Über die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

(Aus einem Brief an Herrn L. Fejér.)

In unserer letzten gemeinsamen Arbeit[1]) haben wir u. a. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine Folge von unendlich vielen Zahlen die Fourierschen Koeffizienten einer *beschränkten* Funktion darstellen[2]). Vor kurzem habe ich nun die Bemerkung gemacht, daß man mit ähnlichen Mitteln die Bedingungen dafür aufstellen kann, daß die Folge (1) aus den Fourierschen Koeffizienten einer *nach Riemann* integrierbaren Funktion bestehe.

Dieses Resultat, das im ersten Augenblick etwas überrascht, weil ja die Fourierschen Koeffizienten einer Funktion mit Hilfe *Lebesguescher* Integrale berechnet werden müssen, folgt aus sehr einfachen Überlegungen, die ich Ihnen hier auseinandersetzen möchte.

Dabei werde ich die Terminologie und die Bezeichnungen meiner „Vorlesungen über reelle Funktionen" (Leipzig, Teubner, 1918) benutzen und dieses Buch im folgenden mit „V." zitieren.

1. Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $0 < x < 2\pi$ definierte, beschränkte, meßbare Funktion mit den Fourierschen Koeffizienten

$$(1) \qquad a_0,\ a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_2,\ \cdots.$$

Jede zu $f(x)$ „äquivalente" Funktion (V. § 359), d. h. jede Funktion $f_1(x)$, die nur höchstens in einer Nullmenge des gegebenen Intervalls von $f(x)$ verschieden ist, besitzt *dieselben* Fourierschen Koeffizienten wie $f(x)$

[1]) Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 218—239.

[2]) a. a. O. S. 226.

und es wird sich darum handeln, zu untersuchen, ob unter diesen Funktionen $f_1(x)$ solche existieren, die nach Riemann integrierbar sind.

Wir führen zu diesem Zweck folgende Definitionen ein: eine Funktion $\varphi(x)$ soll *Unterfunktion* von $f(x)$ genannt werden, falls die Punktmenge (V. § 85)

$$\boldsymbol{M}(\varphi > f)$$

eine Nullmenge ist; ebenso soll $\varphi(x)$ eine *Oberfunktion* von $f(x)$ genannt werden, falls die Punktmenge

$$\boldsymbol{M}(\varphi < f)$$

eine Nullmenge ist.

Aus diesen Definitionen entnimmt man unmittelbar eine Reihe von Eigenschaften der Unter- und Oberfunktionen, die ich in folgendem Satze zusammenfasse:

Satz 1. *Eine Funktion, die zugleich Unter- und Oberfunktion von $f(x)$ ist, ist dieser Funktion äquivalent.*

Ist $\varphi(x)$ Unterfunktion von $f(x)$, so ist $f(x)$ Oberfunktion von $\varphi(x)$.

Ist $\varphi(x)$ Unterfunktion von $f(x)$ und $\psi(x)$ Unterfunktion von $\varphi(x)$, so ist $\psi(x)$ auch Unterfunktion von $f(x)$.

Es seien $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... abzählbar unendlich viele Unterfunktionen von $f(x)$ und

$$\varphi(x) = \text{obere Grenze von } \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}.$$

Dann ist, wenn man

$$N_k = \boldsymbol{M}(f < \varphi_k)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots$$

setzt, die Punktmenge N als Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ebenfalls eine Nullmenge; außerdem hat man aber

$$\boldsymbol{M}(f < \varphi) \prec N$$

und hieraus folgt, daß $\varphi(x)$ eine Unterfunktion von $f(x)$ ist. Ganz ebenso ist der zweite Teil des folgenden Satzes zu beweisen.

Satz 2. *Die obere Grenze einer abzählbaren Folge von Unterfunktionen von $f(x)$ ist eine Unterfunktion von $f(x)$. Ebenso ist die untere Grenze einer abzählbaren Folge von Oberfunktionen eine Oberfunktion.*

2. Es seien $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ zwei beschränkte Funktionen, von denen die erste nach unten, die zweite nach oben halbstetig ist (V. § 127); ferner sei $\varphi(x)$ eine Unterfunktion von $\Phi(x)$. Wegen der Halbstetigkeit der gegebenen Funktionen folgt, daß $\varphi(x)$ die obere und $\Phi(x)$ die untere Grenze eine Folge von stetigen Funktionen ist (V. § 367). Es gibt also stetige Funktionen $\varphi_k(x)$, $\Phi_k(x)$, so daß die Gleichungen

$$(2) \qquad \varphi(x) = \text{obere Grenze von } \{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots\}$$

$$(3) \qquad \Phi(x) = \text{untere Grenze von } \{\Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \ldots\}$$

zugleich gelten. Ferner muß nach dem Satze 1 jede Funktion $\varphi_p(x)$ eine Unterfunktion einer jeden Funktion $\Phi_q(x)$ sein und dieses ist, wegen der Stetigkeit der Funktionen $\varphi_p(x)$ und $\Phi_q(x)$, dann und nur dann der Fall, wenn für jeden Wert von x

$$(4) \qquad \varphi_p(x) \leq \Phi_q(x)$$

ist. Es müßte nämlich sonst mindestens ein Intervall auf der x-Achse, d. h. eine Punktmenge von nicht verschwindendem Inhalte geben, in dem $\varphi_p(x) > \Phi_q(x)$ ist.

Aus (2), (3) und (4) folgt ferner, daß für jeden Wert von x

$$\varphi(x) \leq \Phi(x)$$

sein muß.

Die Eigenschaft von $\varphi(x)$, eine Unterfunktion von $\Phi(x)$ zu sein, ist aber vorhanden, wenn wir voraussetzen, daß $\varphi(x)$ eine Unter- und $\Phi(x)$ eine Oberfunktion von $f(x)$ ist und daher haben wir den

Satz 3. *Eine nach unten halbstetige Unterfunktion von $f(x)$ kann nirgends eine nach oben halbstetige Oberfunktion dieser Funktion übertreffen.*

3. Wir wollen jetzt zeigen, daß im Intervalle

$$I : 0 < x < 2\pi$$

eine *größte* nach unten halbstetige Unterfunktion von $f(x)$ existiert. Dazu betrachten wir die *abzählbar* unendlich vielen Teilintervalle $\delta_1, \delta_2, \ldots$ von I, deren Endpunkte *rationale* Abszissen besitzen. Jedem dieser Teilintervalle δ_k ordnen wir eine zweiwertige Funktion $\chi_k(x)$ zu, die in $(I - \delta_k)$ gleich der unteren Grenze g von $f(x)$ ist, und in δ_k ebenfalls konstant sein soll und den größten Wert annimmt, der sich mit der Bedingung verträgt, daß $\chi_k(x)$ eine Unterfunktion von $f(x)$ ist. Die Punktmengen $(I - \delta_k)$ sind relativ zu I abgeschlossen (V. § 74), woraus man entnimmt (V. § 136), daß die Funktionen $\chi_k(x)$ nach unten halbstetig sind.

Nun setze ich

$$(5) \qquad \chi(x) = \text{obere Grenze von } \{\chi_1(x),\ \chi_2(x), \ldots\}$$

und bemerke daß $\chi(x)$ erstens nach dem Satze 2 eine *Unterfunktion* von $f(x)$ ist, und daß zweitens diese Funktion als obere Grenze von nach unten halbstetigen Funktionen ebenfalls *nach unten halbstetig* ist (V. § 174).

Es sei jetzt $\varphi(x)$ eine beliebige im Intervalle I definierte nach unten halbstetige Unterfunktion von $f(x)$ und x_0 ein fester Punkt von I.

Ist dann ε eine beliebige positive Zahl, so gibt es eine stetige Funktion $\psi(x)$, die beide Bedingungen

$$\psi(x) \leqq \varphi(x) \qquad (0 < x < 2\pi) \tag{6}$$

$$\psi(x_0) \geqq \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

zugleich erfüllt.

Ferner kann man im Streifen zwischen den beiden stetigen Funktionen $\left(\psi(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $\psi(x)$ mindestens eine zur x-Achse parallele Strecke finden, die einen inneren Punkt mit der Abszisse x_0 und Endpunkte mit rationalen Abszissen besitzt. Bezeichnet man mit δ_{k_0} das Intervall unserer Folge, in das sich diese Strecke projiziert, so muß nach unserer Konstruktion

$$\chi_{k_0}(x_0) > \psi(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher nach (5) und (7)

$$\chi(x_0) \geqq \varphi(x_0) - \varepsilon$$

sein. Die Wahl des Punktes x_0 innerhalb I und der positiven Zahl ε ist aber willkürlich; man hat daher allgemein

$$\varphi(x) < \chi(x)$$

d. h. den

Satz 4. *Im Intervalle $0 < x < 2\pi$ gibt es eine größte nach unten halbstetige Unterfunktion $\chi(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$.*

Ebenso beweist man den

Satz 5. *Es gibt im Intervalle $0 < x < 2\pi$ eine kleinste nach oben halbstetige Funktion $X(x)$ der Funktion $f(x)$.*

4. Es sei $f_1(x)$ eine beliebige, zu $f(x)$ äquivalente Funktion und mit $\varphi_1(x)$ ihre untere, mit $\Phi_1(x)$ ihre obere Limesfunktion bezeichnet (V. § 123). Aus $\varphi_1(x) \leqq f_1(x)$ folgt, daß $\varphi_1(x)$ eine Unterfunktion von $f(x)$ ist; außerdem ist aber $\varphi_1(x)$ nach unten halbstetig und daher, nach dem Satze 4

$$\varphi_1(x) \leqq \chi(x) \qquad (0 < x < 2\pi). \tag{8}$$

Man beweist auf gleichem Wege, daß

$$X(x) \leqq \Phi_1(x) \tag{9}$$

ist. Ich bezeichne ferner mit $f_2(x)$ eine Funktion, die in jedem Punkte der Punktmenge

$$\boldsymbol{M}(\chi \leqq f \leqq X)$$

gleich $f(x)$ ist und auf der übrigbleibenden Nullmenge des Intervalls

$0 < x < 2\pi$ gleich $\chi(x)$ ist. Die Funktion $f_2(x)$ ist zu $f(x)$ äquivalent und genügt der Bedingung

$$\chi(x) \leqq f_2(x) \leqq X(x). \tag{10}$$

Aus (10) folgt nun mit Berücksichtigung der Halbstetigkeit von $\chi(x)$ und $X(x)$, daß die Limesfunktionen $\varphi_2(x)$ und $\Phi_2(x)$ von $f_2(x)$ den Bedingungen

$$\chi(x) \leqq \varphi_2(x) \quad \text{und} \quad \Phi_2(x) \leqq X(x)$$

genügen und hieraus folgt mit Berücksichtigung von (8) und (9)

$$\varphi_2(x) = \chi(x), \qquad \Phi_2(x) = X(x).$$

Dieses Resultat kann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz 6. *Die Funktion $\chi(x)$ ist nirgends kleiner als die untere und die Funktion $X(x)$ nirgends größer als die obere Limesfunktion einer beliebigen zu $f(x)$ äquivalenten Funktion. Es gibt zu $f(x)$ äquivalente Funktionen, deren Limesfunktionen mit $\chi(x)$ und $X(x)$ zusammenfallen.*

5. Nach einem bekannten Satze von Lebesgue ist eine Funktion dann und nur dann nach Riemann integrierbar, wenn ihre Limesfunktionen einander äquivalent sind (V. § 415).

Gibt es eine zu $f(x)$ äquivalente Funktion $f_1(x)$ mit den Limesfunktionen $\varphi_1(x)$ und $\Phi_1(x)$, die nach Riemann integrierbar ist, so folgt aus der Äquivalenz dieser letzteren Funktionen und aus

$$\varphi_1(x) \leqq \chi(x) \leqq X(x) \leqq \Phi_1(x),$$

daß auch

$$\chi(x) \sim X(x)$$

ist. Umgekehrt folgt aber aus der Äquivalenz von $\chi(x)$ und $X(x)$, nach dem letzten Satze, daß es zu $f(x)$ äquivalente, nach Riemann integrierbare Funktionen gibt.

Satz 7. *Es gibt dann und nur dann nach Riemann integrierbare und zu $f(x)$ äquivalente Funktionen, wenn die Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$ einander äquivalent sind.*

6. Aus der Tatsache, daß nach dem Satze 3 stets $\chi(x) \leqq X(x)$ ist, folgt, daß die Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$ dann und nur dann einander äquivalent sind, wenn

$$\int_0^{2\pi} \chi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} X(x)\,dx \tag{11}$$

ist (V. § 405). Bezeichnet man die Fourierschen Koeffizienten von $\chi(x)$ mit

$$b_0,\ b_1,\ \bar{b}_1,\ b_2,\ \bar{b}_2,\ \ldots \tag{12}$$

und die Fourierschen Koeffizienten von $X(x)$ mit

$$B_0,\ B_1,\ \overline{B}_1,\ B_2,\ \overline{B}_2,\ \ldots, \tag{13}$$

so kann man die Gleichung (11) durch

$$b_0 = B_0$$

ersetzen und folgendes Resultat aussprechen.

Satz 8. *Für die im vorigen Satze geforderte Äquivalenz der Funktionen $\chi(x)$ und $X(x)$ ist notwendig und hinreichend, daß die konstanten Glieder in den Fourierschen Entwicklungen dieser Funktionen übereinstimmen.*

7. Ich will nun zeigen, wie man die Zahlen b_0 und B_0 bestimmen kann. Ich bezeichne mit s_p die obere Grenze der konstanten Glieder aller trigonometrischen Polynome p^{ter} Ordnung, die Unterfunktionen von $f(x)$ sind; diese Zahlen bilden natürlich nach ihrer Definition eine monoton wachsende Folge und es existiert daher der Grenzwert

$$\lim_{p=\infty} s_p.$$

Da ferner jedes trigonometrische Polynom, das Unterfunktion von $f(x)$ ist, als stetige Unterfunktion von $f(x)$ nie größer als $\chi(x)$ sein kann, muß für jeden Wert von p

$$s_p \leq b_0$$

und daher auch

$$\lim_{p=\infty} s_p \leq b_0 \tag{14}$$

sein. Anderseits kann man, nach einem bekannten Satze über Lebesguesche Integrale (V. § 399), wenn man noch berücksichtigt, daß $\chi(x)$, als nach unten halbstetige Funktion, die Grenze einer monoton wachsenden Folge von stetigen Funktionen ist, jeder positiven Zahl ε eine stetige Unterfunktion $\varphi(x)$ von $f(x)$ zuordnen, für die

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} = b_0 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Ferner gibt es für hinreichend große p trigonometrische Polynome, die eine zwischen den stetigen Kurven $\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varphi(x)$ verlaufende Kurve darstellen. Für diese Werte von p ist dann

$$s_p \geqq b_0 - \varepsilon$$

und man hat, weil $s_0 \leqq s_1 \leqq \ldots$ ist,

$$\lim_{p=\infty} s_p \geq b_0 - \varepsilon. \tag{15}$$

Der Vergleich von (14) und (15) liefert dann den ersten Teil des folgenden Satzes, dessen zweiter Teil ebenso zu beweisen ist.

Satz 9. *Bezeichnet man mit s_p die obere Grenze der konstanten Glieder aller trigonometrischen Polynome p^{ter} Ordnung, die Unterfunktionen von $f(x)$ sind, so ist stets*

$$b_0 = \lim_{p=\infty} s_p. \tag{16}$$

Ebenso ist

$$B_0 = \lim_{p=\infty} S_p, \tag{17}$$

wenn S_p die untere Grenze der konstanten Glieder aller trigonometrischen Polynome p^{ter} Ordnung bedeutet, die Oberfunktionen von $f(x)$ sind.

8. Die Bestimmung von b_0 und B_0 ist also auf die Berechnung von s_p und S_p zurückgeführt. Die Zahl λ, die wir in § 3 unserer schon oben erwähnten gemeinsamen Arbeit berechnet haben, stellt die größte konstante Unterfunktion von $f(x)$ dar und fällt daher in der Bezeichnung des vorigen Paragraphen mit s_0 zusammen.

Die von uns damals benutzten Hilfsmittel erlauben, wie jetzt zu zeigen ist, ganz allgemein die Zahlen s_p und S_p zu bestimmen. Diese Hilfsmittel beruhen im wesentlichen auf folgenden beiden Sätzen:

Satz A. *Eine meßbare Funktion $f(x)$ mit den* F o u r i e r *schen Koeffizienten*

$$a_0,\ a_1,\ \bar{a}_1,\ \ldots$$

ist dann und nur dann einer beschränkten nicht negativen Funktion äquivalent, wenn die harmonische Funktion

$$U(r, \vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a \cos k\vartheta + a_k \sin k\vartheta) \tag{18}$$

für $r < 1$ regulär und dort beschränkt und nicht negativ ist.

Satz B. *Sind*

$$a_0,\ a_1,\ \bar{a}_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_n \tag{19}$$

irgendwelche $(2n+1)$ reelle Zahlen, so gibt es dann und nur dann eine für $r < 1$ reguläre, nicht negative harmonische Funktion $U(r, \vartheta)$, deren Entwicklung (18) *mit den gegebenen Koeffizienten* (19) *beginnt, wenn a_0 nicht kleiner ist als die größte Wurzel $\bar{\lambda}$ der algebraischen Gleichung in λ*

$$D_n(2\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0. \tag{20}$$

Die linke Seite von (20) *ist eine Abkürzung für die rekurrente Determinante*

$$\begin{vmatrix} 2\lambda, & \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \alpha_{-1}, & 2\lambda, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{-n}, & \alpha_{-n+1}, & \alpha_{-n+2}, & \ldots, & 2\lambda, \end{vmatrix}$$

in die man

$$\alpha_k = a_k + i\bar{a}_k, \qquad \alpha_{-k} = a_k - i\bar{a}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

zu setzen hat. Es gelten außerdem stets die Ungleichheiten

$$(21) \qquad |a_k| \leqq 2\lambda, \qquad |\bar{a}_k| \leqq 2\bar{\lambda} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

9. Ich kehre nun zu unserer beschränkten, meßbaren Funktion $f(x)$ mit den Fourierschen Koeffizienten

$$(22) \qquad a_0, a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \ldots$$

zurück und bezeichne wieder mit g ihre untere Grenze.

Es sei p eine beliebige natürliche Zahl und $n > p$; ich führe $2p$ Veränderliche ein

$$(23) \qquad y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_p, y_p,$$

sowie auch die Abkürzungen

$$(24) \qquad \eta_k = y_k + i\bar{y}_k, \qquad \eta_{-k} = y_k - i\bar{y}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Hierauf suche ich *die untere Grenze der größten Wurzel der algebraischen Gleichung in* λ

$$(25) \qquad D_n(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

wenn man die p *komplexen Zahlen* $\eta_1, \ldots, \eta_p$ *irgendwie variieren läßt.*

Nun bemerke ich, daß, da die Funktion $(f(x) - g)$ nach Voraussetzung beschränkt und nicht negativ ist, die größte Wurzel der Gleichung

$$D_n(\lambda, \alpha_1 \ldots \alpha_n) = 0$$

nach den Sätzen des vorigen Paragraphen sicher nicht größer als $(a_0 - g)$ sein kann. Ich brauche also nur solche Wertsysteme $y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_p, \bar{y}_p$ zu betrachten, für die die größte Wurzel der Gleichung (25) die Zahl $(a_0 - g)$ nicht übertrifft, und hieraus folgt, mit Berücksichtigung von (21),

$$(26) \qquad |y_k| \leqq 2(a_0 - g), \qquad |\bar{y}_k| \leqq 2(a_0 - g) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Es genügt also, wenn ich die $y_k, \bar{y}_k$ innerhalb der beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge (26) variieren lasse, und da die größte Wurzel der Gleichung (25) eine stetige Funktion dieser Zahlen ist, wird ihre untere Grenze für mindestens ein System von Werten der $y_k, \bar{y}_k$ erreicht, das ich mit

$$(27) \qquad y_{pk}(n), \qquad \bar{y}_{pk}(n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnen will. Es ist für das Folgende bequem die untere Grenze selbst mit $(a_0 - s_p(n))$ zu bezeichnen.

10. Aus dem Satze B folgt dann, daß jede nicht negative harmonische Funktion (18), für welche die Koeffizienten a_k, $\bar{a}_k$ für $k = p + 1, \ldots, n$ mit den gegebenen aus der Folge (22) übereinstimmen, ein konstantes Glied besitzt, das sicher nicht kleiner ist als $(a_0 - s_p(n))$. Hieraus entnimmt man aber, wenn man p festhält und n wachsen läßt,

$$a_0 - s_p(n) \leqq a_0 - s_p(n+1) \tag{28}$$

und daher existiert auch stets der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} s_p(n) = s_p. \tag{29}$$

Dieser Grenzwert s_p ist wegen $a_0 - s_p(n) \leqq a_0 - s_p \leqq a_0 - g$ eine endliche Zahl.

Ferner bemerke man, daß wegen (26)

$$|y_{pk}(n)| \leqq 2(a_0 - g), \quad |\bar{y}_{pk}(n)| \leqq 2(a_0 - g) \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

ist. Man kann daher aus der Folge

$$n \quad p + 1, \; p + 2, \ldots$$

von natürlichen Zahlen eine Teilfolge

$$n_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

auswählen, so daß die $2p$ Grenzwerte

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{j=\infty} y_{pk}(n_j) = y_{pk} \\ &\lim_{j=\infty} \bar{y}_{pk}(n_j) = y_{pk} \end{aligned}\right. \qquad (k = 1, 2, \ldots p) \tag{30}$$

zugleich existieren.

11. Nach dem Satze B kann man jeder natürlichen Zahl j eine im Einheitskreise reguläre nicht negative harmonische Funktion $U_j(r, \vartheta)$ zuordnen, deren Entwicklung die $(2n_j + 1)$ Anfangskoeffizienten

$$a_0 - s_p(n_j), \; y_{p1}(n_j), \ldots, y_{pp}(n_j), \; a_{p+1}, \ldots, \bar{a}_{n_j} \tag{31}$$

besitzt. Diese und auch die folgenden Koeffizienten von $U_j(r, \vartheta)$ sind ihrem absoluten Betrage nach nicht größer als die feste Zahl $2(a_0 - g)$. Da nun überdies die Koeffizienten der Entwicklung von $U_j(r, \vartheta)$ nach (29), (30) und (31) mit wachsendem j gegen die Zahlen der Folge

$$a_0 - s_p, \; y_{p1}, \ldots, \bar{y}_{pp}, \; a_{p+1}, \; \bar{a}_{p+1}, \ldots \tag{32}$$

konvergieren, so existiert ebenfalls der Grenzwert

$$\lim_{j=\infty} U_j(r, \vartheta) = U(r, \vartheta).$$

Hierbei bedeutet $U(r, \vartheta)$ eine *nicht negative* für $r < 1$ reguläre harmonische Funktion, die die Koeffizienten (32) besitzt. Hieraus folgt nach dem Satze A, daß das trigonometrische Polynom

$$\psi_p(x) = s_p + \sum_{k=1}^{p} (a_k - y_{pk}) \cos kx + (a_k - \bar{y}_{pk}) \sin kx$$

eine *Unterfunktion* von $f(x)$ ist.

Es sei nun

$$\psi'_p(x) = s'_p + \sum_{k=1}^{p} (a_k - y'_k) \cos kx + (a_k - y'_k) \sin kx$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom p^{ter} Ordnung, das zugleich Unterfunktion von $f(x)$ ist. Dann muß für jedes $n > p$ mindestens eine für $r < 1$ reguläre und nicht negative harmonische Funktion existieren, deren Entwicklung mit den Koeffizienten

$$a_0 - s'_p,\ y'_1, \ldots, y'_p,\ a_{p+1}, \ldots, \bar{a}_n$$

beginnt. Hieraus folgt, nach der Definition von $s_p(n)$,

$$a_0 - s_p(n) \leqq a_0 - s'_p$$

und es ist daher auch

$$s'_p \leqq \lim_{n=\infty} s_p(n) = s_p.$$

Die Zahlen s_p haben also genau dieselbe Bedeutung wie im Satze 9.

12. Um auf analogem Wege die Zahlen S_p zu berechnen, muß man mit $(S_p(n) - a_0)$ die untere Grenze der größten Wurzel der Gleichung

$$D_n(\lambda, -\eta_1, \ldots, -\eta_p, -\alpha_{p+1}, \ldots, -\alpha_n) = 0$$

oder was dasselbe ist mit $[a_0 - S_p(n)]$ die obere Grenze der kleinsten Wurzel von

$$D_n(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n) = 0$$

für alle möglichen Wertsysteme $\eta_1, \ldots, \eta_p$ bezeichnen. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} S_p(n) = S_p.$$

Vergleicht man diese letzten Resultate mit unseren früheren Sätzen, so erhält man schließlich den

Satz 10. *Man bezeichne mit $(a_0 - s_p(n))$ die untere Grenze der größten Wurzel der Gleichung in λ*

$$D_n(\lambda, \eta_1, \ldots, \eta_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n) = 0$$

und mit $(a_0 - S_p(n))$ die obere Grenze der kleinsten Wurzel dieser Gleichung, wenn man die komplexen Zahlen $\eta_1, \ldots, \eta_p$ beliebig variieren läßt. Dann drückt die Gleichung

$$\lim_{p=\infty} \lim_{n=\infty} (S_p(n) - s_p(n)) = 0 \tag{33}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß eine nach Riemann integrierbare Funktion mit den Fourierschen Koeffizienten $a_0, a_1, \bar{a}_1, \ldots$ *existiert.*

13. Der letzte Satz enthält das Resultat, das ich beweisen wollte, und ich habe nur noch einige kleinere Bemerkungen hinzuzufügen. Zunächst bemerke ich, daß da stets $b_0 \leqq a_0 \leqq B_0$ ist, die Bedingung $b_0 = B_0$ des § 9 sich spalten läßt in die zwei Bedingungen

$$b_0 = a_0 \quad \text{und} \quad a_0 = B_0.$$

Was bedeutet nun jede dieser letzten Gleichungen, wenn man sie einzeln nimmt?

Die Gleichung $b_0 = a_0$ sagt z. B. aus, daß unter den zu $f(x)$ äquivalenten Funktionen mindestens eine existiert, deren *unteres Darbouxsches Integral* gleich dem Lebesgueschen ist, und die Gleichung $a_0 = B_0$ hat eine analoge Bedeutung. Es ist daher sehr leicht Funktionen anzugeben, für welche $b_0 = a_0$ und $a_0 < B_0$ ist. Man betrachte z. B. auf dem Intervalle

$$I : 0 < x < 2\pi$$

eine überall dicht liegende offene Punktmenge A, deren Inhalt gleich π ist, und setze $f(x) = 1$ auf A und $f(x) = 0$ auf $I - A$. Es ist sehr leicht einzusehen, daß man hier

$$b_0 = a_0 = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_0 = 1$$

hat.

14. Zweitens möchte ich noch zeigen, wie man auch die übrigen Fourierschen Koeffizienten b_k, $\bar{b}_k$ der Funktion $\chi(x)$ ermitteln kann. Nach dem § 11 ist die Funktion $\chi(x) - \psi_p(x)$ eine nicht negative Funktion, deren Fouriersche Entwicklung mit $(b_0 - s_p)$ beginnt. Man hat also z. B. für jedes $j < p$

$$| b_j - (a_j - y_{pj}) | \leqq 2(b_0 - s_p)$$

und wegen der Gleichung (16)

$$b_j = \lim_{p=\infty} (a_j - y_{pj})$$

und ebenso findet man

$$\bar{b}_j = \lim_{p=\infty} (a_j - \bar{y}_{pj}).$$

Man kann sogar die b_j, $\bar{b}_j$ direkt aus den $y_{pk}(n)$, $\bar{y}_{pk}(n)$ berechnen, ohne von dem Auswahlprinzip, das im § 10 benutzt worden ist, Gebrauch zu machen. Man kann nämlich die Teilfolge $n_1, n_2, \ldots$, die wir in diesem Paragraphen benutzt haben, so bestimmen, daß für ein *festes* $j < p$

$$y_{pj} = \overline{\lim_{n=\infty}}\, y_{pj}(n)$$

ist; tut man dies für jedes $p > j$, so wird

$$b_j = a_j - \lim_{p=\infty} \overline{\lim_{n=\infty}}\, y_{pj}(n)$$

und diese letzte Gleichung gilt für jedes beliebige j.

15. Endlich möchte ich Sie darauf aufmerksam machen, daß man mit ähnlichen Mitteln auch versuchen könnte zu untersuchen, ob unter den zu $f(x)$ äquivalenten Funktionen eine *stetige*, *periodische* Funktion existiert. Dazu müßte man statt der früheren trigonometrischen Polynome andere $\omega_p(x)$ und $\Omega_p(x)$ bestimmen, mit folgenden Eigenschaften:

$\omega_p(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom p^{ter} Ordnung, das Unterfunktion von $f(x)$ ist und für welches die obere Grenze der Differenz $[\chi(x) - \omega_p(x)]$ möglichst klein ist. Das trigonometrische Polynom $\Omega_p(x)$ aber ist eine Oberfunktion von $f(x)$, für welches die obere Grenze der Differenz $[\Omega(x) - X(x)]$ möglichst klein ist. Setzt man dann

$$\alpha_p = \text{obere Grenze von } [\Omega_p(x) - \omega_p(x)],$$

so ist

$$\lim_{p=\infty} \alpha_p = 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß eine zu $f(x)$ äquivalente stetige und periodische Funktion existiert. Man müßte diesen Gedanken aber erheblich weiterverfolgen, ehe er in bequeme algebraische Form erscheinen kann.

Der § 12 unserer gemeinsamen Arbeit führt ebenfalls zu vielen interessanten Anwendungen, z. B. zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Summierbarkeit oder die Totalstetigkeit einer durch ihre Fourierschen Koeffizienten gegebenen Funktion. Das sind aber Fragen, die ich heute nicht mehr berühren möchte.

Göttingen, den 23. März 1917.

(Eingegangen am 1. Februar 1918.)