

SULL'INTEGRAZIONE DELLA Δ_2 IN UN CAMPO CHIUSO E CONVESSO.

Nota di **Luciano Orlando** (Roma).

Adunanza dell'8 aprile 1906.

Il campo S che noi vogliamo studiare abbia due dimensioni, ma le cose che diciamo valgono, con opportuni adattamenti, anche per campi che abbiano più di due dimensioni. Noi supponiamo chiuso il campo S , e ne chiamiamo σ il contorno; poi ammettiamo che esista un numero fisso R , tale che un cerchio di raggio R , disposto in modo che sia tangente a σ , in un arbitrario punto di questo contorno, e dalla stessa parte di σ rispetto alla tangente comune, contenga sempre nel suo interno tutto il campo S . Rimangono, per esempio, fuori dal nostro studio i poligoni, limitati da tratti rettilinei, ed ogni campo del quale la linea che costituisce il contorno abbia almeno un punto di curvatura nulla.

Il problema che qui vogliamo risolvere consiste nella determinazione (in un arbitrario polo A_0 , di coordinate x_0, y_0 , scelto in S) di una funzione $u(x_0, y_0)$, regolare in ogni punto di S , quando si conoscano i valori di $\Delta_2 u$ in ogni punto di S , e in ogni punto di σ i valori della derivata normale $\frac{du}{dn}$; e poi si abbia il modo di stabilire un numero positivo fisso U , anche grandissimo, che non possa essere superato da alcun valore che $|u|$ assuma sopra σ .

È un problema abbastanza generale questo che noi vogliamo brevemente qui risolvere; ed è anche noto che non è sempre un problema possibile, per arbitrari valori di $\frac{du}{dn}$ e di $\Delta_2 u$.

Senza nuocere alla generalità del problema, noi possiamo sempre riferirci al caso nel quale sia $\Delta_2 u = 0$ in ogni punto di S . E allora se poniamo

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

assumendo dunque la grandezza r come misura della distanza fra il polo A_0 , di coordinate x_0, y_0 , e il punto arbitrario A , di coordinate x, y , noi possiamo scrivere la formula

$$2\pi u(x_0, y_0) = \int \left(u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} \right) d\sigma,$$

dove l'integrale in $d\sigma$ è applicato a elementi d'arco che intorniano il punto variabile A , ed è esteso a tutto il contorno σ .

Ma a questa formula noi possiamo subito sostituire, senza alterazione, quest'altra

$$(1) \quad 2\pi u(x_0, y_0) = C - \int \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} d\sigma + \int \left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2R} \right) u d\sigma,$$

dove C denota una grandezza costante. Notiamo che la presenza d'una costante addittiva nell'espressione di u non altera i valori di $\frac{du}{dn}$, nè quelli di $\Delta_2 u$.

La formula (1) rappresenta, rispetto alla funzione u , un'equazione integrale, che si lascia, in questo caso, molto facilmente e brevemente risolvere.

L'espressione

$$\int \left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2R} \right) u d\sigma$$

si presta ad un'importante limitazione di valore. Il termine

$$(2) \quad \left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2R} \right) d\sigma = \left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \frac{d \log \frac{1}{2R}}{d(-R)} \right) d\sigma$$

esprime la differenza fra due angoli visuali elementari, uno secondo il quale si vede l'elemento d'arco $d\sigma$ dal polo A_0 , e l'altro secondo il quale si vede l'elemento d'arco $d\sigma$ dal punto che, sul cerchio tangente, di raggio R , è diametralmente opposto a $d\sigma$; e, giacchè questo cerchio contiene sempre nel suo interno il polo A_0 , dovunque giaccia in S questo polo, così è chiaro che la differenza (2) è positiva sempre.

Ma vale, come è noto, la formula

$$\int \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 2\pi,$$

e, se indichiamo con σ anche il numero che misura la lunghezza del contorno σ , vale anche l'altra formula

$$\int \frac{1}{2R} d\sigma = \frac{\sigma}{2R};$$

dunque, se ci ricordiamo che U rappresenta un numero fisso, il quale non può essere superato dai valori che $|u|$ assume sul contorno σ , e se fissiamo opportunamente un numero α , positivo e < 1 , noi possiamo scrivere

$$\left| \int \left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2R} \right) u d\sigma \right| = 2\pi U \alpha.$$

Ora è facile vedere come si può risolvere l'equazione integrale (1). Se poniamo

$$2\pi(u + \varepsilon_1) = C - \int \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} d\sigma,$$

noi determiniamo u con un errore ε_1 , tale che sia $|\varepsilon_1| < U\alpha$; poi, se poniamo

$$2\pi(u + \varepsilon_2) = C - \int \log \frac{1}{r} \frac{du}{dn} d\sigma + \int \left(\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{2R} \right) (u + \varepsilon_1) d\sigma,$$

determiniamo u con un errore ε_2 , tale che sia $|\varepsilon_2| < U\alpha^2$. Continuando, noi determiniamo $u(x_0, y_0)$, sempre meno inesattamente, con errori che tendono a zero.

Roma, 6 aprile 1906.

LUCIANO ORLANDO.