ÜBER EINIGE FÜR PRIMZAHLEN CHARAKTERISTISCHE BEZIEHUNGEN

VON

JACOB HACKS
in CREFELD.

Es seien m und n zwei beliebige positive ganze Zahlen. $[x]$ sei die grösste in x enthaltene ganze Zahl. Stellt man dann die Gleichungen auf

$$m = \left[\frac{m}{n}\right]n + r_1,$$

$$2m = \left[\frac{2m}{n}\right]n + r_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)m = \left[\frac{(n-1)m}{n}\right]n + r_{n-1}$$

und addirt, so kommt

$$(1) \qquad \frac{mn(n-1)}{2} = n\sum_{s=1}^{s=n-1}\left[\frac{sm}{n}\right] + \sum_{s=1}^{s=n-1} r_s.$$

Bezeichnet man jetzt mit δ den grössten gemeinschaftlichen Teiler von m und n und setzt $m = m'\delta$, $n = n'\delta$, so dass m' und n' relative Primzahlen sind, so ergibt sich leicht

$$(2) \qquad \sum_1^{n-1} r_s = \delta\frac{n'(n'-1)}{2}\delta = \frac{n(n-\delta)}{2}.$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so folgt

$$(3) \qquad \sum_1^{n-1}\left[\frac{sm}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{\delta-1}{2}.$$

Sind m und n relativ prim zu einander, so wird $\delta = 1$ und

$$(4) \qquad \sum_{1}^{n-1} \left[\frac{sm}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Bezeichnet jetzt p eine Primzahl, so ist p relativ prim zu $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Setzt man also in (4) $n = p$ und für m der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots, p-1$, so entstehen die Gleichungen

$$\sum_{1}^{p-1} \left[\frac{s}{p}\right] = 0 \cdot \frac{p-1}{2},$$

$$\sum_{1}^{p-1} \left[\frac{2s}{p}\right] = 1 \cdot \frac{p-1}{2},$$

$$\sum_{1}^{p-1} \left[\frac{3s}{p}\right] = 2 \cdot \frac{p-1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{1}^{p-1} \left[\frac{(p-1)s}{p}\right] = (p-2)\frac{p-1}{2};$$

durch deren Addition man die Beziehung erhält

$$(5) \qquad \sum_{y=1}^{y=p-1} \sum_{s=1}^{s=p-1} \left[\frac{ys}{p}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p-2),$$

welche ohne Anwendung von Summenzeichen folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{p}\right] + \left[\frac{3}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{p-1}{p}\right] \\
&+ \left[\frac{2}{p}\right] + \left[\frac{4}{p}\right] + \left[\frac{6}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{2(p-1)}{p}\right] \\
&+ \left[\frac{3}{p}\right] + \left[\frac{6}{p}\right] + \left[\frac{9}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{3(p-1)}{p}\right] \\
&+ \cdots \\
&+ \left[\frac{p-1}{p}\right] + \left[\frac{2(p-1)}{p}\right] + \left[\frac{3(p-1)}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)(p-1)}{p}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p-2).
\end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt nur für Primzahlen, wie sich leicht aus dem Umstande ergibt, dass nur eine Primzahl p die Eigenschaft hat, relativ prim zu den Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ zu sein. *Die Gleichung* (5) *ist also für Primzahlen charakteristisch.*

Setzt man in (4) $m = p$ und n der Reihe nach gleich $1, 2, 3, \ldots, p-1$, so erhält man in derselben Weise die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + \left[\frac{p}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{p}{p-1}\right] \\
& \quad + \left[\frac{2p}{3}\right] + \left[\frac{2p}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{2p}{p-1}\right] \\
& \qquad + \left[\frac{3p}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{3p}{p-1}\right] \\
& \qquad\qquad + \cdots \\
& \qquad\qquad\quad + \left[\frac{(p-2)p}{p-1}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p-2),
\end{aligned}
$$

welche ebenfalls für eine Primzahl p charakteristisch ist.

Eine ähnliche Gleichung erhält man aus der bekannten für zwei beliebige positive relative Primzahlen m und n gültigen Beziehung

$$
\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{ms}{n}\right] + \sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{ns}{m}\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]
$$

(Gauss' Werke, Band 2, S. 9), indem man n gleich einer ungeraden Primzahl p und für m der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, \ldots, p-1$ setzt:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{s}{p}\right] + \sum_{1}^{0} \left[\frac{ps}{1}\right] = 0 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
& \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{2s}{p}\right] + \sum_{1}^{1} \left[\frac{ps}{2}\right] = 1 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
& \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{3s}{p}\right] + \sum_{1}^{1} \left[\frac{ps}{3}\right] = 1 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
& \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{4s}{p}\right] + \sum_{1}^{2} \left[\frac{ps}{4}\right] = 2 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
& \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{5s}{p}\right] + \sum_{1}^{2} \left[\frac{ps}{5}\right] = 2 \cdot \frac{p-1}{2}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{(p-1)s}{p}\right] + \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ps}{p-1}\right] = \frac{p-1}{2}\frac{p-1}{2}.
\end{aligned}
$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$(7)\qquad \sum_{y=1}^{y=p-1}\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}}\left[\frac{ys}{p}\right]+\sum_{y=1}^{y=p-1}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{y}{2}\right]}\left[\frac{ps}{y}\right]=\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Auch diese Gleichung ist für eine Primzahl p charakteristisch, wie sich daraus ergibt, dass für zwei beliebige positive ganze Zahlen m und n mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler δ die Beziehung besteht

$$(8)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{ms}{n}\right]+\sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{ns}{m}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{\delta}{2}\right]$$

(cf. Acta mathematica, Band 10, S. 34).

Die Gleichungen (5), (6) und (7) haben die Eigenschaft, dass sie ausser p nur bestimmte Zahlen enthalten.

Für den grössten gemeinschaftlichen Teiler δ zweier Zahlen m und n ergeben sich aus (2), (3) und (8) bezw. folgende Ausdrücke:

$$\delta=\frac{n^2-2\sum_{1}^{n-1}r_s}{n};$$

$$\delta=2\sum_{1}^{n-1}\left[\frac{sm}{n}\right]-mn+m+n;$$

$$\delta=2\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{sm}{n}\right]+2\sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{sn}{m}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]$$

oder

$$\delta=2\sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{sm}{n}\right]+2\sum_{1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left[\frac{sn}{m}\right]-2\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]+1,$$

je nachdem die Zahlen m und n beide gerade, oder wenigstens eine von ihnen ungerade ist.