Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen.

Von

GEORG FABER in Würzburg.

Die Methoden, die bisher zur Abzählung der rationalen Zahlen angegeben wurden, verfolgen, soweit mir bekannt, lediglich den Zweck, die *Möglichkeit* der Abzählung darzutun, versagen jedoch samt und sonders infolge der Notwendigkeit nicht zu bewältigender Rechnungen, sobald es sich um die Aufgabe handelt, diejenige ganze Zahl *wirklich anzugeben*, die einem Bruche mit einigermaßen großem Zähler oder Nenner zugeordnet ist oder sobald umgekehrt der einer vorgelegten größeren ganzen Zahl zugeordnete Bruch gesucht ist. Im folgenden will ich für die rationalen Zahlen zwischen Null und 1 eine Abzählungsmethode (als Typus unendlich vieler) angeben, welche die genannten Aufgaben mit geringerem Aufwand von Rechnung auszuführen erlaubt; die so erhaltene gegenseitige Zuordnung der ganzen und der rationalen Zahlen zeigt dann auch die merkwürdige Eigenschaft, daß sie durch *Formeln* zur arithmetischen Evidenz gebracht werden kann. Es wird sich nämlich eine mehrfach unendliche trigonometrische Reihe $y = F(x)$ ergeben, die für jedes *irrationale* x *divergiert* und für irgend ein *rationales* x nach einem *ganzzahligen* Grenzwerte y *konvergiert*; umgekehrt wird sich durch Auflösung dieser Formel eine andre ähnlich gebaute $x = \Phi(y)$ ergeben, die für irgend ein *ganzzahliges* y nach einem positiven *rationalen* Grenzwerte $x\,(< 1)$ konvergiert.

Die echten Brüche mit *endlicher* Dezimalbruchentwickelung lassen sich am einfachsten in der Weise abzählen, daß dem Bruche

$$r = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \qquad (0 \leqq a_i \leqq 9;\ a_n > 0),$$

der als Dezimalbruch geschrieben $0, a_1 a_2 \cdots a_n$ lautet, die ganze Zahl $a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10 + a_1$ oder in dezimaler Schreibart $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ zugeordnet wird, und umgekehrt.

Zu einer analogen Abzählung *sämtlicher* echten Brüche gelangt man unter Zugrundelegung einer die systematischen Brüche verallgemeinernden Reihendarstellung, in welcher die rationalen Zahlen durch endliche Entwickelungen charakterisiert sind; derartige Darstellungen sind zuerst von Herrn G. Cantor betrachtet worden.*)

Man denke sich die Strecke $\overline{01}$ in e_1 gleiche Teile je von der Größe $\frac{1}{e_1}$ geteilt; jede Zahl x, die, wo nicht anders bemerkt, positiv und < 1 gedacht werde, liegt dann in einem der so entstehenden Intervalle, es ist also

$$x = \frac{a_1}{e_1} + \frac{x_1}{e_1}, \tag{1}$$

wo $0 \leqq a_1 < e_1$ und $x_1 < 1$ ist. Ebenso kann x_1 in der Form

$$x_1 = \frac{a_2}{e_2} + \frac{x_2}{e_2} \qquad (0 \leqq a_2 < e_2;\ x_2 < 1) \tag{2}$$

dargestellt werden, wo e_2 wieder eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die von e_1 verschieden sein darf. Setzt man diesen Wert von x_1 in (1) ein, so findet man

$$x = \frac{a_1}{e_1} + \frac{a_2}{e_1 \cdot e_2} + \frac{x_2}{e_1 \cdot e_2} \tag{3}$$

und so fortschließend die Reihe

$$x = \sum_1^n {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} + \frac{x_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n}, \tag{4}$$

und schließlich, da

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} \leqq \lim_{n=\infty} \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} = 0$$

ist:

$$x = \sum_1^\infty {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \qquad (0 \leqq a_i < e_i). \tag{5}$$

Ergibt sich für x die *endliche* Entwickelung

$$x = \sum_1^n {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}, \tag{6}$$

*) Z. f. Math. 14 (1869) p. 124. Die Begründung des Herrn Cantor, der übrigens nur *unendliche* den unendlichen Dezimalbrüchen mit der Periode 9 entsprechende Entwickelungen betrachtet, ist eine andre als die hier gegebene; insbesondre gibt Herr Cantor für die Koeffizienten a_ν (in (5)) nur Ungleichungen, welche die *rekurrente* Berechnung der a_ν ermöglichen, während im Text *independente* Formeln (vgl. (22) u. (26)) aufgestellt werden.

so läßt sich an deren Stelle auch die unendliche

$$x = \sum_{1}^{n-1} {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} + \frac{a_n - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} + \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{e_i - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \tag{7}$$

schreiben vermöge der Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_2 \cdot e_2 \cdots e_n} &= \frac{e_{n+1} - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+1}} + \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+1}} = \frac{e_{n+1} - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+1}} + \frac{e_{n+2} - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+2}} \\ &\qquad + \frac{1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n+2}} \\ &= \cdots \\ &= \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{e_i - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i}. \end{aligned} \tag{8}$$

Abgesehen von der soeben erwähnten Möglichkeit einer doppelten Entwickelung läßt sich jede Zahl x zwischen Null und 1 nur auf *eine* Weise durch eine Reihe der Form (5) darstellen; angenommen nämlich es bestehen gleichzeitig die Beziehungen

$$x = \sum_{1}^{\infty} {}_i \frac{a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \qquad (0 \leqq a_i < e_i) \tag{5}$$

und

$$x = \sum_{0}^{\infty} {}_i \frac{a_i'}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \qquad (0 \leqq a_i' < e_i) \tag{9}$$

und es sei $a_i = a_i'$ für $i < n$, dagegen $a_n > a_n'$, dann folgt durch Subtraktion der Gleichungen (9) und (5):

$$0 = \sum_{n}^{\infty} {}_i \frac{a_i' - a_i}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \tag{10}$$

und

$$\frac{a_n - a_n'}{e_1 \cdots e_n} \leqq \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{|a_i' - a_i|}{e_1 \; e_2 \cdots e_i}, \tag{11}$$

umsomehr

$$\frac{1}{e_1 \cdots e_n} \leqq \sum_{n+1}^{\infty} {}_i \frac{e_i - 1}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_i} \tag{12}$$

(weil sowohl a_i als $a_i' < e_i$ ist).

In (12) kann das Gleichheitszeichen *nur dann* zu stande kommen, *wenn*

$$a_n - a_n' = 1; \quad a_i' = e_i - 1; \quad a_i = 0 \text{ ist für } i > n. \tag{13}$$

Da andrerseits, wie die Identität (8) lehrt, in (12) *stets* das Gleichheitszeichen gilt, so bestehen notwendig die Gleichungen (13) und man befindet sich in dem oben erwähnten durch die Gleichungen (6) und (7) charakterisierten Ausnahmefall.

Im folgenden soll, sobald für x eine *endliche* Entwickelung möglich ist, die ebenfalls mögliche *unendliche* Entwickelung und somit jede Zweiwertigkeit der Koeffizienten a_i *ausgeschlossen* werden.

Durch besondre Wahl der e_i läßt sich leicht erreichen, daß *jede* rationale Zahl eine endliche Entwickelung zuläßt; die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist, daß, wenn q irgend eine ganze Zahl ist, das Produkt $e_1 e_2 \cdots e_n$ von einem bestimmten Index n ab durch q teilbar wird.

Die Bedingung ist *notwendig;* denn damit der als irreduzibel vorausgesetzte Bruch $\frac{p}{q}$ die endliche Entwickelung

$$\frac{p}{q} = \sum_{1}^{m}{}_i \frac{a_i}{e_1 e_2 \cdots e_i} = \frac{a_1 \cdot e_2 e_3 \cdots e_m + a_2 e_3 \cdots e_m + \cdots + a_{m-1} e_m + a_m}{e_1 e_2 \cdots e_m}$$

zuläßt, muß q ein Teiler von $e_1 e_2 \cdots e_m$ sein.

Die Bedingung ist aber auch *hinreichend*, denn ist

$$e_1 e_2 \cdots e_n = q \cdot r,$$

so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{l}{e_1 e_2 \cdots e_n} \qquad (\text{wo } l = p \cdot r);$$

nun sei

$$l = l_1 e_n + a_n \qquad (0 \leqq a_n \leqq e_n - 1),$$

dann ist

$$\frac{p}{q} = \frac{l_1}{e_1 e_2 \cdot e \cdot e_{n-1}} + \frac{a_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n};$$

ferner sei

$$l_1 = l_2 e_{n-1} + a_{n-1}, \qquad (0 \leqq a_{n-1} \leqq e_{n-1} - 1),$$

also

$$\frac{p}{q} = \frac{l_2}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n-2}} + \frac{a_{n-1}}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_{n-1}} + \frac{a_n}{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n};$$

durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man, vom letzten angefangen, sämtliche Koeffizienten a_i.

Am einfachsten ist es $e_i = i + 1$ zu setzen; man hat demnach für jede rationale Zahl x zwischen 0 und 1 eine einzige Darstellung der Form*):

(14) $$x = \sum_{2}^{n_x}{}_\nu \frac{a_{\nu-1}}{\nu!} \qquad (0 \leqq a_\nu < \nu).$$

Andrerseits läßt sich jede ganze Zahl y auf *eine* Weise in der Form:

(15) $$y = b_1 + b_2 \cdot e_1 + b_3 \cdot e_1 \cdot e_2 + \cdots + b_m \cdot e_1 \cdot e_2 \cdots e_{m-1} \qquad (0 \leqq b_i < e_i)$$

*) Auch von Cyparissos Stéphanos angegeben: Bull. de la Soc. Math. de France 8 (1879) p. 81.

darstellen. Ist nämlich y eine beliebige gegebene ganze Zahl, so findet man die Koeffizienten $b_1, b_2, \cdots$ successive durch die Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
y &= b_1 + e_1 y_1 && (0 \leqq b_1 < e_1),\\
y_1 &= b_2 + e_2 y_2 && (0 \leqq b_2 < e_2),\\
&\cdots\cdots\\
y_{i-1} &= b_i + e_i y_i && (0 \leqq b_i < e_i).\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Wegen der Endlichkeit von y muß y_i, sobald i eine gewisse Zahl m erreicht, verschwinden; durch Einsetzen der Werte von $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ in die erste der Gleichungen (16) ergibt sich dann eine Reihe der Form (15) für y; eine zweite derartige Darstellung ist aber nicht möglich, da man umgekehrt, von der Summe auf der rechten Seite in (15) ausgehend, das Bestehen der die b_i eindeutig bestimmenden Gleichungen (16) als notwendig erkennt.

Speziell werde wieder $e_i = i + 1$ gesetzt.

Die Abzählung der rationalen Zahlen wird nun in der Weise vorgenommen, daß die rationale Zahl

$$x = \frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+1)!} \tag{17}$$

und die ganze Zahl

$$y = b_1 + b_2 \cdot 2! + b_3 \cdot 3! + \cdots + b_m \cdot m! \tag{18}$$

einander zugeordnet werden, wenn

$$m = n \quad \textit{und} \quad a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n \tag{19}$$

ist.

Die Zuordnung ist nach dem zuvor Bewiesenen eine umkehrbar eindeutige.

Beispiele: Nach einer durch zweckmäßige Anordnung abzukürzenden Rechnung von einigen Minuten findet man als Nummer der rationalen Zahl

$$
\begin{aligned}
x = \frac{999}{1000} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \frac{5}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{7}{8!} + \frac{6}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{2}{11!} + \frac{2}{12!}\\
+ \frac{5}{13!} + \frac{2}{14!} + \frac{12}{15!}
\end{aligned}
$$

die ganze Zahl

$$
\begin{aligned}
y = 1 + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! + 5\cdot 5! + 1\cdot 6! + 7\cdot 7! + 6\cdot 8! + 1\cdot 9! + 2\cdot 10!\\
+ 2\cdot 11! + 5\cdot 12! + 2\cdot 13! + 12\cdot 14! = 1\,061\,076\,276\,719;
\end{aligned}
$$

desgleichen ergibt sich die der ganzen Zahl

$$y = 999000 = 3\cdot 5! + 1\cdot 6! + 6\cdot 7! + 6\cdot 8! + 2\cdot 9!$$

zugeordnete rationale

$$x = \frac{3}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{6}{8!} + \frac{6}{9!} + \frac{2}{10!} = \frac{8221}{1\,814\,400}.$$

Es handelt sich zum Schlusse noch darum, explizite Ausdrücke für die a_ν als Funktionen von x und für die b_ν als Funktionen von y aufzustellen.

Aus (17) folgt:

$$\mu!\cdot x = a_1\cdot 3\cdot 4\cdots\mu + a_2\cdot 4\cdot 5\cdots\mu + \cdots + a_{\mu-2}\cdot\mu + a_{\mu-1} + R_\mu; \tag{20}$$

hier ist

$$R_\mu = \frac{a_\mu}{\mu+1} + \frac{a_{\mu+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \cdots + \frac{a_n}{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(n+1)}$$
$$< \mu!\sum_{\mu+1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\nu!} = 1 \quad (\text{s. } (8)),$$

so daß also, wenn $[v]$ die größte in v enthaltene ganze Zahl bedeutet,

$$[\mu!\,x] = a_1\cdot 3\cdot 4\cdots\mu + a_2\cdot 4\cdot 5\cdots\mu + \cdots + a_{\mu-2}\cdot\mu + a_{\mu-1} \tag{21}$$

wird; hieraus ergibt sich sofort:

$$a_\mu(x) = [(\mu+1)!\,x] - (\mu+1)\,[\mu!\,x], \tag{22}$$

wo nun auf der linken Seite die Abhängigkeit des Koeffizienten a_μ von der darzustellenden Zahl x auch äußerlich angedeutet ist.

Gleichung (22) gilt ihrer Ableitung nach ebenso gut für irrationale als für rationale x; da die letzteren dadurch ausgezeichnet sind, daß die a_μ von einem gewissen Index ab beständig gleich Null werden, so ergibt sich hier nebenbei das übrigens auch ohne weiteres einleuchtende, durch einfache Formulierung mehr als durch große Anwendbarkeit ausgezeichnete *Irrationalitätskriterium:*

$$\overline{\lim_{\mu=\infty}}\;[\mu!\,x] - \mu[(\mu-1)!\,x]\begin{cases} = 0 \text{ für rationale } x,\\ > 0 \text{ für irrationale } x.\end{cases} \tag{23}$$

Um eine der Formel (22) entsprechende für $b_\mu(y)$ zu finden, gehe man aus von der Formel

$$\frac{y}{\mu!} = \frac{b_1}{2\cdot 3\cdots\mu!} + \frac{b_2}{3\cdot 4\cdots\mu} + \cdots + \frac{b_{\mu-1}}{b_\mu} + b_\mu + b_{\mu+1}\cdot(\mu+1) + \cdots$$
$$+ b_m\cdot(\mu+1)(\mu+2)\cdots m; \tag{24}$$

hier ist die Summe der $(\mu-1)$ Brüche auf der rechten Seite höchstens gleich

$$\frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots(\mu-1)(\mu-1)!}{\mu!} = 1 - \frac{1}{\mu!} < 1,$$

so daß

$$(25)\qquad \left[\frac{y}{\mu!}\right] = b_\mu + b_{\mu+1}(\mu+1) + \cdots + b_m(\mu+1)(\mu+2)\cdots m$$

ist, und daraus folgt unmittelbar:

$$(26)\qquad b_\mu = \left[\frac{y}{\mu!}\right] - (\mu+1)\left[\frac{y}{(\mu+1)!}\right].$$

Für die hier mehrfach angewandte Funktion $[v]$ hat man folgende Formel:*)

$$(27)\qquad [v] = v + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\pi v}{k} - \frac{8}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\pi v}{2k-1}\right\}^2,$$

mit deren Benutzung man findet

$$(28)\qquad a_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k(\nu+1)!\,\pi x}{k} - \frac{8}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)(\nu+1)!\,\pi x}{2k-1}\right\}^2$$
$$- \frac{\nu+1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\nu!\,\pi x}{k} + \frac{8(\nu+1)}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\nu!\,\pi x}{2k-1}\right\}^2,$$

$$(29)\qquad b_\nu(y) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\pi\frac{y}{\nu!}}{k} - \frac{8}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\pi\frac{y}{\nu!}}{2k-1}\right\}^2$$
$$- \frac{\nu+1}{\pi}\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin 2k\pi\frac{y}{(\nu+1)!}}{k} + \frac{8(\nu+1)}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty{}_k \frac{\sin(2k-1)\pi\frac{y}{(\nu+1)!}}{2k-1}\right\}^2.$$

Diese Ausdrücke für $a_\nu(x)$ und $b_\nu(y)$ denke man sich in die folgenden Reihen eingesetzt:

$$(30)\qquad y = F(x) = \sum_1^\infty{}_\nu\, a_\nu(x)\cdot \nu!,$$

$$(31)\qquad x = \Phi(y) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{b_\nu(y)}{(\nu+1)!}.$$

Für *rationales* x ist die Reihe auf der rechten Seite von (30) eine *endliche* (da ja dann die a_ν schließlich verschwinden); ihr Wert ist die dem x durch die angegebene Abzählung zugeordnete natürliche Zahl y; für *irrationales* x *divergiert* die Reihe (30), da schon ihre einzelnen Glieder ins unendliche wachsen.

*) S. Pringsheim, Math. Ann. 26 (1886) p. 195.

In gleicher Weise bricht die Reihe auf der rechten Seite von (31) für *ganzzahliges* y ab und konvergiert so nach derjenigen rationalen Zahl x, deren Nummer y ist. Definiert man $b_\nu(y)$ für *nicht ganzzahlige* y durch (26) oder durch die damit identische Reihe (29), so ersieht man leicht, daß $b_\nu(y) = b_\nu([y])$ wird; es erscheint also durch (31) die rationale Zahl $x = \Phi(y)$ nicht nur einer bestimmten ganzen Zahl y, sondern dem ganzen Intervalle von y bis $y + 1$ zugeordnet.

Traunstein, im April 1904.