r \equiv x\mathfrak{R}_1$, $s \equiv x\mathfrak{R}_2$, $\bar{w} \equiv x\mathfrak{R}A$, $q \equiv x\mathfrak{R}_1A_1$, $\sigma \equiv x\mathfrak{R}_2A_2$, so ergeben sich die vier Gleichungsformen

$$\begin{aligned} (1.) \quad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a &= 0, & (3.) \quad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2A_2)\alpha &= 0, \\ (2.) \quad x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1A_1)(x\mathfrak{R}_2A_2)\alpha &= 0, & (4.) \quad x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1A_1)(x\mathfrak{R}_2)a &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei muß man wohl merken, daß die Reihen \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 , da die Stufenzahlen ihrer Factoren jedesmal eine durch 4 theilbare Summe geben, die Stufenzahl der Größe, mit der sie verbunden sind, unverändert lassen; daß sie ferner überall, wo zu ihnen keine feste Gerade mehr hinzutritt, sowohl Reihen abwechselnder fester Punkte und Ebenen, als auch Reihen fester Geraden darstellen können; daß sie hingegen, wo noch eine feste Gerade hinzutritt, jedesmal Reihen fester Geraden darstellen sollen. Die beiden ersten Gleichungen, in Worte gefaßt, geben folgende Sätze:

1. Wenn ein Punkt x Anfangspunkt dreier offener Figuren ist, und die Ebene, welche die End-Ecken derselben verbindet, durch einen festen Punkt (a) geht, während in jeder offenen Figur entweder die Seiten durch feste Punkte gehen, und die Ecken in festen Ebenen liegen, oder aber die Seiten und Ecken von festen Geraden getroffen werden: so beschreibt der Anfangspunkt x eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

2. Wenn ein Punkt x Anfangspunkt dreier offener Figuren ist, deren drei Endseiten sich in einem und demselben Punkte einer festen Ebene (α) begegnen, und alle Ecken und Seiten der drei offenen Figuren von festen Geraden getroffen werden: so beschreibt der Anfangspunkt x eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

Bestehen insbesondere die Reihen in Formel (1.) nur aus je einem Punkt und einer Ebene, in Formel (4.) aus je zwei Geraden, so erhält man folgende Specialsätze:

„Wenn die Grundfläche eines veränderlichen *Tetraëders* und die an der Spitze liegenden Kanten desselben durch feste Punkte gehen, während die Ecken der Grundfläche in festen Ebenen liegen: so beschreibt die Spitze des Tetraëders eine *Oberfläche dritter Ordnung*.“

„Wenn von den beiden Spitzen einer dreiseitigen *Doppelpyramide* die eine in einer festen Ebene liegt, während die an den Spitzen liegenden Kanten, so wie die Ecken der gemeinschaftlichen Grundfläche von festen Geraden getroffen werden: so beschreibt die andere Spitze eine *Oberfläche dritter Ordnung*.“

Da wir die vier aufgestellten Gleichungsformen auf die beiden ersten reduciren werden, so ist es nicht nöthig, auch die beiden unsymmetrischeren Gleichungsformen (3. und 4.) in Worte zu fassen.

§. 2.

Reduction der vier Gleichungsformen auf die ersten beiden Formen.

Bezeichnet man in der Gleichung (3.) die Gerade $x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)$ mit Y und den Punct $x\mathfrak{R}_2$ mit r , so nimmt die Gleichung die Form

$$Y(rA_2)\alpha = 0 \text{ an.}$$

In dem Producte $Y(rA_2\alpha)$ kann man (S. stereom. Mult. §. 5.), da es von nullter Stufe ist und aus drei Factoren besteht, die letzten beiden in Klammern schliessen, und erhält:

$$0 = Y(rA_2\alpha).$$

Nun sei a der Punct, in welchem die Gerade A_2 die Ebene α schneidet, und a_2 irgend ein von a verschiedener Punct in A_2 , also $A_2 \equiv a_2a$. Dann wird

$$rA_2\alpha \equiv ra_2\alpha.$$

Da der Factor a in α liegt, so kann man (S. stereom. Mult. §. 4.) diese beiden Factoren vertauschen, und erhält $rA_2\alpha \equiv r_2\alpha a$, also:

$$0 = Y(ra_2\alpha a).$$

Hier läßt sich wieder a , als letzter Factor, aus der Klammer herausrücken, und man erhält:

$$0 = Y(ra_2\alpha)a.$$

Da endlich $ra_2\alpha$ einen Punct darstellt, welcher aus x durch Multiplication mit einer Reihe fester Elemente hervorgegangen ist, so kann man ihn in der Form $x\mathfrak{R}_n$ darstellen. Substituirt man Dies, und setzt zugleich statt Y seinen Werth, so erhält man die Gleichungsform (1.).

In der Gleichung (4.) wollen wir $x\mathfrak{R} \equiv p$, $x\mathfrak{R}_1 \equiv p_1$, $x\mathfrak{R}_2 \equiv p_2$ setzen; dann giebt dieselbe:

$$pA(p_1A_1)p_2a = 0.$$

Es wird hier zu unterscheiden sein, ob sich die Geraden A und A_1 schneiden, oder nicht.

Angenommen zuerst, sie schneiden sich nicht, so drückt $pA(p_1A_1)$ die Durchschnittslinie der beiden Ebenen pA und p_1A_1 aus, die ich mit Y bezeichnen will, so dafs

$$Y \equiv pA(p_1A_1), \text{ und } Yp_2a = 0$$

ist. Es genügt zwei Puncte dieser Geraden Y zu kennen. Es ist klar, dafs der Punct pAA_1 , d. h. der Punct, in welchem die Ebene pA die Gerade A_1

schneidet, sowohl in der Ebene pA , als auch in p_1A_1 liegt; also auch in der Durchschnittslinie Y beider Ebenen. Dasselbe gilt von dem Puncte pA_1A . Beide Puncte sind, da der eine in A_1 , der andere in A liegt, und A und A_1 keinen Punct gemein haben, von einander verschieden; also ist Y ihrem Producte congruent, mithin

$$Y \equiv pAA_1(p_1A_1A).$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung $Yp_2a = 0$, und giebt dann dem pAA_1 , was einen Punct darstellt, die Form $x\mathfrak{R}$, und dem p_1A_1A die Form $x\mathfrak{R}_1$, so erhält man:

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0;$$

was die Form (1.) ist.

Angenommen, zweitens, A und A_1 schneiden sich in einem Puncte c . Dann sei $A \equiv c$, $A_1 \equiv cb_1$, und man erhält

$$pcb(p_1cb_1)p_2a = 0.$$

Das Product $pcb(p_1cb_1)$ stellt die Durchschnittskante der beiden Ebenen pcb und p_1cb_1 dar, also eine durch c gehende Linie. Sie werde gleich sc gesetzt, also $sc \equiv pcb(p_1cb_1)$, $scp_2a = 0$.

Es sei nun α irgend eine constante Ebene, die jedoch nicht durch c geht, so lassen sich, da dann $c\alpha$ nicht Null ist, zu dem Producte nullter Stufe scp_2a noch die Factoren c und α hinzufügen; also wird

$$scp_2a \equiv scp_2a.c\alpha.$$

Hier kann man in dem Product der vier Puncte scp_2a die beiden ersten und die beiden letzten Factoren zusammenschließen, indem man $(sc)(p_2a)$ schreibt. Tritt nun hier noch der Factor c hinzu, so liegt derselbe in dem ersten Factor sc ; folglich kann man (S. stereom. Mult. §. 4.) c mit dem zweiten Factor p_2a zusammenschließen, und erhält

$$scp_2a \equiv sc(p_2ac)\alpha,$$

also, indem man statt sc seinen Werth setzt:

$$0 = pcb(p_1cb_1)(p_2ac)\alpha;$$

welche Gleichung die Form (2.) hat. Demnach haben wir alle stereometrischen Gleichungen dritten Grades auf die Formen (1. und 2.) reducirt.

§. 3.

Lineale Construction der Oberflächen dritter Ordnung.

Die durch stereometrische Gleichungen dritten Grades dargestellten Oberflächen lassen sich *lineal construiren*; d. h., es läßt sich mittels des einzigen Postulates „Drei Punkte durch eine Ebene zu verbinden“ jeder Punkt einer solchen Oberfläche construiren.

In der That sei in der Formel (1.) das Product

$$(a.) \quad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) \equiv \varphi$$

gesetzt, so verwandelt sich die Formel (1.) in

$$(b.) \quad \varphi a = 0.$$

Setzt man noch die Punkte $x\mathfrak{R}$, $x\mathfrak{R}_1$, $x\mathfrak{R}_2$ beziehlich p , p_1 , p_2 , so verwandelt sich die Congruenz (a.) in $pp_1p_2 \equiv \varphi$. Multiplicirt man dieselbe auf beiden Seiten mit p , so erhält man, da $pp_1p_2p = 0$ ist, $0 \equiv p\varphi$, d. h. $0 \equiv x\mathfrak{R}\varphi$. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$(c.) \quad 0 = x\mathfrak{R}\varphi = x\mathfrak{R}_1\varphi = x\mathfrak{R}_2\varphi.$$

Diese Gleichungen lassen sich (S. stereom. Mult. §. 5.) umkehren, und man erhält:

$$(d.) \quad 0 = \varphi\mathfrak{R}'x = \varphi\mathfrak{R}'_1x = \varphi\mathfrak{R}'_2x;$$

wenn nämlich \mathfrak{R}' , \mathfrak{R}'_1 , \mathfrak{R}'_2 die durch Umkehrung aus \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 hervorgehenden Factorenreihen sind.

Diese Gleichungen führen nun unmittelbar zu der gesuchten Construction. In der That sei φ eine beliebige, durch den Punkt a gelegte Ebene, und es seien die Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}'_1$, $\varphi\mathfrak{R}'_2$ construirt, so ist der Durchschnittspunkt dieser drei Ebenen, oder, falls sie mehrere Punkte gemein haben, jeder den drei Ebenen gemeinschaftliche Punkt (x) ein Punkt der Oberfläche dritter Ordnung. In der That: ist x den drei Ebenen gemein, so genügt x den Gleichungen (d.), also auch den umgekehrten (c.), und mithin liegen die Punkte p , p_1 , p_2 in φ ; d. h., wenn nicht $p.p_1.p_2$ Null ist, so ist $\varphi = pp_1p_2$. Man erhält also, da φ durch a geht, in allen Fällen:

$$pp_1p_2a = 0, \text{ d. h. } x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0;$$

d. h. x ist ein Punkt der Oberfläche. Jeder durch a gelegten Ebene entspricht also, wenn $\varphi\mathfrak{R}' \cdot \varphi\mathfrak{R}'_1 \cdot \varphi\mathfrak{R}'_2$ nicht Null ist, *ein bestimmter*, lineal construirbarer Punkt der Oberfläche, und wenn jenes Product Null wird, so entspricht der Ebene φ die Gesammtheit der in einer Geraden (der Durchschnittslinie der

drei Ebenen) liegenden Punkte, oder, falls die drei Ebenen zusammenfallen, entsprechen ihr die sämtlichen Punkte dieser Ebene, und jene Gerade oder diese Ebene liegen dann ganz in der Oberfläche. Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte x der Oberfläche mindestens eine Ebene φ , aus welcher er sich lineal construiren läßt. Denn vermöge der Gleichung der Oberfläche $pp_1p_2a=0$ läßt sich stets für jedes x , was dieser Gleichung genügt, durch die Punkte p, p_1, p_2, a mindestens eine Ebene legen. Wird dieselbe mit φ bezeichnet, so sind $p\varphi, p_1\varphi, p_2\varphi$ gleich Null, also auch $\varphi\mathfrak{R}'x, \varphi\mathfrak{R}'_1x, \varphi\mathfrak{R}'_2x$; d. h. der Punkt x wird aus der angenommenen Hilfs-Ebene φ construirt. Hierdurch ist also die lineale Construirbarkeit der Oberfläche dritter Ordnung völlig dargethan.

Man betrachte die Gleichung (4.)

$$(4.) \quad x\mathfrak{R}A(x\mathfrak{R}_1A_1)(x\mathfrak{R}_2A_2)\alpha$$

und es sei

$$(a.) \quad \left\{ \begin{array}{l} x\mathfrak{R}A \equiv \bar{\omega}, \quad x\mathfrak{R}_1A_1 \equiv \bar{\omega}_1, \quad x\mathfrak{R}_2A_2 \equiv \bar{\omega}_2 \\ \text{und} \\ \bar{\omega}\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 \equiv \gamma. \end{array} \right.$$

Dann verwandelt sich die Gleichung (4.) in

$$(b.) \quad \gamma\alpha = 0.$$

Multiplicirt man die Congruenz (a.) auf beiden Seiten nach und nach mit $\bar{\omega}, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$, so ergibt sich:

$$(c.) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \bar{\omega}\gamma = \bar{\omega}_1\gamma = \bar{\omega}_2\gamma, \quad \text{d. h.} \\ 0 = x\mathfrak{R}A\gamma = x\mathfrak{R}_1A_1\gamma = x\mathfrak{R}_2A_2\gamma; \end{array} \right.$$

also auch umgekehrt:

$$0 = \gamma A\mathfrak{R}'x = \gamma A_1\mathfrak{R}'_1x = \gamma A_2\mathfrak{R}'_2x;$$

wo wiederum $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2$ aus $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ durch Umkehrung hervorgehen.

Es sei also γ ein beliebiger Punkt in der Ebene α und die Ebenen $\gamma A\mathfrak{R}', \gamma A_1\mathfrak{R}'_1, \gamma A_2\mathfrak{R}'_2$ seien construirt, so ist jeder Punkt x , welcher in diesen drei Ebenen liegt ein Punkt der durch die Gleichung (4.) dargestellten Oberfläche. Umgekehrt: wenn x ein Punkt jener Oberfläche ist, so ist für ein solches x das Product $\bar{\omega}\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\alpha=0$. Es haben also die vier Ebenen $\bar{\omega}, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \alpha$ mindestens einen Punkt gemein. Derselbe sei γ ; dann sind $\bar{\omega}\gamma, \bar{\omega}_1\gamma, \bar{\omega}_2\gamma$ gleich Null, also auch $\gamma A\mathfrak{R}'x, \gamma A_1\mathfrak{R}'_1x, \gamma A_2\mathfrak{R}'_2x$ sind Null, d. h. x liegt in den drei Ebenen $\gamma A\mathfrak{R}', \gamma A_1\mathfrak{R}'_1, \gamma A_2\mathfrak{R}'_2$. Also läßt sich jeder Punkt x der Oberfläche aus einem Punkt γ der Ebene α auf die ange-

gebene Weise lineal construiren; und umgekehrt liefert jeder in der Ebene α liegende Punct γ mittels der angegebenen Construction einen Punct der Oberfläche.

Es ist also die lineale Construirbarkeit aller durch stereometrische Gleichungen dritten Grades dargestellten Oberflächen nachgewiesen, und die Construction angegeben.

§. 4.

Projectivische Beziehung zwischen Ebenen und räumlichen Strahlenbüscheln.

Bei den stereometrischen Gleichungen *zweiten* Grades liefs sich Alles auf die fortschreitende Multiplication mit einer Reihe von Geraden zurückführen. Es traten daher nur punctirte Gerade und Ebenenbüschel erster Stufe, überhaupt nur Gebilde erster Stufe hervor. Bei der stereometrischen Gleichung *dritten* Grades tritt zum ersten Male der veränderliche Punct mit einer Reihe von Puncten und Ebenen so in Verbindung, daß Gebilde zweiter Stufe sich ergeben. Verfolgt man fortschreitend das Product $xaab\beta \dots$, so stellt xa einen räumlichen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt a dar, xaa eine punctirte Ebene, welche mit jenem Strahlenbüschel perspectivisch ist, $xacb$ einen räumlichen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt b , welcher mit dem ersten Strahlenbüschel perspectivisch ist, indem die punctirte Ebene α ihren perspectivischen Durchschnitt darstellt; $xacb\beta$ ist eine punctirte Ebene, welche mit der punctirten Ebene α perspectivisch und mit xa projectivisch ist. So wird man überhaupt je zwei dieser Gebilde (räumliche Strahlenbüschel und punctirte Ebenen) zu einander projectivisch nennen können, wenn man eins aus dem andern durch Multiplication mit einer Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen ableiten kann. Doch setzen wir stets voraus, daß keins der aufeinander folgenden festen Elemente mit einem Nachbar-Elemente vereinigt liegen darf (also der Punct nicht in der vorhergehenden oder folgenden Ebene). Es leuchtet ein, daß diese Beziehung gegenseitig ist; so z. B. wenn aus xa das Gebilde $xacb\beta c \equiv cyc$ abgeleitet ist, so geht das ursprüngliche Gebilde durch die rückgängige Combination hervor, nämlich $xa \equiv yc\beta baa$. Analytisch betrachtet beruht die Gegenseitigkeit auf dem Gesetze, daß $AB\Gamma B \equiv AB$ ist, wenn die Stufenzahlen von Γ und B zusammen 4 betragen und diese beiden Elemente nicht vereinigt liegen. Aus diesem Gesetze nämlich, welches früher (Stereom. Mult. §. 4.) nachgewiesen wurde, folgt sogleich durch wiederholte Anwendung:

$$ABB_1 \dots B_n \Gamma B_n \dots B_1 B \equiv AB,$$

wenn die Stufenzahlen je zweier aufeinander folgender Factoren $B, B_1, \dots B_n, \Gamma$ zusammen 4 betragen. Hierin liegt dann unmittelbar die Gegenseitigkeit der Projectivität.

Betrachtet man nun zwei projectivische punctirte Ebenen, so ist klar, daß dreien Puncten der einen Ebene, welche in gerader Linie liegen, auch drei in gerader Linie liegende Puncte der andern entsprechen. Denn dreien in gerader Linie liegenden Puncten einer Ebene werden in dem perspectivischen Strahlenbüschel drei in einer und derselben Ebene liegende Strahlen entsprechen, und diesen wiederum in der mit jedem Strahlenbüschel perspectivischen Ebene drei in gerader Linie liegende Puncte; und so fort. Es sind also die projectivischen Ebenen zugleich einander collinear. Sind daher 4 Puncte in der einen Ebene, von denen jedoch keine drei in gerader Linie liegen, vier derselben Bedingung unterworfenen Puncten der andern entsprechend, so ist dadurch nothwendig zu jedem fünften Puncte der einen Ebene der entsprechende der andern bestimmt.

Der Beweis dafür, daß man auch in der That 4 beliebige Puncte in einer Ebene (von denen jedoch keine 3 in gerader Linie liegen) 4 solchen in einer andern projectivisch entsprechend setzen könne, ergiebt sich aus der Lösung der Aufgabe: Vier beliebige Puncte einer Ebene α (von denen keine 3 in gerader Linie liegen) aus 4 beliebigen (derselben Bedingung unterworfenen) Puncten einer andern Ebene α_1 durch Multiplication mit einer Reihe abwechselnder fester Puncte und Ebenen abzuleiten.

Es seien a, b, c, d die 4 Puncte in α und a_1, b_1, c_1, d_1 die in α_1 . Verbindet man zwei entsprechende Puncte a und a_1 durch eine Gerade, und nimmt in ihr einen beliebigen Punct a_2 an, der jedoch nicht mit a_1 zusammenfällt, legt dann durch a eine beliebige Ebene α_2 , die jedoch nicht mit α zusammenfällt, und multiplicirt die Puncte a_1, b_1, c_1, d_1 fortschreitend mit a_2 und α_2 , so erhält man 4 Puncte a_2, b_2, c_2, d_2 , von denen a_2 mit a zusammenfällt. Jetzt ziehe man die Geraden ab und cd und nenne ihren Durchschnittspunct e , ziehe dann die entsprechenden Geraden a_2b_2 und c_2d_2 , und nenne ihren Durchschnittspunct e_2 . Da nun ab und a_2b_2 sich in a schneiden, also in einer und derselben Ebene liegen, so werden auch die Geraden bb_2 und ee_2 sich schneiden. Ihr Durchschnittspunct sei a_3 . Jetzt lege man durch ab eine beliebige Ebene α_3 , welche jedoch nicht mit α zusammenfällt, und multiplicire die Puncte a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 fortschreitend mit a_3 und α_3 , so erhält man fünf Puncte a_3, b_3, c_3, d_3, e_3 , von denen drei, in gerader Linie

liegende, nämlich a_3, b_3, e_3 , mit den entsprechenden Punkten a, b, e zusammenfallen, und von denen auch die Punkte c_3, ∂_3, e_3 in gerader Linie liegen, weil die entsprechenden c_2, ∂_2, e_2 in gerader Linie lagen. Nun ziehe man endlich die Geraden $cc_3, \partial\partial_3$. Dieselben werden sich, da sich die Geraden $c\partial e$, und $c_3\partial_3e_3$ in dem Punkte $e \equiv e_3$ schneiden, gleichfalls schneiden müssen; ihr Durchschnitt sei a_4 . Multiplicirt man nun die Punkte $a_3, b_3, c_3, \partial_3$ fortschreitend mit a_4 und α , so fallen die so hervorgehenden 4 Punkte mit a, b, c, ∂ zusammen. Also ist

$$a, b, c, \partial \equiv (a_1, b_1, c_1, \partial_1) a_2 \alpha_2 a_3 \alpha_3 a_4 \alpha.$$

Es läßt sich sagen, daß nach dieser Formel die Punkte a, b, c, ∂ aus $a_1, b_1, c_1, \partial_1$ durch dreimalige Projection hervorgehen, indem die Punkte zuerst durch den Punkt a_2 auf die Ebene α_2 projicirt sind, dann die so hervorgegangenen Projectionen durch den Punkt a_3 auf die Ebene α_3 , und daß diese Projectionen schließlic durch a_4 auf α_4 projicirt sind. Dann ergeben sich aus der vorstehenden Auflösung und durch Reciprocität folgende Sätze:

1. Vier beliebige Punkte einer Ebene, von denen keine 3 in gerader Linie liegen, lassen sich aus beliebigen 4, derselben Bedingung unterworfenen Punkten einer andern Ebene durch *dreimalige* Projection ableiten.

2. Wenn insbesondere ein Punkt der einen Gruppe mit dem entsprechenden der andern zusammenfällt, so lassen sich die Punkte der einen Gruppe aus denen der andern durch *zweimalige* Projection ableiten.

3. Wenn endlich 2 der ersten 4 Punkte mit zweien entsprechenden der andern zusammenfallen, und die geraden Linien, welche die beiden übrig bleibenden Punkte jeder Gruppe verbinden, sich schneiden: so lassen sich die einen 4 Punkte aus den andern durch *einmalige* Projection ableiten.

4. Vier beliebige, durch einen Punkt gehende Ebenen, von denen keine 3 dieselbe Kante gemein haben, lassen sich aus beliebigen vier, derselben Bedingung unterworfenen Ebenen durch *dreimalige* Projection ableiten [wobei ich den Ausdruck Projection auch auf die reciproke Ableitungsweise übertrage].

5. Wenn dabei ein Paar entsprechender Ebenen zusammenfällt, so lassen sich die einen aus den andern durch *zweimalige* Projection ableiten.

6. Wenn dabei zwei Paare entsprechender Ebenen zusammenfallen, und die Durchschnittskanten, in welchen sich die beiden übrig bleibenden Ebenen jeder Gruppe schneiden, in einem Punkte sich begegnen: so lassen sich die einen 4 Ebenen aus den andern durch *einmalige* Projection ableiten.

7. In zwei Ebenen, welche projectivisch sein sollen, lassen sich beliebige 4 Punkte der einen, beliebigen 4 Punkten der andern, vorausgesetzt daß keine 3 Punkte einer Gruppe in gerader Linie liegen, entsprechend setzen. Dann aber ist zu jedem fünften Punkte der einen Ebene der entsprechende der andern bestimmt. Dasselbe gilt, wenn man statt der 4 Punkte in beiden Ebenen 4 Gerade setzt, von welchen keine 3 durch denselben Punkt gehen.

8. Durch zwei Punkte, welche die Mittelpunkte von projectivischen räumlichen Strahlenbüscheln werden sollen, lassen sich beliebige 4 durch den einen Punkt gehende Ebenen, von denen keine 3 eine und dieselbe Kante gemein haben, beliebigen 4 derselben Bedingung unterworfenen Ebenen, die durch den andern Punkt gehen, entsprechend setzen; dann aber ist zu jeder fünften Ebene des einen Büschels die entsprechende des andern bestimmt. Dasselbe gilt, wenn man, statt der 4 Ebenen, durch jeden der beiden Punkte 4 Strahlen setzt, von denen keine 3 in einer und derselben Ebene liegen.

9. Zwei projectivische punctirte Ebenen lassen sich stets durch dreimalige Projection aus einander ableiten. Haben sie insbesondere einen selbstentsprechenden Punkt, so lassen sie sich durch zweimalige Projection aus einander ableiten; und wenn in der Durchschnittslinie der beiden Ebenen 3 selbstentsprechende Punkte liegen, durch einmalige Projection.

10. Umgekehrt: Wenn sich zwei projectivische Ebenen aus einander durch einmalige Projection ableiten lassen, so ist in der Durchschnittslinie beider Ebenen jeder Punkt ein selbstentsprechender. Wenn sie sich durch zweimalige Projection ableiten lassen, so haben sie einen selbstentsprechenden Punkt (nämlich den Punkt, welchen die beiden Ebenen mit der Projections-Ebene gemein haben).

11. Zwei projectivische Strahlenbüschel lassen sich stets durch dreimalige Projection aus einander ableiten. Haben sie insbesondere eine selbstentsprechende Ebene, so lassen sie sich durch zweimalige Projection aus einander ableiten, und wenn durch die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte 3 selbstentsprechende Ebenen gehen, durch einmalige Projection.

12. Umgekehrt: Wenn sich zwei projectivische Strahlenbüschel aus einander durch einmalige Projection ableiten lassen, so ist jede durch die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gehende Ebene eine selbstentsprechende. Wenn sie sich durch zweimalige Projection aus einander ableiten lassen, so haben sie eine selbstentsprechende Ebene (nämlich die Ebene, welche durch die beiden Mittelpunkte und den Projectionspunkt geht).

Noch ergeben sich leicht die folgenden Sätze, welche zur Veranschaulichung der projectivischen Beziehungen nothwendig sind.

13. In je zwei projectivischen Ebenen (α und α_1) giebt es mindestens *ein* Paar entsprechender Geraden, welche sich schneiden. (Es giebt deren im Allgemeinen mehrere; und zwar bilden in jeder Ebene die Geraden, die von den entsprechenden Geraden getroffen werden, die Tangenten eines Kegelschnitts.)

Bew. Denn es lassen sich beide nach dem Satze (No. 9) durch *dreimalige* Projection aus einander ableiten. Legt man nun durch die 3 Projectionspuncte eine Ebene α_4 , welche die Ebenen α und α_1 beziehlich in A und A_1 schneidet, so sind A und A_1 entsprechende Geraden. Denn die fortschreitenden Projectionen der Geraden A_1 bleiben stets in der Ebene α_4 ; also liegt auch die der Geraden A_1 entsprechende in dieser Ebene, mithin im Durchschnitt von α_4 und α ; d. h. ist identisch mit A .

14. Wenn sich zwei projectivische Ebenen (α und α_1) durch *zweimalige* Projection aus einander ableiten lassen, so giebt es eine Gerade von der Art, daß alle durch sie gelegte Ebenen die beiden Ebenen α und α_1 in entsprechenden Geraden schneiden; und zwar ist jene Gerade die Verbindungslinie der beiden Projectionspuncte.

15. Wenn sich zwei projectivische Ebenen durch *einmalige* Projection aus einander ableiten lassen, so schneiden sich je zwei entsprechende Geraden beider Ebenen; und die Ebenen, welche zwei entsprechende Geraden verbinden, gehen alle durch denselben Punct, nämlich durch den Projectionspunct.

Und eben so reciprok:

16. Je zwei projectivische Strahlenbüschel haben mindestens *ein* Paar entsprechender Strahlen, welche sich schneiden.

17. Wenn sich zwei projectivische Strahlenbüschel durch zweimalige Projection aus einander ableiten lassen, so giebt es eine Gerade, deren sämtliche Puncte Vereinigungspuncte entsprechender Strahlen sind; und zwar ist diese Gerade die Durchschnittslinie der beiden Projections-Ebenen.

18. Wenn sich zwei projectivische Strahlenbüschel durch einmalige Projection aus einander ableiten lassen, so begegnen sich je zwei entsprechende Strahlen in der Projections-Ebene.

Die aufgestellten Beziehungen werden für die projectivische Deutung der Gleichungen dritten Grades genügen. Da diese Beziehungen, so viel ich weiß, bisher nirgends im Zusammenhange dargestellt sind, so glaubte ich, der Deutlichkeit wegen, sie hier zusammenstellen zu müssen.

§. 5.

Die Oberfläche dritter Ordnung als Durchschnitt dreier projectivischer Büschel.

Nimmt man an, daß x in der Gleichung dritten Grades stets mit einer Reihe abwechselnder fester Punkte und Ebenen multiplicirt sei, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0,$$

wo \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 Reihen abwechselnder fester Punkte und Ebenen sind.

Wir haben gezeigt, daß jeder Punkt x , welcher dieser Gleichung genügt, sich mittels einer durch den Punkt a gelegten Hilfs-Ebene φ als Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}'_1$, $\varphi\mathfrak{R}'_2$ construiren läßt, indem nämlich \mathfrak{R}' , \mathfrak{R}'_1 , \mathfrak{R}'_2 durch Umkehrung der Reihen \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 hervorgehen. Ferner wurde gezeigt, daß, wie auch die Hilfs-Ebene φ durch den Punkt a gelegt werden mag, stets der Durchschnittspunkt jener drei Ebenen, oder allgemeiner, jeder den drei Ebenen gemeinsame Punkt (1.) genügt. Nun stellt die Gesamtheit der durch den Punkt a gehenden Ebenen φ einen Ebenenbüschel zweiter Stufe, und ihre Durchschnittslinien stellen einen räumlichen Strahlenbüschel dar. Aus diesem Ebenenbüschel geht das System der Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$ durch fortschreitende Multiplication mit einer Reihe abwechselnder fester Ebenen und Punkte, also durch fortschreitende Projection hervor. Das hervorgehende Gebilde ist ein Ebenenbüschel zweiter Stufe, aus welchem also (nach dem vorhergehenden Paragraph) der ursprüngliche Ebenenbüschel wiederum durch Projection abgeleitet werden kann. Die Beziehung ist also eine gegenseitige, d. h. beide Büschel sind zu einander projectivisch. Demnach sind die drei Ebenenbüschel $\varphi\mathfrak{R}'$, $\varphi\mathfrak{R}'_1$, $\varphi\mathfrak{R}'_2$ dem Ebenenbüschel φa projectivisch, also auch untereinander und wir haben folgenden Satz:

„Der Durchschnitt dreier projectivischer Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

Oder, anders ausgedrückt:

„Die gesamten Durchschnittspunkte je dreier entsprechender Ebenen dreier projectivischer Strahlenbüschel bilden eine *Oberfläche dritter Ordnung*.“

Sucht man, umgekehrt, wenn drei projectivische Ebenenbüschel zweiter Stufe gegeben sind, die möglichst einfache Gleichung ihres Durchschnitts, so kann man auf den Satz zurückgehen, daß zwei solche Büschel sich stets durch dreimalige Projection aus einander ableiten lassen. Es seien a , a_1 , a_2 die

Mittelpunkte der drei Ebenenbüschel, und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ entsprechende Ebenen derselben. Da sich nun aus einem Ebenenbüschel (φ) jeder damit projectivische Büschel (φ_1, φ_2) durch dreimalige Projection, also durch fortschreitende Multiplication mit drei Paaren von Ebenen und Puncten ableiten läßt, so folgt, daß sich φ_1 und φ_2 in den folgenden Formen ausdrücken lassen:

$$\varphi \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1, \quad \varphi_2 \equiv \varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2.$$

Also wenn x der Durchschnitt der drei entsprechenden Ebenen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ ist, so ist

$$x \equiv \varphi\varphi_1\varphi_2 \equiv \varphi(\varphi\gamma c\beta b\alpha a_1)(\varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2).$$

Ist x der Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, oder allgemeiner (auch wenn die drei Ebenen eine Kante gemein haben, oder zusammenfallen), ein Punct, der in allen dreien zugleich liegt, so hat man:

$$0 = \varphi x, \quad 0 = \varphi_1 x = \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1 x, \quad 0 = \varphi_2 x = \varphi\gamma_1 c_1\beta_1 b_1\alpha_1 a_2 x,$$

oder, umgekehrt:

$$x\varphi = 0, \quad x a_1 \alpha b\beta c\gamma \varphi = 0, \quad x a_2 \alpha_1 b_1 \beta_1 c_1 \gamma_1 \varphi = 0,$$

also, da die drei Puncte $x, x a_2 \alpha b\beta c\gamma, x a_2 \alpha_1 b_1 \beta_1 c_1 \gamma_1$ in φ liegen:

$$\varphi \equiv x(x a_1 \alpha b\beta c\gamma)(x a_2 \alpha_1 b_1 \beta_1 c_1 \gamma_1).$$

Die Ebene φ geht aber durch a , also hat man

$$0 = \varphi a = x(x a_1 \alpha b\beta c\gamma)(x a_2 \alpha_1 b_1 \beta_1 c_1 \gamma_1) a.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, durch welche der Durchschnitt dreier projectivischer Ebenenbüschel dargestellt ist.

Wenn insbesondere zwei der projectivischen Ebenenbüschel durch zweimalige Projection aus einander sich ableiten lassen, d. h. wenn sie eine selbst entsprechende Ebene haben, so reducirt sich nach der so eben gegebenen Entwicklung die Gleichung auf die Form

$$0 = x(x a_1 \alpha b\beta)(x a_2 \alpha_1 b_1 \beta_1 c_1 \gamma_1) a.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, daß die Durchschnittslinie der Ebenen α und β auf der durch die Gleichung dargestellten Oberfläche dritter Ordnung liegt. In der That ist x irgend ein Punct dieser Durchschnittslinie; d. h.: liegt x in α und in β , so ist $x a_1 \alpha \equiv x$, also $x a_1 \alpha b\beta \equiv x b\beta \equiv x$. Mithin geben die beiden ersten Factoren obiger Gleichung denselben Punct x , folglich ist ihr Product gleich Null, also auch das ganze Product. Somit ist x , also jeder Punct von $\alpha\beta$, ein Punct der Oberfläche, d. h. die Gerade $\alpha\beta$

liegt selbst auf der Oberfläche. Die Ebenen α und β sind nun diejenigen Ebenen, mittels deren die beiden ersten Ebenenbüschel (φ und φ_1) aus einander durch Projection abgeleitet werden konnten. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen hat nach dem Satze (Nr. 17. im vorigen Paragraph) die Eigenschaft, daß in jedem Punkte derselben zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel sich begegnen; weshalb sie die *Collineations-Axe* dieser Büschel genannt werden kann.

Haben insbesondere je zwei der drei projectivischen Büschel, welche die Oberfläche erzeugen, eine selbstentsprechende Ebene, so ist klar, daß die drei Collineations-Axen, die zu je zweien jener Büschel gehören, in der Oberfläche liegen. Fallen endlich diese drei selbstentsprechenden Ebenen zusammen, d. h. fallen in der Ebene δ , welche die drei Mittelpunkte der Büschel verbindet, drei entsprechende Ebenen zusammen, so liegt jeder Punkt jener Ebene δ in drei entsprechenden Ebenen, und ist also ein Punkt der Durchschnittsfläche; d. h.: die Durchschnittsfläche zerfällt in die Ebene δ und in eine Fläche zweiter Ordnung. In dieser Fläche zweiter Ordnung müssen aber die drei Collineations-Axen liegen, folglich ist die dadurch erzeugte Fläche zweiter Ordnung gleichfalls eine geradlinige. Für die drei Collineations-Axen ergiebt sich leicht, daß, wenn zwei derselben in einem Punkt zusammentreffen, auch die dritte durch diesen Punkt gehen muß. Denn treffen zwei Collineations-Axen, z. B. die zwischen dem ersten und zweiten, und die zwischen dem zweiten und dritten Büschel, in einem Punkte zusammen, so begegnen sich in diesem Punkte drei entsprechende Strahlen jener drei Büschel, also auch zwei entsprechende Strahlen des ersten und dritten Büschels; d. h. die Collineations-Axe zwischen dem ersten und dritten Büschel muß gleichfalls durch diesen Punkt gehen. Hieraus nun folgt daß die Collineations-Axen entweder durch einen und denselben Punkt gehen, oder sich überhaupt nicht treffen. Im ersteren Falle ist die durch sie gelegte Fläche zweiter Ordnung ein *Kegel*, im zweiten ein *einfaches Hyperboloid*, oder, wenn die drei Collineations-Axen mit einer und derselben Ebene parallel sind, ein *hyperbolisches Paraboloid*. In beiden Fällen wird die Fläche zweiter Ordnung durch jene drei Axen bestimmt. Sind A, B, C die drei Axen, und wird angenommen, sie treffen nicht in demselben Punkte zusammen, so ist die Gleichung des gesammten Durchschnitts der drei Büschel:

$$x\delta.xABCx = 0,$$

und in Worten ausgedrückt:

„Wenn in der Verbindungs-Ebene der Mittelpunkte dreier projectivischer Büschel drei entsprechende Ebenen zusammenfallen, so zerfällt die Durchschnittsfläche der drei Büschel in jene Verbindungs-Ebene und in eine durch die drei Collineations-Axen gehende Fläche zweiter Ordnung.“

Wir stellen nun noch die Aufgabe: „Die Oberfläche dritter Ordnung, welche durch drei gegebene Punkte und durch 4 gegebene gerade Linien geht, als Durchschnitt dreier projectivischer Büschel zu construiren.“

Die Bedingung, daß eine Oberfläche durch eine gerade Linie gehen (d. h. diese ganz in jener liegen) soll, ist identisch mit der Bedingung, daß *vier* in gerader Linie liegende Punkte auf der Oberfläche liegen sollen. Die Bedingung also, daß sie durch vier gerade Linien gehen soll, drückt aus, daß sie 16 Punkte enthalten soll, die zu je vierten auf 4 geraden Linien liegen. Diese 16 Punkte, mit den 3 ursprünglich gegebenen, liefern eine Anzahl von 19 Punkten, welche zur Bestimmung einer Oberfläche dritter Ordnung im Allgemeinen ausreichen. Es wird also die Oberfläche durch jene 3 Punkte und 4 Gerade im Allgemeinen bestimmt werden. Es seien a, a_1, a_2 die 3 Punkte, A, B, C, D die 4 Geraden. Durch jene 3 Punkte und diese 4 Gerade lege man die 12 Ebenen, so bilden diese drei Büschel mit den Mittelpunkten a, a_1, a_2 , indem jeder Büschel 4 Ebenen enthält. Wir nehmen an, daß die gegebenen 7 Elemente *nicht* eine solche besondere Lage haben, daß sich durch irgend einen der drei Punkte eine Gerade ziehen lasse, welche drei der gegebenen Geraden schneide. Dies angenommen, folgt, daß von den 4 Ebenen eines jeden Büschels keine 3 sich in einer und derselben geraden Linie schneiden, weil sonst diese gerade Linie, gegen die Annahme, durch den Mittelpunkt dieses Büschels gehen und die 3 Geraden, durch welche die 3 Ebenen gelegt wären, schneiden würde. Man kann daher (nach §. 5, 8) die 3 Büschel zu einander projectivisch setzen; wobei sich die entsprechenden Ebenen beliebig wählen lassen. Wir setzen aA, a_1A, a_2A einander entsprechend; und so überhaupt diejenigen jener 12 Ebenen, welche jedesmal in einer der vier Geraden A, B, C, D zusammentreffen. Die Durchschnittsfläche dieser 3 Ebenenbüschel wird dann durch eine Gleichung von der Form

$$x(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0$$

ausgedrückt, wo die Reihen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ beziehlich mit a_1 und a_2 beginnen. Diese Gleichung läßt sich, da die 4 Factoren Punkte sind, auch

$$xa(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2) = 0$$

schreiben. Es ist zu zeigen, daß die durch sie dargestellte Durchschnittsfläche die 7 gegebenen Elemente enthält.

Ist zuerst $x \equiv a$, so wird $xa = 0$; ist $x \equiv a_1$ oder a_2 , so wird $x\mathfrak{R}_1$ oder $x\mathfrak{R}_2 = 0$, also wird in allen drei Fällen der Gleichung genügt, d. h. die Fläche enthält die Punkte a, a_1, a_2 . Ferner, in der Geraden A , da sie in drei entsprechenden Ebenen liegt, ist jeder Punkt dreien entsprechenden Ebenen gemein, also ein Punkt der Durchschnittsfläche, folglich geht diese auch durch die Gerade A , und eben so durch B, C, D . Mithin ist die Aufgabe vollständig gelöst.

§. 6.

Deutung jeder stereometrischen Gleichung dritten Grades durch Projectivität.

In dem vorhergehenden Paragraph werde nur die Gleichungsform (1.), und von ihr wiederum nur der Fall betrachtet, wo die in der Gleichung vorkommenden Reihen ($\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$) von Factoren aus abwechselnden Punkten und Ebenen bestehen. Es bleiben also noch die Fälle zu berücksichtigen, wo eine oder mehrere der Reihen nur aus Geraden bestehen. In der zweiten Gleichungsform bestehen, wie wir oben sahen, alle drei Reihen aus Geraden. Die Gleichung (1.) war:

$$(1.) \quad x\mathfrak{R}(x\mathfrak{R}_1)(x\mathfrak{R}_2)a = 0.$$

Es wurde gezeigt, daß sich jeder Punkt x , der dieser Gleichung genügt, als Durchschnitt dreier Ebenen ansehen läßt; mittels eines durch a gelegten Ebenenbüschels zweiter Stufe. Wenn nämlich φ eine beliebige Ebene dieses Büschels ist, und $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2$ die durch Umkehr aus $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ hervorgehenden Reihen sind, so genügt der Durchschnitt der drei Ebenen $\varphi\mathfrak{R}', \varphi\mathfrak{R}'_1, \varphi\mathfrak{R}'_2$, der obigen Gleichung, und die Gesammtheit dieser Durchschnitte bildet die durch die Gleichung (1.) dargestellte Oberfläche. Die Ebene $\varphi\mathfrak{R}'$ geht nun aus φ durch fortschreitende Projection hervor, und die ganze Schaar der Ebenen $\varphi\mathfrak{R}'$ bildet einen Ebenenbüschel; und zwar entweder einen Ebenenbüschel zweiter Stufe, oder erster Stufe, je nachdem \mathfrak{R}' aus einer Reihe abwechselnder Ebenen und Punkte, oder aus einer Reihe von Geraden besteht. Im ersten Falle ist der letzte Punkt jener Reihe \mathfrak{R}' der Mittelpunkt des Ebenenbüschels zweiter Stufe; im zweiten Falle ist die letzte Gerade jener Reihe (\mathfrak{R}') die Axe des Ebenenbüschels erster Stufe. In beiden Fällen ist der Ebenenbüschel $\varphi\mathfrak{R}'$ durch Projection aus dem Ebenenbüschel zweiter Stufe (φ) abgeleitet. Im ersten Falle liefs sich rückwärts aus dem letzteren Büschel (φ)

wieder der erste durch Projection ableiten. Im zweiten Falle ist dies nicht möglich, da man durch fortschreitende Projection eines Ebenenbüschels erster Stufe immer nur höchstens zu Gebilden erster Stufe gelangen kann. Die Projectivität ist also in diesem Falle nicht gegenseitig. Dasselbe gilt nun von den Ebenenbüscheln $\varphi\mathcal{R}'_1$, $\varphi\mathcal{R}'_2$.

Nach diesen Vorbemerkungen lassen sich die vier aus der Formel (1.) fließenden Sätze der Projectivität unmittelbar aussprechen; wobei wir, der Vollständigkeit wegen, auch noch den früher entwickelten Satz hinzufügen:

1. Der Durchschnitt dreier einander projectivischer Ebenenbüschel zweiter Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

2. Der Durchschnitt zweier Ebenenbüschel zweiter Stufe und eines Ebenenbüschels erster Stufe, von denen die ersten beiden untereinander projectivisch sind, der letzte aber aus ihnen durch Projection ableitbar ist, bildet eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

3. Der Durchschnitt eines Ebenenbüschels zweiter Stufe und zweier aus ihm durch Projectivität ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

4. Der Durchschnitt dreier aus einem Ebenenbüschel zweiter Stufe durch Projection ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

Hierzu füge ich sogleich den aus der Formel (2.) ableitbaren Satz, welcher sich aus ihr genau auf die entsprechende Weise ergibt.

5. Der Durchschnitt dreier aus einer punctirten Ebene durch Projection ableitbarer Ebenenbüschel erster Stufe ist eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

Endlich lassen sich alle diese Fälle in dem folgenden Satze zusammenfassen.

6. Der Durchschnitt dreier aus einem Gebilde zweiter Stufe durch Projection ableitbarer Ebenenbüschel ist eine *Oberfläche dritter Ordnung*.

Zu der speciellen Discussion der Sätze Nr. 2 bis 5 würde eine Entwicklung der projectivischen Beziehungen zwischen Gebilden zweiter und erster Stufe, und zwischen Gebilden erster Stufe, die aus demselben Gebilde zweiter Stufe entspringen, nothwendig sein. Diese Beziehungen sind indessen von so eigenthümlicher Art, daß ihre, auch nur nothdürftige Entwicklung einen bedeutenden Umfang haben würde. Nur beispielsweise will ich hier eine der einfacheren Beziehungen ohne Beweis aufstellen:

„Aus einem beliebigen Verein von fünf verschiedenen Puncten (a, b, c, ∂, e) einer Ebene (α), von denen jedoch keine 4 in gerader Linie liegen, läßt sich ein beliebiger Verein von 5 verschiedenen Puncten ($a_1, b_1, c_1, \partial_1, e_1$) einer Geraden A_1 durch fortschreitende Projection ableiten; vorausgesetzt jedoch, daß keine 4 Puncte des letzten Vereins mit den 4 Strahlen projectivisch sind, welche von den 4 entsprechenden Puncten des ersten Vereins nach dem fünften Puncte desselben gezogen werden. Alsdann ist zu jedem sechsten Punct der Ebene der entsprechende Punct der Geraden bestimmt. Wenn hingegen 4 Puncte der Geraden, (z. B. $a_1, b_1, c_1, \partial_1$) mit den 4 Strahlen ($ae, be, ce, \partial e$) projectivisch sind, welche von den entsprechenden Puncten (a, b, c, ∂) nach dem fünften Punct (e) der Ebene gezogen sind, so hängt die projectivische Beziehung zwischen jener Geraden und dieser Ebene von dem durch 5 Puncte (a, b, c, ∂, e) der Ebene gelegten Kegelschnitt in folgender Weise ab: Ist der von irgend einem sechsten Punct (g) des Kegelschnitts nach den 5 Puncten (a, b, c, ∂, e) gezogene Strahlenbüschel zu der gegebenen Geraden *nicht* projectivisch, so kann dieselbe aus jener Ebene *nicht* durch Projection abgeleitet werden: findet dagegen jene Projectivität Statt, so ist die projectivische Beziehung zwischen der Ebene und der Geraden *nicht* bestimmt, sondern man kann dann zu jedem beliebigen sechsten Punct (f) der Ebene, der jedoch nicht in dem Kegelschnitt liegt, den entsprechenden Punct f_1 der Geraden noch willkürlich annehmen, so daß noch immer die Gerade aus der Ebene durch fortschreitende Projection erfolgt.

Dieser Satz entspricht dem bekannten Satze, „daß man in zwei Geraden drei Paare von Puncten beliebig annehmen und dann die Geraden projectivisch setzen kann, so daß jene Punctenpaare entsprechende Elementenpaare werden.“ Und schon aus diesem Satze, welcher für die gegenseitige Beziehung *dreier* aus *einem* Gebilde zweiter Stufe ableitbaren Gebilde erster Stufe noch bei weitem zusammengesetzter sich gestaltet, sieht man, daß zu der weitem Behandlung des hier berührten Gegenstandes ein umfangreicherer Apparat nöthig ist; weshalb ich diesen Gegenstand für eine andere Gelegenheit vorbehalte.

Stettin, im Juli 1852.