Sulle condizioni per la decomposizione di una forma cubica ternaria in tre fattori lineari.

(*Nota del prof.* F. Brioschi, *a Milano.*)

1.° È noto che se una cubica ternaria è decomponibile in tre fattori lineari la stessa proprietà ha luogo per l'hessiano di essa, il quale eguaglia il prodotto di quei tre fattori lineari per un coefficiente costante.

Il sig. Salmon nel suo eccellente libro: *A treatise on the higher plane curves*, (2.ª Edizione, pag. 190) considerando questo caso, osserva che per la suddetta proprietà dell'hessiano devono i coefficienti delle varie potenze e prodotti delle variabili di esso essere proporzionali ai corrispondenti coefficienti della forma data; ottenendosi così un sistema di quarantacinque equazioni, che in realtà deve potersi ridurre ad uno composto di sole tre equazioni.

Scopo di questa Nota è di completare in questa parte le ricerche del signor Salmon col determinare effettivamente le tre equazioni, condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di una forma cubica ternaria in tre fattori lineari.

Supporremo la forma cubica ternaria posta sotto la forma:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 - 3ux_3 + 2v$$

nella quale u, v sono due forme binarie in x_1, x_2 quadratica la prima, cubica la seconda.

Assumendo le notazioni o denominazioni delle Note 1ª e 3ª da me aggiunte alla Memoria di Clebsch: *Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperellittiche* (Vedi Annali di Matematica, t. VII, pag. 123, 132) si ha che l'hessiano della forma F è:

$$H = Ax_3^3 - 2px_3^2 + (Au + 2\tau)x_3 + 2(Av - pu)$$

essendo:

$$A = \tfrac{1}{2}(uu)^2, \qquad \tau = (v\tau)^2, \qquad p = (uv)^2.$$

Ora se F è decomponibile in tre fattori lineari, si ha identicamente:

$$H = \mu F \tag{1}$$

essendo μ un coefficiente costante; e quindi dal confronto dei coefficienti delle medesime potenze di x_3 si avranno le relazioni:

$$A = \mu, \qquad p = 0, \qquad Au + 2\tau = -3\mu u, \qquad Av - pu = 2\mu v.$$

La prima e la seconda di queste rendono l'ultima una identità, e trasformano la terza nella:

$$2Au + \tau = 0. \tag{2}$$

Le condizioni quindi per la sussistenza della equazione (1) sarebbero quest'ultima e la $p = 0$, ma osservando essere in generale $(\tau v)^2 = 0$, riesce evidente che la $p = 0$ non è che una conseguenza della (2), e quindi che la condizione richiesta è l'annullarsi identicamente della espressione di secondo ordine $2Au + \tau$. Si hanno cioè effettivamente tre condizioni le quali risultano dall'eguagliare a zero i coefficienti del primo membro della equazione (2).

Se non che possiamo a queste tre condizioni sostituirne altre più opportune. Infatti essendo $2Au + \tau = 0$ si hanno tosto per gli invarianti:

$$B = \tfrac{1}{2}(u\tau)^2 \qquad C = \tfrac{1}{2}(\tau\tau)^2$$

i valori:

$$B = -2A^2, \qquad C = 4A^3$$

ed essendo $p = 0$ si ha l'invariante $E = (up)^2 = 0$.

Possiamo così enunciare il seguente teorema:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma cubica ternaria generale:

$$F = x_3^3 - 3ux_3 + 2v$$

sia il prodotto di tre fattori lineari, sono le tre seguenti:

$$B = -2A^2, \qquad C = 4A^3, \qquad E = 0$$

essendo A, B, C, E invarianti simultanei delle forme u, v.

2.° Pei valori superiori degli invarianti B, C, E, le espressioni degli invarianti s, t della forma cubica F, cioè:

$$s = 4(A^2 - 4B), \qquad t = -8(A^3 + 10AB - 2C - 4E)$$

diventano:

$$s = 2^2 \cdot 3^2 \cdot A^2, \qquad t = 2^3 \cdot 3^3 \cdot A^3$$

e quindi sarà nullo il discriminante della medesima. Da queste ultime si ha evidentemente

$$A = \frac{s^2}{6t} = \frac{t}{6s}$$

e quindi essendo $\mu = A$, per la (1) si avranno le:

$$s^2 F - 6tH = 0, \qquad tF - 6sH = 0 \text{ (*)}.$$

Rammentando inoltre che pel covariante $\omega = (v\tau)$ si ha in generale:

$$\omega^2 = -\tfrac{1}{2}[2Cv^2 + \tau^3]$$

si avrà per le $2Au + \tau = 0$, $C = 4A^3$ la:

$$\omega^2 = C(u^3 - v^2)$$

dalla quale:

$$u^3 = \left[v + \frac{\omega}{\sqrt{-C}}\right]\left[v - \frac{\omega}{\sqrt{-C}}\right].$$

Vogliamo ora dimostrare che i fattori del secondo membro di quest'ultima equazione od in generale la espressione:

$$\phi = v \pm \frac{\omega}{\sqrt{-C}}$$

è il cubo di una funzione lineare delle x_1, x_2. Infatti formando l'hessiano della forma ϕ si ottiene:

$$(\phi\phi)^2 = (vv)^2 \pm \frac{2}{\sqrt{-C}}(\omega v)^2 - \frac{1}{C}(\omega\omega)^2;$$

(*) È noto che essendo $f(x_1, x_2)$ una forma binaria biquadratica, se essa è eguale al quadrato di una forma del secondo ordine, indicando con h l'hessiano della medesima, si ha, analogamente all'equazione (1) superiore, $h = \mu f$, essendo μ costante. (Vedi Annali di Matematica, pag. 127, Tomo VII.) Se quindi si fanno coesistere insieme le equazioni di una ternaria biquadratica o di una curva del quarto ordine e quella di una retta; oppure le equazioni di una quaternaria cubica o di una superficie del terzo ordine e quella di un piano; e si suppone che le forme risultanti (binaria nel primo caso, ternaria nel secondo), abbiano la proprietà analitica qui considerata, per le quali in amendue i casi l'hessiano è proporzionale alla forma stessa, si avrà che questa condizione o le altre che se ne deducono sono le condizioni perchè la retta, nel primo caso, sia tangente doppia della curva del quarto ordine, ed il piano nel secondo sia piano tritangente alla superficie. Da questa prima analogia altre ne derivano assai importanti che formeranno argomento di uno speciale lavoro.

ed essendo in generale:

$$(\omega v)^2 = 0, \qquad (\omega\omega)^2 = C\tau$$

si avrà $(\phi\phi)^2 = 0$, come si è annunciato. Ciò posto indicando con l, m le espressioni:

$$l = \sqrt[3]{v + \frac{\omega}{\sqrt{-C}}}, \qquad m = \sqrt[3]{v - \frac{\omega}{\sqrt{-C}}}$$

si hanno le:

$$lm = u, \qquad l^3 + m^3 = 2v$$

e la espressione della cubica ternaria F può scriversi:

$$F = x_3^3 - 3lmx_3 + l^3 + m^3$$

ossia:

$$F = (x_3 + l + m)(x_3 + e^2 l + em)(x_3 + el + e^2 m)$$

nella quale e è una radice cubica immaginaria dell'unità. Così si è anche ottenuta la decomposizione della forma cubica ternaria nei suoi fattori lineari.

Possiamo infine per le cose sovraesposte enunciare il seguente teorema:

Sia v una forma binaria del terzo ordine, $\tau = (vv)^2$ il suo hessiano, $C = \frac{1}{2}(\tau\tau)^2$ il suo discriminante; la espressione più generale di una forma cubica ternaria decomponibile in tre fattori lineari è la seguente:

$$F = x_3^3 + 3\frac{\tau}{\sqrt[3]{2C}}x_3 + 2v.$$