

# Sulla connessione delle superficie razionali reali.

(Di ANNIBALE COMESSATTI, a Padova.)

---

## INTRODUZIONE.

In questa Memoria, intesa a continuare e completare una mia precedente ricerca (\*), mi propongo di stabilire dei metodi i quali servano a determinare la connessione di tutte le superficie razionali reali, collegandone le proprietà, sia a quelle della rappresentazione piana, sia ai caratteri invarianti (relativi) della superficie.

Prima di accennare alla via percorsa ed ai risultati ottenuti, non credo fuor di luogo dare alcune spiegazioni circa la natura e la posizione del problema, lasciando al testo del lavoro il compito di giustificare più ampiamente i criterî adottati.

Ogni indagine la quale si riferisca a proprietà di connessione d'una superficie algebrica reale, richiede che sia ben precisato il punto di vista dal quale le proprietà stesse si considerano. Perciò occorre prima d'ogni cosa stabilire:

1.º) Quale influenza esercitino sulle proprietà in questione le eventuali singolarità reali della superficie;

2.º) Quale significato si debba attribuire alla frase *superficie equivalenti dal punto di vista della connessione*; in altre parole, ponendoci dal punto di vista del classico *Programma* di KLEIN, quale sia il *gruppo di trasformazioni* da cui è caratterizzata la geometria che studia le proprietà di connessione delle superficie.

---

(\*) *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Mathematische Annalen, LXIII (1912), pp. 1-72]. Questa Memoria verrà nel seguito indicata con F.

Dai criteri adottati per stabilire la definizione di equivalenza nel senso suddetto, dipende in certo modo anche la convenzione che si adotta per precisare l'influenza delle singolarità. Nell'ordine di idee che sotto sarà chiarito, torna conveniente attribuire ad esse la stessa influenza che avrebbero *se fossero risolte*, cioè considerare ogni superficie razionale reale  $F$  come equivalente ad un *modello*  $F_0$  privo di singolarità la cui costruzione sia definita senza ambiguità per ogni caso. La risoluzione delle singolarità, mediante un ben determinato tipo di trasformazioni (birazionali) reali (che rientrano perciò nel *gruppo della connessione*) collegate alla rappresentazione piana di  $F$ , si trova stabilita al § 4, n.º 13; tuttavia lo studio delle proprietà di connessione di  $F$  si fa direttamente su quella rappresentazione, senza ricorrere al modello  $F_0$  il quale interviene soltanto per chiarire il *senso* che deve darsi a quelle proprietà in quanto su esse influiscono le singolarità di  $F$ .

Quanto alla 2.<sup>a</sup> delle due questioni suddette, volendo liberarmi da tutto ciò che non ha essenzialmente carattere invariante nella considerazione d'una superficie (spazio in cui è contenuta, elementi impropri, ecc.), cioè volendo dare al concetto di connessione la sua più ampia generalità — ch'è poi richiesta dalla natura dei risultati a cui mi son proposto di pervenire — ho acceduto al criterio di considerare come proprietà di connessione solo quelle che KLEIN ha chiamato *assolute* (\*), in relazione alle quali l'*equivalenza* di due superficie dipende dalla possibilità di stabilire fra esse una *corrispondenza* (reale) *biunivoca, continua, priva di eccezioni* (nel campo reale), la quale non soddisfi in più ad alcuna necessaria restrizione dipendente da speciali proprietà (ad es. *proiettive* o *metriche*) delle superficie (\*\*). La definizione rigorosa delle trasformazioni suddette (che nel caso di superficie *finite* son poi *deformazioni con estensione*) si trova stabilita, per superficie prive di singolarità, al § 2, nel quale, in vista delle esigenze del lavoro, della necessità di evitare in questioni delicate interpretazioni ambigue, ho esposto (senza tuttavia mai perder di vista lo scopo della Memoria) i risultati fondamentali inerenti alla connessione delle superficie, corredando l'esposizione di alcune note in cui, col sussidio di un'ampia bibliografia (\*\*\*), espongo e brevemente discuto i vari punti di vista e le ragioni di alcune mie preferenze.

---

(\*) Ometto qui citazioni dettagliate, riservandole al testo. Cfr. la nota (17).

(\*\*) Nel campo algebrico può dirsi che le proprietà di connessione sono invarianti di fronte alle trasformazioni *birazionali reali* che son prive di *punti fondamentali reali*, cioè non introducono *curve eccezionali reali*.

(\*\*\*) Ho cercato, per quanto possibile, ch'essa sia completa (in relazione ai punti di vista discussi) e atta a guidare il lettore ad uno studio più approfondito.

Fissato il campo delle proprietà che in questo lavoro si considerano come inerenti alla connessione, risulta da un teorema fondamentale di quella teoria, che esse sono univocamente collegate a due caratteri:

- a) Un carattere *qualitativo*: l'*unilateralità* o *bilateralità* della superficie;
- b) Un carattere *numerico*: l'*ordine di connessione*  $Z$ , che si può, con vari Autori, definire anche per superficie dotate d'un numero qualunque (finito) di falde.

*La determinazione dei due caratteri a), b) per ogni superficie razionale reale, di cui si conosca la rappresentazione piana, è il problema intorno a cui si raggruppano tutti i risultati di questa Memoria.*

Il procedimento di cui mi giovo per giungere alla soluzione di esso, si fonda su due possibilità:

1.<sup>a</sup>) Quella di associare ad ogni superficie razionale reale  $F$  una sua trasformata reale  $\Phi$  la cui connessione si sappia determinare direttamente (valendosi p. es. della rappresentazione piana doppia di  $\Phi$ );

2.<sup>a</sup>) Quella di desumere la connessione di  $F$  da quella di  $\Phi$  valutando l'influenza che ha su essa la trasformazione reale intercedente tra  $F$  e  $\Phi$ .

La ricerca, per ogni  $F$ , d'una  $\Phi$  la cui connessione sia determinabile direttamente (sopra un modello concreto), non è di per sè semplice; ma la difficoltà diviene più seria se si vuol scegliere  $\Phi$  in modo che dalla sua connessione si possa desumere quella di  $F$ , perchè a tale scopo conviene che la trasformazione reale che lega  $F$  a  $\Phi$  presenti certi caratteri di semplicità. Così ad es. se  $F$  ha una sola falda, si può scegliere come  $\Phi$  un piano, ma la presenza su questo di curve fondamentali (semplici) ostacola gravemente la ricerca del carattere di *bilateralità* od *unilateralità* di  $F$  (\*). La difficoltà si rimuove facendo sparire quelle curve fondamentali *in modo che la rappresentazione piana di  $F$  rimanga ancora reale*; tuttavia la possibilità di tal rappresentazione (limitata da due determinate eccezioni), e più in generale d'una speciale rappresentazione piana di tutte le superficie razionali reali, che ho chiamato *normale*, si prova mediante una indagine assai delicata, a cui è dedicato l'intero § 1. Tenendo conto delle proprietà di quella rappresentazione, si riesce in generale a costruire la superficie  $\Phi$  in modo che la trasformazione (birazionale) reale fra  $F$  e  $\Phi$  sia dotata su  $\Phi$  d'un numero finito di punti fondamentali, e priva affatto di punti fondamentali su  $F$ .

---

(\*) Cfr. il lavoro di ENRIQUES, citato alla nota (1).

Allora, un teorema dovuto a KLEIN, completato da qualche osservazione ulteriore, permette di dedurre la connessione di  $F$  da quella di  $\Phi$ .

Il teorema a cui s'allude, precisa l'alterazione che si produce nella connessione d'una superficie, quando ad essa si applica una trasformazione reale dotata di eccezioni in punti e curve fondamentali. Data la sua ampia portata, specialmente per quanto riguarda lo studio delle superficie unilateri, ho dedicato alle relative applicazioni tutto il § 3, presentando ivi sotto nuova forma alcuni importanti risultati che concernono la teoria di quelle superficie, e assegnando alcuni *modelli*, atti a dare un'idea sulla *forma* delle superficie razionali. Lo studio delle superficie unilateri, mediante una loro particolare rappresentazione, conduce inoltre a considerare quelle fra le proprietà dei circuiti chiusi su esse tracciati, che hanno relazione col concetto (e colla definizione) d'*omologia*, e a porre in proposito interessanti problemi. Di alcuni fra essi, che presentano analogia con quelli relativi alla ricerca d'una *base minima* per le curve appartenenti ad una superficie algebrica, ho dato la soluzione in fine del § 3.

Ecco ora, in breve, le principali conclusioni della Memoria.

Per quanto riguarda il carattere di unilateralità o bilateralità enuncierò anzitutto il risultato seguente:

*Tutte le superficie razionali con una falda (rappresentabili realmente sul piano) sono unilateri, fatta eccezione per quelle equivalenti ad una sfera ( $Z=0$ ) o ad un toro ( $Z=2$ ) (§ 4).*

Negli altri casi si ha invece:

In ogni *classe* di superficie (definita in relazione alle trasformazioni birazionali reali) appartenenti alla  $I^a$  o  $II^a$  famiglia (della classificazione stabilita in F. n.º 40, Teor. V) esistono superficie, aventi l'ordine di connessione *minimo* le cui falde son tutte bilateri e *del tipo sfera*. Appena l'ordine di connessione supera quel minimo almeno una falda è unilatera (§ 5);

Fra le cinque falde che appartengono ad una superficie della  $III^a$  famiglia ve n'ha una — denominata *falda singolare* — che non si può ridurre bilatera mediante una trasformazione birazionale reale. Sicchè le superficie di quella famiglia hanno sempre almeno una falda unilatera, ch'è la falda singolare, il cui ordine di connessione ha per valor minimo *l'unità*. Invece le altre quattro falde possono simultaneamente ridursi bilateri e *del tipo sfera* (§ 5, e, per lo studio della falda singolare, § 7).

I risultati di carattere *numerico* si aggruppano tutti intorno alle espressioni — dipendenti dalla famiglia e, per le superficie con una falda, anche

da due casi eccezionali di rappresentazione — dell'ordine di connessione  $Z$  mediante i caratteri inerenti alla rappresentazione piana normale della superficie  $F$ . In modo essenziale contribuisce all'espressione di  $Z$ , il numero  $r$  di quei punti che son base per il sistema lineare  $\Sigma$  imagine — nella rappresentazione normale — delle sezioni piane (od iperpiane) di  $F$ , e che sono uniti nella trasformazione antibirazionale involutoria  $\tau$  corrispondente al coniugio di  $F$  (§ 5).

Siccome anche l'espressione dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I$  relativo ad  $F$  dipende in modo essenziale da  $r$  e, in più, dal numero  $i$  delle coppie di punti, base per  $\Sigma$ , e corrispondenti in  $\tau$ , così si ottengono senza difficoltà importanti disuguaglianze.

Esse esprimono, che, dato  $I$ , il numero  $Z$  relativo ad una superficie di una determinata famiglia, con un certo numero  $m$  di falde, varia fra due limiti di cui l'inferiore è fisso (per quel dato  $m$  e per quella famiglia) e il superiore dipende da  $I$ . Io provo che, compatibilmente colla relazione

$$I \equiv Z \pmod{2},$$

la quale è soddisfatta da *tutte* le superficie razionali reali, tutti i valori compresi fra i due limiti sono *effettivamente raggiunti* in ogni *classe* appartenente a quella famiglia e relativa a quel dato numero di falde. Si trova così risolto un problema posto in fine dell'Introduzione di F. (pag. 6).

Le espressioni di  $I$  e  $Z$  dipendono, come si è detto, dai due interi  $r$  ed  $i$  e variano diversamente al variare di essi; in tal guisa che l'eliminazione di  $r$  ed  $i$  non può compiersi se non introducendo un *terzo carattere* della superficie che si esprima anch'esso mediante quegli'interi. È questo il *numero base reale*  $\bar{\rho}$ , cioè il numero delle curve *reali* linearmente indipendenti a cui è *linearmente legata* ogni curva reale della superficie. Le espressioni di  $\bar{\rho}$  mediante  $r$  ed  $i$  (stabilite al § 6) confrontate con quelle di  $I$  e  $Z$  conducono alla relazione seguente

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1),$$

la quale ci sembra degna di nota, oltre che per la sua semplicità anche per il fatto ch'essa vale per *tutte* le superficie razionali, indipendentemente dalla famiglia e dal numero delle falde; in quanto l'influenza di tali elementi sparisce nell'eliminazione di  $r$  ed  $i$ . Si potrà forse in avvenire considerarla come caso particolare, d'una relazione analoga *valida per tutte le superficie algebriche*?

## § 1.

## RAPPRESENTAZIONE PIANA NORMALE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI REALI.

1. Le proprietà di connessione d'una superficie razionale reale  $F$  si collegano, come vedremo, intimamente, a quelle della sua rappresentazione piana. E tanto più semplice ed espressiva ne riesce la deduzione quanto meglio quella rappresentazione risponde a certe condizioni di semplicità imposte dalle speciali esigenze del problema.

Per renderci conto, almeno in via approssimata, di tali esigenze, prendiamo le mosse da un esempio.

Imaginiamo che  $F$  abbia *una sola falda*, cioè sia rappresentabile *realmente* sopra un piano (reale)  $\pi$  (F. § 6). Sia  $S$  il sistema lineare *reale* di  $\pi$ , che corrisponde a quello delle sezioni piane od iperpiane di  $F$ . Questo sistema sarà dotato di un certo numero di *punti base* e di *curve fondamentali semplici* (eccezionali); anzi possiamo supporre che, all'infuori di queste, non vi siano altre curve fondamentali per  $S$ , immaginando, per maggior semplicità, che  $F$  sia priva di punti multipli.

Possiamo allora calcolare subito l'*ordine di connessione* di  $F$ , giacchè esso si esprime in modo semplicissimo mediante il numero dei punti base e delle curve fondamentali di  $S$ ; mentre invece ci troveremmo di fronte ad una certa difficoltà qualora volessimo decidere circa l'unilateralità o bilateralità di  $F$ . Tale difficoltà, che divien più seria quando non si tratti d'una superficie particolare, ma si vogliano stabilire condizioni generali, proviene dalla presenza delle curve fondamentali (<sup>1</sup>).

Si potrà pensar di rimuovere siffatta difficoltà facendo sparire le curve fondamentali di  $S$  mediante una conveniente trasformazione di  $\pi$  in un altro piano  $\pi'$ . Invero, salvo determinate eccezioni, che possono venir considerate a parte, tale operazione è possibile (F. n.º 18, Teor. I).

Ma dopo ciò la rappresentazione di  $F$  su  $\pi'$  sarà ancora *reale*?

---

(<sup>1</sup>) Una condizione, avente carattere generale, intesa a stabilire quando si possa affermare che  $F$  è unilatera, fu data da ENRIQUES: *Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali* [Rendiconti della R. Accademia di Bologna, XVI (1912), pp. 70-73]. Trattasi però d'una condizione *sufficiente*, utile tuttavia in casi speciali.

In altre parole sarà reale il sistema  $S'$  trasformato di  $S$ ? Ecco una questione di cui è assai importante che ci occupiamo senz'altro per spianare la via alle nostre ricerche.

Anzitutto, riportandoci dal suddetto esempio al caso generale, poniamo i termini del problema.

Sia  $F$  una superficie razionale reale *qualunque*, rappresentata sopra un piano (reale)  $\pi$  in tal guisa che al sistema delle sue sezioni piane od iperpiane risponda un sistema lineare  $S$ , appartenente a  $\pi$ . Questo sistema sarà unito in una trasformazione antibirazionale involutoria  $T$ , immagine del coniugio di  $F$  (se  $F$  ha una falda  $T$  si può trasformare nel coniugio e quindi  $S$  in un sistema reale).

Circa  $S$  e  $T$  possiamo affermare quanto segue:

a) Il sistema  $S$  è riducibile, mediante trasformazione cremoniana, ad un sistema  $\Sigma$  privo di curve fondamentali semplici, ovvero dotato di particolarità su cui non è per ora il caso di insistere (F. n.º 18, Teor. I);

b) La trasformazione  $T$  è riducibile, mediante trasformazione cremoniana, ad un determinato tipo che chiameremo *normale* avente (in relazione a tutte le trasformate di  $T$ ) il minimo numero di punti fondamentali (vedi F. § 6, Teor. IV).

Ora proponiamoci la questione seguente: Le due riduzioni di cui si parla in a), b) possono effettuarsi insieme? In altre parole si può trasformare il sistema  $S$  come in a) in tal guisa che la  $T$  si muti *contemporaneamente* in una trasformazione di tipo normale?

Vedremo che la risposta, salvo una lieve restrizione, sarà affermativa. In modo preciso dimostreremo, nel seguito di questo paragrafo, il seguente

**TEOREMA.** *Ogni sistema lineare semplice  $S$ ,  $\infty^r$ , ( $r \geq 3$ ) di curve piane irriducibili, unito in una trasformazione antibirazionale involutoria  $T$ , e dotato di curve unite <sup>(2)</sup>, si può ridurre, mediante trasformazione cremoniana, ad un sistema analogo, unito in una trasformazione  $\tau$  di tipo normale (trasformata di  $T$ ) e inoltre*

*$\alpha$ ) privo di curve fondamentali semplici:  
ovvero anche, se  $\tau$  è il coniugio*

<sup>(2)</sup> Queste condizioni sono necessarie e sufficienti perchè  $S$  si possa considerare come immagine del sistema delle sezioni piane od iperpiane d'una superficie  $F$  di  $S_r$  (cfr. F. § 2, n.º 6, 12).

β) dotato di una sola retta fondamentale contenente due punti base distinti e privo d'altri punti base reali <sup>(3)</sup>;

γ) avente per curve fondamentali semplici  $m$  rette uscenti da un punto base  $O$ , e contenenti ciascuna un altro punto base infinitamente vicino ad  $O$ .

Quando il sistema lineare che corrisponde a quello delle sezioni piane od iperpiane d'una superficie razionale reale  $F$  sia ridotto a soddisfare alle condizioni del Teorema suddetto diremo che *la rappresentazione piana di  $F$  è normale*.

2. Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema enunciato.

Sia  $F$  la superficie razionale considerata,  $S$  il sistema lineare appartenente al piano  $\pi$ , che corrisponde a quello delle sezioni piane od iperpiane di  $F$  e che supponiamo già ridotto a soddisfare alla condizione  $\alpha$ ) del numero precedente, cioè ad esser privo di curve fondamentali semplici, ovvero a presentare le particolarità contemplate nei casi II), III) del Teor. I (F.). I punti base di  $F$  potranno eventualmente esser *propri* (F. n.º 13), ma non saranno in tal caso equivalenti a curve fondamentali semplici (F. nota a pag. 27).

Incominciamo dal liberare il terreno dai due casi eccezionali esaminandoli separatamente.

*Caso II).*  $S$  possiede una retta fondamentale  $r$  con due punti base distinti  $R_1, R_2$  ed è privo di altri punti base. Allora la trasformazione  $T$  <sup>(4)</sup> in cui è unito  $S$  è antiproiettiva od antiquadratica (F. n.º 19). Nel 1.º caso essa si lascia ridurre al coniugio, cioè a tipo normale, mediante una trasformazione proiettiva (F. n.º 8) che non modifica la natura di  $S$ ; nel 2.º se la  $T$  non è priva di punti uniti, cioè se non è di tipo normale (F. n.º 9 e § 6, Teor. IV b)), si lascia ridurre ad un'antiproiettività mediante una trasformazione quadratica  $\omega$  avente i punti fondamentali (su  $\pi$ ) in  $R_1, R_2$  ed in un

<sup>(3)</sup> E, s'intende, d'altre curve fondamentali semplici. Convieni osservare che in tal caso qualora esistano punti base non appartenenti alla retta fondamentale essa si può far sparire mediante una trasformazione quadratica; tanto è vero che nel Caso II) contemplato nei F. Teor. I si esclude l'esistenza di tali punti. Qui invece essi non si possono escludere perchè la trasformazione quadratica che fa sparire la retta fondamentale muta il coniugio in una trasformazione antiquadratica che non è più di tipo normale. Ecco la lieve restrizione a cui si era sopra accennato.

<sup>(4)</sup> Qui e nel seguito useremo per brevità la locuzione « trasformazione  $T$  » in luogo di « trasformazione antibirazionale involutoria  $T$  ».



punto  $R$  unito in  $T$  (F. n.º 9). La  $\omega$  fa sparire la retta fondamentale  $r$ , e ne introduce un'altra  $s$ , per il sistema  $S'$  trasformato di  $S$ , la quale proviene dal punto  $R$  e si comporta come  $r$ . Dunque ci possiamo ridurre sempre al caso  $\beta$ ) del teorema enunciato.

*Caso III).*  $S$  ha per curve fondamentali semplici  $m$  rette uscenti da un punto base  $O$  e contenenti ciascuna un altro punto base infinitamente vicino ad  $O$ . Sappiamo allora (F. n.º 19) che  $S$  si può ridurre, mediante trasformazione cremoniana, ad un sistema  $\Sigma$  avente per curve fondamentali semplici solo rette appartenenti ad un fascio unito nella trasformazione  $\tau$  (trasformata della  $T$  in cui è unito  $S$ ), la quale è di tipo normale. Anzi, se  $\tau$  non è il coniugio, si possono far sparire successivamente le rette fondamentali di  $\Sigma$ , mutando  $\Sigma$  e  $\tau$  in enti analoghi.

Sicchè, qualora non si finisca per cadere sopra un sistema privo di curve fondamentali semplici, potremo supporre d'aver ridotto  $\tau$  al coniugio, e quindi  $\Sigma$  ad un sistema *reale* avente per curve fondamentali semplici solo rette appartenenti ad un fascio reale di centro  $U$ . Ora proveremo che, se  $\Sigma$  non appartiene ai tipi  $\beta$ ),  $\gamma$ ), esiste una trasformazione birazionale *reale*  $\omega$  del piano  $\pi$  di  $\Sigma$  in un altro piano  $\pi'$ , la quale muta  $\Sigma$  in un sistema  $\Sigma'$  analogo, con qualche retta fondamentale di meno.

Invero, non verificandosi i casi  $\beta$ ),  $\gamma$ ), esisteranno *almeno* due rette  $r, s$ , fondamentali per  $\Sigma$ , contenute rispettivamente oltre  $U$  i punti base  $R, S$  di cui *almeno* uno, ad es.  $R$ , è *distinto* da  $U$ . Allora :

1.º) Se  $R, S$  son reali,  $\omega$  è la trasformazione quadratica avente su  $\pi$  il triangolo fondamentale  $URS$ .  $\Sigma'$  ha due rette fondamentali meno di  $\Sigma$ ;

2.º) Se  $R$  è immaginario, la retta  $\bar{r}$  coniugata di  $r$  è pure fondamentale e contiene il punto base  $\bar{R}$  coniugato di  $R$ :  $\omega$  è ancora una trasformazione quadratica avente, su  $\pi$ , il triangolo fondamentale  $UR\bar{R}$ .  $\Sigma'$  ha due rette fondamentali meno di  $\Sigma$ ;

3.º) Se infine  $R$  è reale ed  $S$  immaginario anche la retta  $s$  coniugata di  $s$  sarà fondamentale e conterrà il punto base  $\bar{S}$  coniugato di  $S$ . Allora  $\omega$  è una trasformazione cubica di DE JONQUIÈRES avente su  $\pi$  il punto fondamentale doppio  $U$  ed i punti fondamentali semplici  $R, S, \bar{S}, P$ , ove  $P$  è un punto reale generico di  $\pi$ . Essa fa sparire tre rette fondamentali e ne introduce una (proveniente da  $P$ ); in tal guisa che  $\Sigma'$  ha ancora due rette fondamentali meno di  $\Sigma$ .

Così procedendo, o tutte le rette fondamentali spariscono, ovvero si ricade ancora nei casi  $\beta$ ),  $\gamma$ ).

3. Ed ora occupiamoci del caso generale in cui  $S$  è privo di curve fondamentali semplici. Allora la trasformazione  $T$  ha tutti i suoi punti fondamentali in punti base di  $S$  (F. n.º 23); si tratta di far vedere che la  $T$  si può ridurre a tipo normale senza introdurre curve fondamentali per il sistema  $\Sigma$  trasformato di  $S$ ; in altre parole che tale riduzione si può compiere mediante una trasformazione cremoniana  $\omega$  avente, su  $\pi$ , tutti i suoi punti fondamentali in punti base di  $S$ : ovvero che ci si può ricondurre ai casi  $\beta$ ),  $\gamma$ ).

Perciò si parta da un sistema lineare  $L$ ,  $\infty^r$ , irriducibile, semplice, dotato di punti base tutti impropri, privo affatto di curve fondamentali e unito in  $T$ . Costruendo questo sistema come in F. n.º 24 possiamo supporre che i punti base di  $L$  cadano tutti in punti fondamentali di  $T$ , cioè in punti base di  $S$ , e che inoltre la curva generica di  $L$  passante per un punto *qualunque*  $P$  di  $\pi$  distinto dai punti base di  $L$  non abbia di conseguenza un punto multiplo ivi.

Applicando ad  $L$  il procedimento di successiva aggiunta arriveremo necessariamente ad un sistema lineare  $\Lambda$ , unito in  $T$ , e appartenente ad uno dei seguenti tipi:

1.º) *Sistema lineare ( $\infty^1$  almeno) di curve razionali determinato dal gruppo base;*

2.º) *Sistema lineare irriducibile, semplice ( $\infty^3$  almeno) di curve ellittiche, privo di curve fondamentali proprie, determinato dal gruppo base;*

3.º) *Rete di curve ellittiche riducibile (per trasformazione birazionale) alla rete delle cubiche passanti per 7 punti base;*

4.º) *Sistema lineare  $\infty^3$  di curve di genere 2 riducibile al sistema delle sestiche con 8 punti base doppi (<sup>3</sup>).*

Esponiamo ora le linee generali della dimostrazione la quale si comporrà delle tre parti seguenti:

A) Proveremo che, durante il procedimento di successiva aggiunta non si introducono nuovi punti base, in tal guisa che i punti base di  $\Lambda$  cadranno tutti fra quelli di  $L$ , cioè fra quelli di  $S$ .

B) Ridurremo, mediante una trasformazione cremoniana  $p$  del piano  $\pi$

---

(<sup>3</sup>) CASTELNUOVO, Appendice alla Memoria di ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere uno* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3), 10 (1896), pp. 201-224], p. 222. L'enunciato qui riprodotto trovasi al n.º 7, p. 208 della Memoria. Cfr. F. n.º 24.

in un altro piano  $\pi'$ , il sistema  $\Lambda$  ad un sistema  $M$  d'ordine minimo, il quale apparterrà necessariamente ad uno dei tipi seguenti:

- a) fascio di rette;
- b) rete delle rette di  $\pi'$ ;
- c) sistema di tutte le coniche di  $\pi'$ ;
- d) sistema delle curve d'ordine  $n$  con un punto base  $n-1$ -plo ed  $l$  ( $0 \leq l \leq n-1$ ) tangenti fisse, distinte, comuni a tutte le curve del sistema;
- e) sistema delle curve d'ordine  $n$  con un punto base  $n-1$ -plo ed un punto base semplice a distanza finita da quello;
- f) sistema di cubiche con  $0, 1, 2, \dots, 7$  punti base distinti od infinitamente vicini;
- g) sistema di quartiche con 2 punti base doppi distinti od infinitamente vicini;
- h) sistema di sestiche con 8 punti base doppi distinti od infinitamente vicini<sup>(\*)</sup>;

provando che la trasformazione  $\mu$  non introduce curve fondamentali per il sistema  $S'$  trasformato di  $S$ , in quanto i suoi punti fondamentali, su  $\pi$ , cadono tutti in punti base di  $\Lambda$ , cioè di  $S$ . Farà eccezione solo il caso g) che ci condurrà al  $\beta$ ).

C) Dopo ciò la trasformazione  $T'$ , trasformata di  $T$  mediante  $\mu$ , dovendo lasciare unito uno dei sistemi a), b), ..., h) si lascerà ricondurre a tipo normale mediante una trasformazione cremoniana  $\nu$  del piano  $\pi'$  in un altro piano  $\sigma$ , senza introdurre curve fondamentali semplici per il sistema  $\Sigma$  trasformato di  $S'$  (cioè di  $S$  mediante la  $\omega = \mu \cdot \nu$ ), ovvero introducendo delle rette fondamentali che ci ricondurranno ai casi  $\beta$ ),  $\gamma$ ).

4. Ed ora veniamo al dettaglio.

A) Riprendendo in modo più diffuso e completo un ragionamento svolto per un caso particolare in F. n.º 39, indichiamo con  $|C|$  un sistema lineare  $\infty^r$  dedotto da  $L$  col procedimento di successiva aggiunta, che non abbia punti base fuori di quelli di  $L$ , e tale che il suo aggiunto  $|C'|$  acquisti un punto base  $P$  diverso da quelli di  $L$ .

Poichè supponiamo che il procedimento di successiva aggiunta non termini con  $|C|$ , quel sistema e tutti i precedenti saranno *irriducibili, sem-*

---

(\*) Cfr. FERRETTI, *Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere  $p$ ; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XVI (1912), pp. 236-279], Teor. VII, X, XII.

*plici, privi di curve fondamentali proprie*, e avranno la serie caratteristica non speciale (CASTELNUOVO, loco cit. <sup>(5)</sup>), fatta eccezione per il caso su cui fra poco ci intratterremo, che  $|C|$  sia un sistema di curve iperellittiche di genere  $r - 1$  due a due secantisi in coppie della  $g_2^1$  che ciascuna sostiene.

Data l'ipotesi fatta sulle  $C'$ , le  $C$  per  $P$ , se sono irriducibili, non possono avere lo stesso genere della  $C$  generica perchè altrimenti le  $C'$  dovrebbero segare su quelle  $C$  la serie canonica *completa* e questa avrebbe in  $P$  un punto fisso. Dunque, o le  $C$  per  $P$  saranno riducibili, ovvero avranno il genere minore di quello  $p$  della generica  $C$ .

Incominciamo col mostrare assurda l'ipotesi che le  $C$  per  $P$  siano spezzate in una parte fissa  $D$  e in una parte ulteriore  $E$  variabile in un sistema lineare  $\infty^{r-1} |E|$ . Invero una tal curva  $D$  risulterebbe fondamentale *impropria* per  $|C|$  e perciò la generica  $E$  avrebbe lo stesso genere  $p$  della generica  $C$ . Ma allora il sistema  $|C'|$  dovrebbe segare la serie canonica *completa* sulla generica  $E$ <sup>(7)</sup>, e ciò è inconciliabile coll'ipotesi che  $P$  sia un punto base per il sistema  $|C'|$ . Infatti poichè una  $C'$  non taglia  $D$  fuori dei punti base di  $|C|$  — chè altrimenti essa segherebbe una  $E$  fuori dei punti base in meno di  $2p - 2$  punti — il punto  $P$  sarà un punto base di  $|E|$  distinto da quelli di  $|C|$  e non appartenente a  $D$ . Ma ciò è assurdo perchè allora la serie canonica della generica  $E$  avrebbe un punto fisso in  $P$ .

Adunque o le  $C$  per  $P$  saranno composte colle curve d'un fascio avente un punto base in  $P$ , ovvero saranno irriducibili e avranno il genere minore di  $p$ . Siccome entro  $|C|$  non esiste alcun sistema lineare  $\infty^{r-1}$  avente molteplicità superiore alla generica in qualche punto base di  $|C|$  — chè altrimenti un tal punto base  $R$  sarebbe *proprio* per  $|C|$ , e quindi avrebbe la stessa influenza d'una curva fondamentale *propria* — così tutte le  $C$  per  $P$  avranno di conseguenza un punto multiplo  $Q$  non coincidente con alcuno dei punti base di  $|C|$ ; il quale coinciderà con  $P$  se le  $C$  per  $P$  sono composte colle curve d'un fascio.

Esiste dunque — nelle ipotesi fatte su  $C'$  — un punto  $Q$  non base per  $|C|$ , tale che le  $\infty^{r-1} C$  per esso formano un sistema lineare  $|\bar{C}|$  con un punto multiplo ivi.

---

<sup>(7)</sup> Convien tener presente che  $|C'|$  è il sistema *aggiunto puro* a  $|C|$  e che in tal caso esso coincide col sistema aggiunto puro ad  $|E|$ . Il sistema lineare che soddisfa rispetto a  $|C|$  alle condizioni d'aggiunzione, contiene come parte *fissa* la curva  $D$ ; togliendola (un certo numero di volte) rimane il sistema  $|C'|$ .

Consideriamo ora il sistema  $|C_0|, \infty^s$ , precedente a  $|C|$  nella serie dei successivi aggiunti ad  $L$ . Possiamo supporre che la curva generica del sistema lineare  $\infty^{s-1}|\bar{C}_0|$  formato dalle  $C_0$  per  $Q$ , abbia lo stesso genere della generica  $C_0$  [incluso il caso che le  $C_0$  per  $Q$  contengano come parte fissa una curva fondamentale  $D_0$  di  $|C_0|$ ], giacchè in caso contrario le  $\bar{C}_0$  si comporterebbero come le  $\bar{C}$  e nulla ci vieterebbe di risalire nella serie dei sistemi aggiunti fino a trovarne due consecutivi di cui il secondo si comporti come  $|C|$  (in relazione ad un certo punto  $Q$ ) ed il primo nel modo prescritto a  $|C_0|$ . Invero, come abbiamo inizialmente osservato, almeno le curve di  $L$  soddisfano alle condizioni volute per  $C_0$  in relazione a qualunque punto del piano distinto dai punti base.

Poichè  $Q$  è punto multiplo di tutte le  $|\bar{C}|$ , sarà anche punto multiplo di tutti i gruppi canonici appartenenti alle  $\bar{C}_0$  e passanti per esso. Da ciò si trae, mediante il teorema di CLIFFORD, che  $|\bar{C}_0|$  è un sistema di curve iperellittiche.

Siccome in tali condizioni non si può trovare  $|C_0|$  perchè allora  $|C|$  risulterebbe composto con un fascio di curve razionali<sup>(8)</sup>, e quindi, contro l'ipotesi, il procedimento di aggiunzione si estinguerebbe con  $|C|$ , così soltanto le  $\infty^{s-1}\bar{C}_0$  saranno iperellittiche e perciò  $|C|$  sarà un sistema di curve iperellittiche di genere  $s-2$  due a due segantisi in  $s-2$  coppie delle  $g_2$  che ciascuna  $C$  sostiene; cioè apparterrà (CASTELNUOVO, loco cit.<sup>(9)</sup>) ad uno dei tipi seguenti:

*Rete di grado 2 di curve ellittiche:* questo caso è da escludersi perchè la successione degli aggiunti terminerebbe con  $|C|$ ;

*Sistema  $\infty^3$  di grado 4 e genere 2 riferibile al sistema delle sestiche per 8 punti base doppi:* questo caso è pure da escludersi perchè, quantunque esista il sistema  $|C'|$  — ch'è un fascio di curve ellittiche avente un nuovo punto base in più di quelli di  $|C|$  — noi, seguendo l'elenco dato al n.º 3, dobbiamo considerare la serie degli aggiunti terminata con  $|C|$ ;

*Sistema il cui aggiunto  $C'$  è composto con un fascio di curve razionali  $|D|$  bisecanti le curve di  $|C|$  in tal guisa che ogni  $C'$  si compone di  $p-1D$ <sup>(8)</sup>. Se  $|D|$  avesse punti base diversi da quelli di  $|C|$ , togliendo alle curve di  $|D|$  l'obbligo di passare per quei punti si otterrebbe un sistema lineare  $|E|$  cer-*

<sup>(8)</sup> CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), X (1896), pp. 103-123], p. 109.

<sup>(9)</sup> Non è certa l'esistenza d'un tal sistema  $|C|$ . Cfr. CASTELNUOVO, loco cit.<sup>(8)</sup>.

tamente più ampio di  $|D|$  perchè questo sistema, essendo un fascio di curve razionali, non può essere sovrabbondante. Ma allora ogni curva formata da  $p - 1$   $E$  sarebbe aggiunta a  $|C|$  in tal guisa che  $|C'|$  non potrebbe essere il sistema completo aggiunto a  $|C|$ . Adunque il sistema  $|D|$  col quale in questo caso termina la successione degli aggiunti, non può avere punti base diversi da quelli di  $|C|$ .

In definitiva l'ipotesi fatta su  $|C'|$  risulta incompatibile coll'altra, che la successione degli aggiunti non abbia termine con  $|C|$ .

B) Proviamo ora che la trasformazione  $\mu$  la quale riduce  $\Lambda$  ad un sistema  $M$  d'ordine minimo non introduce, salvo il caso che  $\Lambda$  sia riducibile al tipo  $g$ ), alcuna curva fondamentale per il sistema  $S'$  trasformato di  $S$ , cioè che essa ha tutti i suoi punti fondamentali in punti base di  $\Lambda$ .

Infatti, come risulta dalle dimostrazioni del FERRETTI<sup>(10)</sup>, le successive trasformazioni che abbassano fino al minimo l'ordine di  $\Lambda$  hanno tutti i loro punti fondamentali in punti base di  $\Lambda$  e dei successivi suoi trasformati, se  $\Lambda$  è un sistema di curve razionali, cioè se è riducibile ai tipi  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$ ,  $d)$ ,  $e)$ ; negli altri casi invece quelle trasformazioni possono avere degli ulteriori punti fondamentali che diremo *eccezionali* in punti *generici* del piano.

Ora si osservi che ognuno di tali punti produce una curva fondamentale *semplice* (che si può supporre *isolata*) per il sistema  $M$ , e che i sistemi  $f)$ ,  $h)$  sono privi di siffatte curve fondamentali, mentre  $g)$  ha una sola retta fondamentale  $r$  contenente due punti base  $P$ ,  $Q$ .

Ne segue che nei casi  $f)$ ,  $h)$  i punti fondamentali eccezionali non possono presentarsi, e che nel caso  $g)$  esiste *al più* uno di questi punti da cui proviene la retta  $r$ . Dunque  $S'$  non può avere curve fondamentali semplici, eccetto che nel caso  $g)$ , in cui la retta  $r$  potrà essere fondamentale per  $S'$ ; e siccome essa è *semplice* ed *isolata*, così su essa vi saranno solo i due punti  $P$ ,  $Q$ , base per  $S'$ <sup>(11)</sup>.

Siccome la trasformazione  $T'$  deve lasciare unito il sistema  $g)$  che ha i soli punti base  $P$ ,  $Q$  e la curva fondamentale  $r$ , così essa sarà necessariamente antiproiettiva od antiquadratica (F. n.º 19) e perciò come al n.º 2 si

<sup>(10)</sup> Loco cit. (6). Cfr. i teoremi III, IV, V e le relative dimostrazioni, da cui dipendono i risultati dei teoremi VII, X, XII.

<sup>(11)</sup> Ogni punto base di  $M$  è base per  $S'$ , altrimenti proverrebbe da una curva fondamentale semplice di  $S$ .

potrà ridurre a tipo normale, conducendo al caso  $\alpha$ ) se  $T'$  è antiproiettiva ed  $r$  non è fondamentale per  $S'$ , al caso  $\beta$ ) nelle altre ipotesi.

C) Riduciamo ora la trasformazione  $T'$  in cui è unito  $M$  (ed  $S'$ ) ad un tipo normale  $\tau$  senza introdurre curve fondamentali semplici per il sistema  $\Sigma$  trasformato di  $S'$ .

Se  $M$  appartiene ad uno dei tipi  $a$ ),  $b$ ), la  $T'$  è certo antiproiettiva, e quindi si riduce immediatamente al coniugio.

Se  $M$  è uno dei sistemi  $d$ ),  $e$ ),  $T'$  dovrà lasciare unito l'unico sistema lineare di curve secanti in un sol punto variabile quelle di  $M$ , ch'è il fascio di rette col centro nel punto base  $n-1$ -plo per  $M$ , il quale è anche punto base per  $S'$ . Ci troviamo quindi ricondotti al caso  $c$ ).

Rimangono dunque da trattare le ipotesi corrispondenti ai casi  $c$ ),  $f$ ),  $h$ ).

Se  $T'$  lascia unito un sistema  $c$ ) essa si può, mediante successive trasformazioni quadratiche, ridurre ad una trasformazione antiquadratica priva di punti uniti<sup>(12)</sup>, ovvero ad una trasformazione d'ordine  $m$  ( $\geq 1$ ) con un punto fondamentale  $m-1$ -plo  $O$  e  $2(m-1)$  punti fondamentali semplici  $P_1, \dots, P_{2(m-1)}$  distinti od infinitamente vicini ad  $O$  in direzioni distinte e aventi ordinatamente per omologhe le rette  $p_1, \dots, p_{2(m-1)}$  ( $p_i = OP_i$ ) (F. n.º 11). Una siffatta trasformazione  $T''$  è di tipo normale, eccettuato se  $m=2$ ; e il sistema  $S''$  trasformato di  $S'$  acquista solo delle rette fondamentali (semplici) uscenti da  $O$  (F. n.º 10, 11, 19).

Dopo ciò, se  $m=1$ , cioè se  $T''$  è antiproiettiva si potrà ragionare come al n.º 3 (Caso III); se invece  $m > 1$  le rette fondamentali di  $S''$  si potranno far sparire operando come in F. n.º 19. Poichè mediante il procedimento di riduzione, la  $T''$  si muta in una trasformazione perfettamente analoga, lo scopo sarà raggiunto, salvo nel caso  $m=2$  in cui per ridurre la trasformazione a tipo normale bisognerà, dopo aver fatto sparire le rette fondamentali di  $S''$ , operare con una trasformazione quadratica la quale ci condurrà al caso  $\beta$ ) (cfr. n.º 3, caso II).

Infine immaginiamo che  $M$  appartenga ad uno dei tipi  $h$ ),  $f$ ). Si può allora supporre che i punti base di  $M$  siano tutti *distinti* e *generici* nel senso che non siano atti ad individuare curve fondamentali (non semplici) per  $M$ . Invero nell'ipotesi contraria, se  $M$  appartiene al tipo  $f$ ) si trova subito un

<sup>(12)</sup> Questo caso non ha alcun interesse per il seguito corrispondendo a superficie *prive di punti reali*. Ci dispensiamo dal trattarlo a parte, perchè il ragionamento che segue vale, con qualche avvertenza, anche per esso.

sistema di curve razionali unito in  $T'$  e avente tutti i suoi punti base in quelli di  $M$ , e quindi ci si può ricondurre ai casi già studiati; se invece  $M$  appartiene al tipo  $h$ ) si può trovare un sistema di curve razionali o ellittiche unito in  $T'$  e quindi si ricade nei casi precedenti ovvero nel caso  $f$ ). Ad esempio se  $M$  è una rete di curve ellittiche con tre punti base allineati risulta unito in  $T'$  il fascio di coniche individuato dagli altri quattro; e se tre fra questi sono pure allineati risulta unito il fascio di rette passante per il rimanente, ecc.

Le trasformazioni  $T'$  che lasciano unito uno dei sistemi  $h$ ),  $f$ ) hanno al più 8 punti fondamentali e perciò sono in numero finito; una qualunque fra esse, se non è di tipo normale, si lascia ricondurre a tale mediante successive trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali in punti base di  $M$  e che lo mutano in un sistema perfettamente analogo, fatta eccezione per il caso che  $T'$  o qualcuna delle sue trasformate sia antiquadratica; allora la riduzione di essa a tipo normale introduce una retta fondamentale per il sistema  $\Sigma$  trasformato di  $S'$  e riporta al caso  $\beta$ ).

Non crediamo opportuno intrattenerci sull'elenco delle possibili trasformazioni e sulla loro riduzione a tipo normale perchè ognuno potrà con facilità rendersi conto, caso per caso, della verità di quanto abbiamo asserito. Solo osserviamo in proposito che mai potrà sorgere dubbio circa la non esistenza di trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali in tre qualunque fra i punti base di  $M$  o dei suoi trasformati, perchè, in virtù dell'ipotesi fatta sopra, tali punti sono sempre distinti e mai allineati<sup>(13)</sup>.

La possibilità d'una rappresentazione piana normale per ogni superficie razionale reale, enunciata dal teorema del n.º 1, risulta in definitiva dimostrata; ne vedremo chiaramente più tardi l'importanza fondamentale per lo studio delle proprietà di connessione di quelle superficie.

---

<sup>(13)</sup> Un elenco delle trasformazioni che possono lasciar unito un sistema  $f$ ) trovasi in F. al n.º 33. Da esso si può desumere senza gran difficoltà, operando p. es. col procedimento di successiva aggiunta sul sistema lineare unito ch'è determinato da una retta e dalla curva omologa, l'esistenza di sistemi di curve razionali uniti in quelle trasformazioni che non sono di tipo normale. Mediante la considerazione di quei sistemi la riduzione si effettua rapidamente.



## § 2.

## GENERALITÀ SULLA CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE.

5. In questo paragrafo e nel seguente ci proponiamo di precisare il campo delle proprietà di cui intendiamo occuparci, stabilendo per esse e per gli enti a cui si riferiscono, alcune definizioni ed osservazioni fondamentali intese a chiarire il punto di vista delle nostre ricerche: ed inoltre enunciando o provando per via diversa alcune fra le più importanti proposizioni appartenenti alla teoria della connessione, di cui poi dovremo fare uso corrente.

Considereremo sempre *superficie reali, finite od infinite, appartenenti ad uno spazio (euclideo) dotato d'un numero qualunque ( $\geq 3$ ) di dimensioni e composte d'una o più falde distinte.*

Benchè il significato di tali locuzioni sia di per sè abbastanza chiaro, crediamo opportuno, anche in vista degli ulteriori sviluppi, di determinarlo più nettamente.

Perciò, indicando con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  coordinate non omogenee di punto in un  $S_n$ , partiamo dalle formole

$$x_1 = \xi_1(u, v), \quad x_2 = \xi_2(u, v), \dots, x_n = \xi_n(u, v), \quad (1)$$

nelle quali  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  sono funzioni reali delle variabili reali  $u, v$ , uniformi, finite, e derivabili nei punti d'una certa regione  $R$  del piano  $u, v$ . Assunta entro  $R$  un'area  $A$  *semplicemente connessa* (cioè racchiusa da un contorno  $c$  finito, chiuso, e privo di nodi) entro la quale la matrice funzionale delle  $x$  rispetto alle  $u, v$  non si annulli mai, indichiamo con  $E$  l'insieme dei punti di  $S_n$  che, mediante le (1), corrispondono ai punti di  $A$  contorno incluso, con  $C$  quelli che rispondono ai punti di  $c$ .

Diremo allora che  $E$  è una *falda* ovvero un *pezzo, elementare*, appartenente ad  $S_n$  e *limitato dal contorno*  $C$ .

Possiamo estendere tale definizione, convenendo di considerare come falda elementare di  $S_n$  l'insieme dei punti — propri od impropri — che corrispondono in un'omografia reale non degenera a quelli d'una falda elementare  $E'$ , definita nel modo anzidetto ed appartenente ad uno spazio  $S'_n$  di

coordinate non omogenee  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Ciò equivale a sostituire, nella definizione di  $E$ , in luogo delle (1) le formole più generali

$$\eta_1 = \mathfrak{S}_1(u, v), \quad \eta_2 = \mathfrak{S}_2(u, v), \dots, \eta_n = \mathfrak{S}_n(u, v), \quad (2)$$

in cui le  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  son funzioni lineari fratte, collo stesso denominatore, delle  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tali che l'omografia fra  $S_n$  ed  $S'_n$ , ch'è definita dalle formole

$$y_1 = \eta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n = \eta_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

non risulti degenerare.

Due falde elementari  $E, E_1$ , appartenenti entrambe ad  $S_n$  ed aventi una parte superficiale in comune il cui contorno sia tutto formato da parti dei contorni di  $E, E_1$ , si diranno una il *prolungamento analitico* dell'altra<sup>(14)</sup>. L'insieme di un *numero finito* di falde elementari  $E_1, E_2, \dots, E_n$  appartenenti ad  $S_n$  e tali che da ciascuna di esse si possa passare mediante una catena di prolungamenti analitici ad una qualunque delle altre, si dirà una *falda superficiale* o, più brevemente, una *falda  $F$*  appartenente ad  $S_n$ <sup>(15)</sup>. Col nome di *superficie* denoteremo, più in generale, l'insieme di un numero finito di falde appartenenti allo stesso spazio.

È ben chiaro cosa si debba intendere per *intorno* di un punto  $P$  sopra una falda elementare  $E$  di cui  $P$  sia punto interno; ed è pure ovvio come un punto  $P$  di una falda  $F$  possa avere su essa più intorni distinti appartenenti a distinte falde elementari per  $P$ .

Se invece  $P$  si trova sul contorno d'una falda elementare, ad esempio di  $E_1$ , e non appartiene contemporaneamente a qualche altra falda elementare che sia prolungamento analitico di  $E_1$ , si dirà che esso, in quanto appartiene ad  $E_1$ , è un *punto di frontiera* della falda  $F$ .

Una curva chiusa, tutta composta di punti di frontiera si dirà un *orlo*

<sup>(14)</sup> Cfr. POINCARÉ, *Analysis Situs* [Journal de l'École Polytechnique (2), I (1895), pp. 1-123], p. 10. L'illustre A. suppone però che le funzioni  $\mathfrak{S}_i$  delle (1) siano *analitiche*. Le condizioni da noi imposte al contorno della parte comune ad  $E, E_1$  introdotte per evitare che nelle falde considerate si presentino punti o linee di *biforcazione*, risultano in tal caso superflue.

<sup>(15)</sup> L'ipotesi che  $F$  sia composta d'un numero *finito* di pezzi elementari esclude dalle nostre considerazioni falde del tipo di quella che si otterrebbe p. es. congiungendo due fogli piani mediante un'infinità numerabile di tubi. Tale esclusione trovasi fatta (più o meno esplicitamente) in quasi tutte le ricerche sulla connessione delle superficie.

di  $F$ . Si dimostra senza difficoltà che la frontiera totale di  $F$  si compone d'un numero finito  $r$  di orli; se  $r = 0$  la falda si dirà *chiusa*.

Le superficie algebriche *prive di punti multipli* sono composte d'un numero finito di falde chiuse, ciascuna delle quali rientra nella nostra definizione <sup>(16)</sup>.

6. Consideriamo ora due falde elementari  $E, E'$  appartenenti rispettivamente ad  $S_n, S'_n$ , e definite, nella maniera più generale, dalle equazioni

$$\eta_i = \mathcal{S}_i(u, v), \quad \eta'_i = \mathcal{S}'_i(u' v'), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(le  $\eta, \eta'$  essendo funzioni lineari fratte, collo stesso denominatore per ciascun gruppo, delle coordinate non omogenee di  $S_n, S'_n$ ), in corrispondenza a due aree  $A, A'$ , semplicemente connesse, appartenenti ai piani  $uv, u'v'$ . Se le  $u', v'$  si possono considerare come funzioni reali, uniformi, finite e derivabili delle  $u, v$  in tal guisa che mentre il punto  $(u, v)$  descrive  $A$  il punto corrispondente  $(u', v')$  descriva *tutta* l'area  $A'$  e il determinante funzionale delle  $u', v'$  rispetto alle  $u, v$  non si annulli mai (cioè le funzioni  $u', v'$  delle  $u, v$  siano invertibili), diremo che *tra*  $E, E'$  (in quanto si considerano omologhi due punti che provengono da valori corrispondenti dei parametri) *intercede una corrispondenza biunivoca, continua, priva di eccezioni*.

Lo stesso si dirà di due falde  $F, F'$  se esse sono riferite in modo che ai punti di un pezzo elementare scelto ad arbitrio entro la prima, corrispondano, nel modo suddetto, i punti di un analogo pezzo della seconda. *Due tali falde si considereranno come equivalenti dal punto di vista della connessione*, e si chiameranno brevemente *equivalenti*.

Le proprietà che noi considereremo come *inerenti alla connessione* sa-

---

<sup>(16)</sup> Ciò si può p. es. ricavare, con qualche lieve aggiunta, dalla dimostrazione di POINCARÉ, loco cit. <sup>(14)</sup>, p. 11, 14. Si potrebbe dimostrare che nella definizione data sopra rientrano anche le falde delle superficie algebriche dotate di *linee multiple ordinarie*, ma per ora ciò a noi non preme perchè ci riserviamo di precisare in seguito, mediante la risoluzione delle singolarità per le superficie razionali, il comportamento di esse di fronte alle proprietà di connessione. Se si volesse estendere la definizione anche alle falde con singolarità isolate, bisognerebbe considerare anche il caso che, nelle (1), la matrice funzionale delle  $x$  rispetto alle  $u, v$  fosse nulla in qualche punto dell'area  $A$ . Cfr. H. v. MANGOLDT, *Die Begriffe « Linie » und « Fläche »* [Encyclopädie der Math. Wiss., ecc., Leipzig, Teubner (1907), III<sub>1</sub>, pp. 130-152], p. 150.

ranno dunque quelle che sono *invarianti* di fronte alle trasformazioni biunivoche suddette <sup>(17)</sup>.

7. Una prima distinzione fondamentale che ha valore di fronte alle trasformazioni considerate ed è perciò inerente alla connessione, è quella delle falde in *bilatere* ed *unilatera*. Tale distinzione si può stabilire, seguendo POINCARÉ <sup>(18)</sup>, mediante considerazioni analitiche connesse alla definizione di falda

---

<sup>(17)</sup> La considerazione delle proprietà inerenti alla connessione, sotto questo punto di vista — ch'è il più generale — trovasi, almeno per superficie finite, in MÖBIUS, *Theorie der elementaren Verwandtschaft* [Gesammelte Werke, Leipzig, Hirzel (1886)], Bd. II, p. 435, e successivamente in vari Autori, fra cui crediamo di dover citare JORDAN, *Sur la déformation des surfaces* [Journal de Mathématiques pures et appliquées (2), XI (1866), pp. 105-109] che considera le trasformazioni biunivoche, ecc. (nel campo finito) come equivalenti (per definizione) alle deformazioni (con estensione), e POINCARÉ, loco cit. <sup>(14)</sup>, p. 7-9, che introduce la denominazione di « *homéomorphes* » per due superficie o varietà equivalenti nel senso suddetto. Per il caso di superficie infinite — ch'è poi il nostro, — la distinzione fra il punto di vista più generale, ed altri punti di vista particolari, fu messa in luce da KLEIN, *Ueber den Zusammenhang der Flächen* [Mathematische Annalen, XI (1876), pp. 476-482], pp. 478, 479, che introdusse la denominazione di *absolute* per quelle proprietà di connessione che rimangono invariate di fronte alle trasformazioni più generali, e di *relative* per quelle che non si alterano, soltanto se si opera con un gruppo particolare di trasformazioni aventi ad es. relazione collo spazio o con qualche varietà collegata alla data. Cfr. DYCK, *Beiträge zur Analysis Situs* [Mathematische Annalen, XXXII (1888), pp. 457-512], p. 457. Sono ad esempio *proprietà relative* quelle che si riferiscono al punto di vista *proiettivo* della connessione, cioè che rimangono invariate per *deformazioni nel campo finito e collineazioni reali* e che sono state considerate dallo stesso KLEIN nei lavori *Ueber Flächen dritter Ordnung* [Mathematische Annalen, VI (1873), pp. 551-581] da p. 578 a 581, *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* [Mathematische Annalen, VII (1874), pp. 549-557]. In relazione a tale punto di vista le falde si possono distinguere in *dispari*, *pari con curve dispari* e *pari senza curve dispari*. Così ad esempio l'*iperboloide ad una falda* ed il *toro* sono due falde pari, di cui la prima contiene curve dispari (generatrici) e la seconda no; e pertanto esse sono *distinte* dal punto di vista proiettivo, mentre, come vedremo, *non lo sono* dal punto di vista assoluto. Un altro punto di vista, che si potrebbe dir *metrico*, è quello nel quale i punti impropri delle falde si considerano come *frontiere*, pur rimanendo la possibilità di poter deformare le falde nel campo finito: ad esso possono ascrivere i lavori di SEVERI, *Sulla forma delle rigate cubiche* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXII (1903), pp. 863-879] e TORELLI (R.), *Sulle proprietà di connessione delle superficie monoidali* [Atti della R. Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli (2), XIV (1910)]. Nel primo di questi lavori si trovano alcuni tipi metrici di rigate cubiche *bilatere*, mentre, come si vedrà, tali rigate sono, dal punto di vista assoluto, *tutte unilatera*.

<sup>(18)</sup> Loco cit. <sup>(14)</sup>, § 8.

data al n.º 5; però crediamo ch'essa si renda più chiara — almeno nel caso delle superficie — seguendo una via geometrica.

Perciò, partendo da un punto  $P$  appartenente ad una falda  $F$ , immaginiamo di fissare un verso nel fascio degli elementi lineari che escono da  $P$  ed appartengono ad un determinato intorno di esso; segnandolo per esempio sopra una piccola curva chiusa — che, seguendo KLEIN, denomineremo *indicatrice* — assimilabile ad un cerchietto che racchiuda nel suo interno  $P$  ed appartenga all'intorno considerato. Al muoversi di  $P$  sopra  $F$  potremo immaginare che esso si trascini seco l'indicatrice, e che il verso relativo si deduca per continuità da quello di partenza.

Supponiamo ora che  $P$  si muova lungo una curva chiusa  $\sigma$  appartenente ad  $F$  descrivendola tutta una sola volta partendo da una posizione iniziale e ritornandovi (nel medesimo intorno)<sup>(19)</sup>. Il verso dell'indicatrice potrà, a operazione compiuta, *coincidere* con quello iniziale, ovvero *essere invertito*.

Se la prima circostanza si presenta per *tutte* le curve chiuse che si possono tracciare su  $F$ , si dirà che tale falda è *bilatera*; se invece per qualche curva si presenta la seconda circostanza la falda  $F$  si dirà *unilatera*<sup>(20)</sup>.

Sono importanti alcune proprietà *caratteristiche* delle falde unilateri, che si deducono senza difficoltà dalla definizione, e che ci limitiamo ad enunciare:

È unilatera ogni falda  $F$  sulla quale esista una curva chiusa  $\sigma$  dotata della proprietà di invertire un verso fissato inizialmente sulla normale ad  $F$  (o una faccia del piano tangente), quando, dopo aver descritta interamente  $\sigma$ , si ritorni alla posizione di partenza.

Se  $\sigma$  ha punti impropri, all'atto del passaggio per ognuno di essi conviene scambiare tra loro i due versi della normale, o le due facce del piano tangente.

È pure unilatera ogni falda la quale contenga un sistema *continuo* di

(19) Non crediamo sia il caso di entrare in dettagli sulla definizione di *curva chiusa* tracciata su  $F$ , avvertendo però che intendiamo di includervi anche le curve chiuse *infinite*. Volendo, all'atto del passaggio di  $P$  per una posizione impropria, seguire il verso dell'indicatrice, basterà riferirsi ad una conveniente trasformata omografica di  $F$ .

(20) È noto che tal distinzione si deve a MÖBIUS, *Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* [Werke, Bd. II, pp. 476-512], pp. 483-485, *Zur Theorie der Polyeder und Elementarverwandschaft* [Ibid. Bd. II (Nachlass), pp. 517-559], I. *Einseitige Polyeder*, pp. 519-521, III. *Flächen und Polyeder höherer Classen*, p. 552; però, come abbiamo sopra accennato, l'uso dell'indicatrice fu introdotto da KLEIN nella citata Memoria *Ueber den Zusammenhang*, ecc. dei Math. Ann. XI. Il primo studio completo sulle superficie unilateri fu fatto da ДУСК nei citati *Beiträge*.

curve chiuse secantisi due a due in un numero *dispari* di punti; in particolare lo è il *piano illimitato (proiettivo)*, in quanto su esso le rette godono della proprietà anzidetta<sup>(21)</sup>.

Se si taglia una falda unilatera lungo una curva chiusa  $\sigma$  dotata della proprietà di invertire l'indicatrice, la falda acquista *un solo orlo* in corrispondenza a quel taglio; e reciprocamente lungo una curva dotata di siffatta proprietà l'indicatrice s'inverte. In tale condizione si trovano ad esempio le rette di un piano in quanto i due bordi (distinti in senso metrico) d'un taglio eseguito lungo una di esse si possono considerare come limiti dei due rami di un'iperbole, e perciò costituiscono un'*unica* curva chiusa.

8. Alle proprietà di connessione delle superficie composte di una o più falde, sono collegati alcuni invarianti numerici (interi) dotati di notevole importanza. Prima di occuparci della loro definizione sarà opportuno spendere qualche parola intorno ad alcune operazioni di uso corrente nella teoria della connessione.

Chiameremo *segmento trasversale* ogni segmento semplicemente connesso (cioè deformabile in un segmento rettilineo), privo di nodi, appartenente ad una falda  $F$  e avente gli estremi in due punti di frontiera. Un taglio eseguito lungo un segmento siffatto si dirà *taglio trasversale (Querschnitt)*, di 1.<sup>a</sup> o 2.<sup>a</sup> specie secondo che gli estremi appartengono ad un medesimo orlo o a due orli diversi di  $F$ . Si dirà invece che in  $F$  s'è *aperto un buco* quando la si taglia lungo un segmento semplicemente connesso, interno ad essa compresi gli estremi.

Infine chiameremo *taglio chiuso (Rückerschnitt)* ogni taglio eseguito in  $F$  lungo una curva chiusa ad essa interna; di 1.<sup>a</sup> o 2.<sup>a</sup> specie secondo che esso dà origine a due oppure ad un solo orlo, cioè secondo che lungo quella curva il verso dell'indicatrice si conserva ovvero s'inverte<sup>(22)</sup>.

(21) Questa proprietà del piano illimitato fu esplicitamente notata da KLEIN in un'osservazione contenuta nella citata Memoria *Ueber Flächen*, ecc., dei Math. Ann. VI, relativa ad un lavoro di SCHLÄFLI, *Quand'è che dalla superficie generale di terzo ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale?* [Annali di Matematica (2), V (1871-73), pp. 289-295]; e chiarita ulteriormente da SCHLÄFLI, *Correzione*, ecc. (alla Memoria precedente) [Annali di Matematica (2), VII (1875-76), pp. 193-196] e dallo stesso KLEIN nella citata Memoria dei Math. Ann. VII a p. 550.

(22) Si badi bene che un taglio chiuso eseguito lungo un circuito riducibile per deformazione continua ad un punto non equivale ad un buco in quanto spezza la falda su cui è eseguito in *due* parti. Cfr. in proposito la Nota (24).

Premesso ciò passiamo a definire tre numeri collegati alle proprietà di connessione delle superficie: il *numero caratteristico* o *caratteristica*  $K$ , il *genere*  $p$ , l'*ordine di connessione*  $Z$ .

Consideriamo dapprima una falda  $F$  su cui si sia tracciata una rete di un numero finito  $\alpha_2$  di poligoni (curvilinei), ciascuno dei quali si possa considerare come un pezzo elementare di  $F$ , aventi complessivamente  $\alpha_1$  lati ed  $\alpha_0$  vertici. Il numero intero

$$K = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2, \quad (3)$$

risulta *indipendente* dalla rete considerata e si chiama *numero caratteristico* o *caratteristica* della falda  $F$ .

Se una superficie  $S$  è composta di  $m$  falde distinte  $F_1, F_2, \dots, F_m$  aventi le caratteristiche  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , si dirà caratteristica di  $S$  il numero

$$K = \sum_{i=1}^m K_i, \quad (4)$$

somma delle caratteristiche delle sue parti (*principio d'addizione delle caratteristiche*)<sup>(23)</sup>.

La caratteristica d'una superficie  $S$  diminuisce di 1 per effetto d'un taglio trasversale, aumenta di 1 per effetto d'un buco, non si altera per effetto d'un taglio chiuso, e inversamente<sup>(24)</sup>.

Ritorniamo ancora alla considerazione d'una falda  $F$ , dotata di  $r$  orli. Diremo *genere* di  $F$  il numero intero  $p$  che si ricava dalle formole

$$\left. \begin{aligned} K &= 2p + r - 2, & \text{per le falde bilatere,} \\ K &= p + r - 2, & \text{per le falde unilatere}^{(25)}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

<sup>(23)</sup> Per la definizione stabilita dalla (3) cfr. DEHN ed HEEGAARD, *Analysis Situs* [Encyclopädie der Math. Wissenschaften, ecc. (Leipzig, Teubner, 1907), III<sub>1</sub>, pp. 153-220], pp. 195-196. Il numero caratteristico fu definito in altro modo e studiato da ДЫСК nei citati *Beiträge*, dove trovasi enunciato e dimostrato il principio d'addizione; va però notato che il numero  $K''$  di ДЫСК è eguale e di segno contrario al nostro  $K$ .

<sup>(24)</sup> Così ad es. la *chiusura* d'un buco diminuisce di 1 la caratteristica. Non sarà inopportuno osservare che se il taglio eseguito stacca da  $S$  un pezzo, questo va contato come parte della superficie  $S'$  ottenuta. Così se si taglia una sfera  $S$  lungo un cerchio massimo dividendola in due pezzi elementari (per ciascuno dei quali è  $K = -1$ ) la caratteristica non si altera a patto che si consideri come superficie  $S'$  l'insieme dei due pezzi. Per la sfera si ha dunque  $K = -2$ , cioè  $\alpha_0 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2$  (formola di EULERO).

<sup>(25)</sup> Cfr. DEHN ed HEEGAARD, loco cit. <sup>(23)</sup>, p. 199, ДЫСК, loco cit. <sup>(17)</sup>, pp. 477-479, DE PAOLIS, *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire fra i loro elementi*

esso risulta eguale al massimo numero dei tagli chiusi non segantisi due a due che si possono eseguire su  $F$  senza spezzarla. Sostituendo nelle (5) il valore di  $K$  dato dalle (3) si avranno le *formole di EULERO generalizzate*.

Chiameremo infine *ordine di connessione* d'una superficie  $S$  composta di  $m$  falde il numero

$$Z = K + 2, \quad (6)$$

di guisa che indicando con  $K_1, \dots, K_m$  le caratteristiche delle singole falde, con  $Z_1, \dots, Z_m$  i relativi ordini di connessione si avranno le importanti formole

$$Z = \sum_{i=1}^m K_i + 2, \quad (7)$$

$$Z = \sum_{i=1}^m Z_i - 2m + 2, \quad (8)$$

e, in particolare per  $m = 1$ ,  $r = 0$  (falde chiuse), tenendo conto delle (5), le relazioni

$$Z = 2p, \quad \text{per le falde bilatere}$$

$$Z = p, \quad \text{per le falde unilatera}^{(26)}.$$

Inoltre dalle proprietà del numero  $K$  e dalle formole scritte segue su-

[Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), VII (1890), pp. 82-84]. In questa Memoria non si trovano le formole (5), ma formole analoghe nelle quali, in luogo di  $K$  compare quello che l'Autore chiama *numero fondamentale*, ch'è poi il nostro ordine di connessione.

<sup>(26)</sup> È noto che il concetto e la definizione di ordine di connessione per le falde bilatere risalgono a RIEMANN che nella *Inauguraldissertation* (Göttingen, 1851) dal titolo *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grössen* [Gesammelte Mathematische Werke (Leipzig, Teubner, 1876), pp. 3-47] chiama  $n - m + 2$  volte connessa una falda bilatera *aperta* che sia divisa in  $m$  pezzi da  $n$  tagli trasversali. Per le falde *chiuse* lo stesso Autore nella *Theorie der Abel'schen Functionen* [Werke, pp. 81-135], p. 87, conviene di considerare come ordine di connessione il numero  $2p + 1$ , cioè quello della falda aperta che si ottiene dalla data praticandovi un piccolo buco. Cfr. APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* [Paris, Gauthier Villars, 1895], Cap. V. Una tale convenzione è da molti punti di vista impropria ed incomoda, e per primo SCHLÄFLI la modificò nella Memoria *Ueber die Relationen zwischen den  $2p$  Kreiswegen erster Art und den  $2p$  zweiter Art in der Theorie der Abel'schen Functionen der Herren Clebsch und Gordan* [Journal für reine und angewandte Mathematik, LXI (1873), pp. 149-155], Nota a p. 152, assumendo come ordine di connessione d'una falda chiusa il numero Riemanniano *diminuito di una*



bito che: L'ordine di connessione d'una superficie non si altera per effetto di un taglio chiuso, diminuisce di un'unità per ogni taglio trasversale, ed aumenta di un'unità per ogni buco aperto in una falda della superficie.

Sussiste poi la proprietà fondamentale seguente:

*Sopra una falda chiusa  $F$ , d'ordine di connessione  $Z$ , si possono trovare  $Z$  e non meno circuiti chiusi tali che ogni altro circuito chiuso di  $F$  sia omologo ad una loro combinazione lineare a coefficienti interi<sup>(27)</sup>.*

La dimostrazione di essa, per il caso delle falde bilatere, si conduce a termine facendo uso del noto modello costituito da una sfera con  $\frac{Z}{2} = p$  manichi<sup>(28)</sup>; per il caso delle falde unilateri, avremo occasione di occuparcene al paragrafo seguente in una discussione che metterà in rilievo alcune singolari differenze fra le falde bilatere e quelle unilateri.

Enunciamo infine il *teorema fondamentale della connessione*: *Condizione necessaria e sufficiente affinché due falde, entrambe bilatere od unilateri, siano equivalenti, è che abbiano lo stesso numero di orli e lo stesso ordine di connessione<sup>(29)</sup>.*

---

*unità.* Tale modificazione fu accettata e ulteriormente giustificata da KLEIN, *Bemerkungen*, ecc. (citata), Nota a p. 550, che chiamò « *ungewöhnlich* » il nuovo ordine di connessione, DYCK, *Beiträge*, ecc. (citata), pp. 483-485, NEUMANN C., *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'sche Integrale* [Leipzig, Teubner, 1884], Cap. VII, § 6 e 15. Differisce invece dalle precedenti la definizione di DE PAOLIS, loco cit.<sup>(25)</sup>, p. 84, benchè il suo *numero fondamentale* coincida col nostro ordine di connessione; invero questo Autore assume come ordine di connessione *per le falde chiuse* il numero fondamentale *aumentato di due unità*. Per il caso delle falde unilateri l'ordine di connessione fu per la prima volta definito (in modo esplicito) da DYCK nella Memoria più volte citata, p. 485, in relazione al punto di vista di KLEIN-SCHLÄFLI (cfr. le citazioni della nota<sup>(21)</sup>) ch'è quello di ridurre bilatere ogni falda unilatera considerandola come *doppia*, cioè contando ogni punto una volta come appartenente ad una faccia, e una seconda come appartenente all'altra. Tale ordine di connessione  $Z'$  è legato dalla relazione  $Z' = 2Z - 2$  (che avremo occasione di considerare in una ulteriore Nota) a quello da noi definito in accordo colle citate opere di NEUMANN, DE PAOLIS. La formola (8) trovasi per la prima volta nella citata Memoria di SCHLÄFLI, *Ueber*, ecc., Nota a p. 152; dimostrazioni di essa (relative a differenti punti di partenza per la definizione di  $Z$ ) si trovano nel trattato di NEUMANN a p. 160, teor. VIII e nella Memoria di DE PAOLIS a p. 78-79.

<sup>(27)</sup> Per il significato delle locuzioni qui usate rimandiamo al § 3, n.° 11.

<sup>(28)</sup> Vedi p. es. SEVERI, *Lezioni di Geometria Algebrica* [Padova, Draghi (1908)], n.° 79, pp. 272-277.

<sup>(29)</sup> Questo teorema fu stabilito, per le falde bilatere da JORDAN, loco cit.<sup>(17)</sup>, per quelle unilateri da DYCK, loco cit.<sup>(17)</sup>. Una dimostrazione indipendente dall'assegnare « a priori » i modelli delle falde unilateri (come ha fatto il DYCK) può leggersi nel citato Articolo dell'Enciclopedia di DEHN ed HEEGAARD.

OSSERVAZIONE. Non può sorgere dubbio circa la validità di questo teorema anche per le falde infinite. Invero ogni falda  $F$  di  $S_n$  può trasformarsi in una falda *finita*  $F'$  ad essa equivalente. Basta perciò trasformare  $F$  mediante il sistema di tutte le quadriche di  $S_n$ , riferendole, mediante una proiettività *reale*, agli iperpiani di un  $S_{n'}$  ( $n' = \binom{n+2}{2} - 1$ ) in modo che allo  $S_{n'-1}$  improprio di  $S_{n'}$  risponda in  $S_n$  una ipersfera col centro in un punto esterno ad  $F$  e raggio minore della minima distanza di questo punto da  $F$ . La  $F'$  si può poi proiettare in una falda  $F''$  *finita* appartenente allo spazio ordinario; e non è difficile far vedere che se il centro di proiezione è scelto genericamente la falda  $F''$  rientra anch'essa (come  $F'$  ed  $F$ ) nella definizione del n.º 5 ed è equivalente ad  $F'$ .

## § 3.

LE PROPRIETÀ DI CONNESSIONE CONSIDERATE DI FRONTE ALLE TRASFORMAZIONI CHE INTRODUGONO PUNTI FONDAMENTALI.

TEOREMA DI KLEIN. MODELLI. OMOLOGIE SULLE FALDE UNILATERE.

9. Veniamo ora a studiare l'influenza che hanno sulla connessione delle falde quelle trasformazioni che, pur essendo biunivoche senza eccezione fra gl'intorni di due punti generici, presentano in punti particolari determinate eccezioni. Per semplicità di trattazione supporremo, in tutto questo paragrafo, che si tratti di falde affatto prive di punti multipli, in modo che in ogni loro punto esista un unico intorno ben determinato.

Si trasformi una falda  $F$ , appartenente ad uno spazio qualunque, mediante il sistema di tutte le forme d'ordine sufficientemente elevato appartenenti a quello spazio, e passanti per un punto  $P$  di  $F$ . Si otterrà così una falda  $F'$  i punti della quale saranno in corrispondenza biunivoca continua con quelli di  $F$ ; anzi all'intorno di ogni punto  $Q$  di  $F$  *distinto da*  $P$  risponderà senza eccezioni l'intorno d'un punto  $Q'$  di  $F'$ , mentre ai punti di  $F$  infinitamente vicini a  $P$  nelle diverse direzioni risponderanno su  $F'$  punti d'una *curva chiusa*  $C'$ . E ciò in virtù di note proprietà sulle quali non ci sembra sia il caso d'insistere<sup>(30)</sup>.

<sup>(30)</sup> Come pure sul fatto che  $F'$  rientra nella definizione del n.º 5. Se  $F$  è algebrica e priva di punti multipli, lo è anche  $F'$ , e in tal caso la cosa è evidente. Cfr. la nota (16).

Lo stesso accadrà della corrispondenza tra  $F'$  ed una falda  $F_1$  equivalente ad  $F'$ , e ciò si esprimerà dicendo che tra  $F'$  ed  $F_1$  ha luogo una corrispondenza biunivoca continua, dotata (su  $F'$ ) del punto fondamentale (ordinario)  $P$  a cui risponde su  $F_1$  la curva fondamentale  $C$  (omologa di  $C'$  nella corrispondenza tra  $F'$  ed  $F_1$ ); ovvero più brevemente dicendo che la falda  $F_1$  è rappresentata sulla falda  $F'$  dotata del punto fondamentale  $P$ .

Si costruisca ora una falda  $F_2$  rappresentata sulla  $F_1$  dotata del punto fondamentale  $P'_2$  a cui corrisponda su  $F'$  un punto  $P_2$  che sarà infinitamente vicino a  $P'_1$ , se  $P_2$  cade sulla curva fondamentale  $C$  di  $F_1$ . Si avrà tra  $F'$  ed  $F_2$  una corrispondenza biunivoca continua dotata, su  $F'$ , dei due punti fondamentali (distinti od infinitamente vicini)  $P_1, P_2$  a cui corrisponderanno due curve distinte  $C_1, C_2$  di  $F_2$ .

Così procedendo arriveremo a costruire una falda  $F_m$  rappresentata sulla falda  $F'$  dotata di  $m$  arbitrari punti fondamentali  $P_1, P_2, \dots, P_m$  distinti od infinitamente vicini, a cui corrispondono su  $F_m$ ,  $m$  curve chiuse distinte  $C_1, C_2, \dots, C_m$ .

Ciò premesso diremo che tra due falde  $F, \Phi$  intercede una corrispondenza biunivoca continua dotata, su  $F$ , dei punti fondamentali  $P_1, P_2, \dots, P_m$  e su  $\Phi$  dei punti fondamentali  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , se due falde  $F_m, \Phi_n$ , la prima delle quali sia rappresentata su  $F'$  dotata dei punti fondamentali  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , la seconda su  $\Phi$  dotata dei punti fondamentali  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , risultano equivalenti.

Ora ci domandiamo: quale relazione intercede tra gli ordini di connessione di  $F, \Phi$ ?

Per rispondere alla questione proposta consideriamo il caso più semplice di due falde  $F, F_1$  legate da una corrispondenza biunivoca continua dotata su  $F'$  del punto fondamentale  $P$  a cui corrisponda la curva  $C_1$  di  $F_1$ . Siano  $Z, Z_1$  gli ordini di connessione di  $F, F_1$ .

Eseguiamo su  $F'$ , nel punto  $P$ , un forellino infinitesimo, ed indichiamo con  $F''$  la falda così ottenuta. Ad ogni direzione  $m$  uscente da  $P$  corrisponderanno su  $F''$  due punti  $A, B$  situati sull'orlo  $\Omega$  generato dal forellino (che si può supporre allargato riducendolo ad un circolo finito), e diametralmente opposti. Tagliamo inoltre  $F_1$  lungo  $C_1$  generando uno o due (nuovi) orli  $\Omega_1$ , e indichiamo con  $F'_1$  la falda così ottenuta: Ogni punto  $M$  di  $C_1$  si scinderà in due punti affacciati  $A_1, B_1$  appartenenti ad  $\Omega_1$ .

Si supponga ora che la direzione  $m$  ed il punto  $M$  siano omologhi nella corrispondenza che intercede fra  $F'$  ed  $F'_1$ ; allora ad un punto di  $F''$  che si

muove tendendo ad  $A$  corrisponderà un punto di  $F'$ , che si muoverà tendendo ad uno dei due punti  $A_1, B_1$ , per esempio ad  $A_1$ .

Movendosi con continuità il punto  $A$  lungo l'orlo  $\Omega$ , anche  $A_1$  varierà con continuità lungo  $\Omega_1$ , e poichè  $A, B$ , e analogamente  $A_1, B_1$  non coincidono *mai*, così mentre  $A$  descriverà  $\Omega$  ritornando alla posizione di partenza,  $A_1$  descriverà l'intera curva  $\Omega_1$  che risulterà dunque *un* (solo) *orlo* in corrispondenza biunivoca con  $\Omega$ .

Poichè la corrispondenza biunivoca tra  $F'$  ed  $F'_1$  (dedotta da quella tra  $F$  ed  $F_1$ ) non ha eccezioni fuori di  $\Omega$  ed  $\Omega_1$ , e di più, come abbiamo ora provato, questi orli si possono porre in corrispondenza biunivoca collegata con continuità a quella fra  $F'$  ed  $F'_1$ , così  $F'$  ed  $F'_1$  saranno *equivalenti*.

D'altronde l'ordine di connessione di  $F'_1$  è eguale a quello di  $F_1$  (n.º 8) mentre quello di  $F'$  è (per effetto del forellino) eguale a quello di  $F$  aumentato di una unità; si ha dunque

$$Z_1 = Z + 1.$$

Per passare da questa formola a quella relativa al caso più generale, basta osservare che due falde  $F$  e  $\Phi$  legate da una corrispondenza biunivoca continua dotata di un numero qualunque di punti fondamentali su  $F$  e su  $\Phi$ , si possono sempre considerare come estremi d'una successione di falde  $F, F_1, \dots, F_m, \Phi_n, \Phi_{n-1}, \dots, \Phi$  tali che a due consecutive fra esse si può applicare la relazione ora trovata (fatta eccezione per  $F_m$  e  $\Phi_n$  che sono equivalenti). Si giunge allora senza difficoltà al seguente *teorema* (di KLEIN<sup>(31)</sup>).

*Fra gli ordini di connessione  $Z, Z_1$  di due falde  $F, \Phi$  legate da una corrispondenza biunivoca continua dotata di  $m$  punti fondamentali su  $F$  e di  $n$  su  $\Phi$  ha luogo la relazione*

$$Z + m = Z_1 + n. \quad (9)$$

<sup>(31)</sup> *Bemerkungen*, ecc. (citata), pp. 556-557. La dimostrazione qui esposta è una semplificazione di quella di KLEIN, il quale tratta senz'altro il caso generale, lasciando però qualche dubbio per la validità del ragionamento nel caso che esistano punti fondamentali infinitamente vicini. Si badi che, volendosi porre dal punto di vista del suddetto Autore, se  $\Phi$  è unilatera ed  $F$  bilatera, bisogna considerare quest'ultima come insieme di due falde distinte e contare  $\Phi$  come doppia, cioè porre nella (9)  $2Z - 2$  in luogo di  $Z$ ,  $2m$ ,  $2n$  invece di  $m$ ,  $n$ , e sostituire a  $Z_1$  l'ordine di connessione  $Z'_1$  di (SCHLÄFLI) KLEIN-DICK. Si ha allora

$$Z'_1 + 2n = 2Z - 2 + 2m,$$

cioè  $Z'_1 = 2Z_1 - 2$  (cfr. la Nota<sup>(26)</sup>).

Ritornando ora al caso delle due falde  $F, F_1$  sopra considerate, osserviamo, che, siccome il taglio di  $F_1$  lungo  $C_1$  produce un solo orlo  $\Omega_1$ , così  $F_1$  è certo unilatera, il che d'altronde è confermato dal fatto che a piccoli circoletti di  $F$  passanti per  $P$  rispondono su  $F_1$  curve d'un medesimo sistema continuo segantisi in un punto. Procedendo analogamente si prova che:

*Se tra due falde  $F, \Phi$  intercede una corrispondenza biunivoca continua dotata di punti fondamentali sulla sola  $F$ , la falda  $\Phi$  è unilatera.*

La stessa conclusione vale se  $F$  contiene qualche punto fondamentale che non appartenga alle curve fondamentali omologhe dei punti fondamentali di  $\Phi$ .

10. Stabiliamo ora qualche conseguenza ed applicazione interessante del teorema dimostrato.

Mediante una proiezione stereografica si può rappresentare il piano sopra una sfera dotata di un punto fondamentale. Poichè la sfera è una falda (bilatera) d'ordine di connessione 0 ( $K = -2$ , cfr. la nota (<sup>24</sup>)), ne segue che il piano ha l'ordine di connessione 1.

Sia ora  $\Phi$  una falda unilatera chiusa d'ordine di connessione  $Z$ ,  $F$  una falda chiusa qualunque d'ordine di connessione  $Z - m$ . Segnati su  $F$   $m$  punti arbitrari (p. es. distinti)  $P_1, P_2, \dots, P_m$  si potrà costruire una falda  $F_1$  rappresentata sulla  $F$  dotata di quegli  $m$  punti fondamentali. In virtù del teorema precedente e dell'osservazione che lo segue, si conclude che  $F_1$  è una falda chiusa unilatera d'ordine di connessione  $Z$ , cioè, per il teorema fondamentale, ch'essa è equivalente a  $\Phi$ . Dunque:

*Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione  $Z$  si può rappresentare sopra un'arbitraria falda chiusa d'ordine di connessione  $Z - m$  dotata di  $m$  punti fondamentali.*

In particolare se  $m = 0$ , oppure  $m = 1$  si ha che:

*Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione  $Z$  si può rappresentare sopra una sfera dotata di  $Z$  punti fondamentali, ovvero sopra un piano dotato di  $Z - 1$  punti fondamentali.*

Se il numero  $m$  ha la stessa parità di  $Z$ , in tal guisa che  $Z - m$  sia pari, si può assumere come  $F$  una falda bilatera d'ordine di connessione  $Z - m$ , cioè una sfera con  $\frac{Z - m}{2}$  manichi. Il minimo valore possibile per  $m$  è 1 se  $Z$  è dispari, 2 se  $Z$  è pari, e quindi:

*Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione  $Z$  dispari si può rappresentare sopra una sfera con  $\frac{Z - 1}{2}$  manichi dotata di un punto fondamentale.*

Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione  $Z$  pari si può rappresentare sopra una sfera con  $\frac{Z-2}{2}$  manichi dotata di due punti fondamentali.

Sia  $P$  un punto fondamentale (isolato) della falda  $F$  a cui risponda su  $\Phi$  una curva chiusa  $C$ . Si immagini forata  $F$  nel punto  $P$  e allargato il foro in modo da ridurne il contorno ad un piccolo orlo circolare  $\Omega$  sul quale due punti diametralmente opposti corrispondono ad un unico punto di  $C$ . Si supponga poi che ogni punto di  $\Omega$  venga portato a coincidere col suo diametralmente opposto in tal guisa che due punti non diametralmente opposti si riguardino come distinti (altrimenti si ricadrebbe di nuovo nel punto fondamentale  $P$ ); con tale operazione si sarà sostituito a  $P$  un sistema di punti in corrispondenza biunivoca continua con  $C$ , mediante il quale si viene a togliere l'eccezione prodotta dal punto fondamentale  $P$  nella corrispondenza tra  $F$  e  $\Phi$ . Si dirà in tal caso che  $F$  ha, in corrispondenza a  $P$ , un *intreccio di 1.<sup>a</sup> specie* <sup>(32)</sup>.

Possiamo formarci un'idea concreta di esso, immaginando incurvato il circoletto  $\Omega$  come se lo si adattasse sopra una superficie cilindrica, e congiungendo le coppie di punti che su  $\Omega$  erano diametralmente opposti, mediante segmenti rettilinei ciascuno dei quali si consideri come una *linea di passaggio*, avendo l'avvertenza di riguardare come distinti i punti eventualmente comuni a due linee siffatte <sup>(33)</sup>.

Da quanto ora si è esposto risulta chiaramente che:

*Le falde  $F$  precedentemente considerate diventano equivalenti a  $\Phi$  se ai punti fondamentali si immaginano sostituiti altrettanti intrecci di 1.<sup>a</sup> specie.*

Si possono però ottenere dei *modelli* più espressivi per le falde unilatera facendo sparire l'eccezione alla corrispondenza tra  $F$  e  $\Phi$  prodotta dal punto fondamentale  $P$  a cui corrisponde la curva  $C$  di  $\Phi$  mediante il seguente procedimento:

Si deformi con continuità l'intorno di  $P$  riducendolo ad una mezza sferetta riunita ad  $F$  per il suo circolo massimo  $D$ , il quale abbia  $P$  come polo;

<sup>(32)</sup> La denominazione è di DE PAOLIS, loco cit. <sup>(26)</sup>, n.° 117, p. 69, ma la considerazione di tali intrecci, e di altri, detti da DE PAOLIS *intrecci di 2.<sup>a</sup> specie*, è dovuta a ДУСК, loco cit. <sup>(17)</sup>, p. 473.

<sup>(33)</sup> Questi punti costituiscono una *linea doppia* che si può considerare come *asse* dell'intreccio. La presenza d'una qualche singolarità non si può evitare perchè *non esistono falde unilatera chiuse finite, prive di singolarità*.

indi, mediante proiezione da  $P$  sul piano di  $D$  si trasformi la mezza sfera nella parte di quel piano esterna a  $D$ . Si sarà così sostituito all'intorno del punto fondamentale un foglio piano  $\pi$  che, dopo conveniente deformazione, si potrà immaginare riunito ad  $F$  mediante un tubo. Al punto fondamentale  $P$ , cioè alla curva  $C$  di  $\Phi$  corrisponderà la retta impropria di  $\pi$ . Dunque:

*Sostituendo ai punti fondamentali delle falde  $F$  precedentemente considerate, altrettanti fogli piani, ciascuno dei quali sia riunito ad  $F$  mediante un tubo, si ottengono delle falde equivalenti a  $\Phi$ .*

In particolare se  $\Phi$  ha l'ordine di connessione  $Z$  dispari, si può, come abbiám visto, supporre, che  $F$  sia una sfera con  $\frac{Z-1}{2}$  manichi ed un punto fondamentale; operando su questo come precedentemente si giunge, dopo facili deformazioni, ai modelli seguenti:

*Ogni falda unilatera chiusa d'ordine di connessione  $Z$  dispari è equivalente ad un foglio piano con  $\frac{Z-1}{2}$  manichi, ovvero allo stesso foglio riunito ad una sfera per mezzo di  $\frac{Z+1}{2}$  tubi, oppure ancora ad un piano sormontato da un ponte a  $\frac{Z-1}{2}$  archi.*

Se invece  $Z$  è pari partendo dalla falda bilatera  $F$ , d'ordine di connessione  $\frac{Z-2}{2}$  dotata di due punti fondamentali, si arriva, in modo analogo, al risultato seguente:

*Ogni falda unilatera chiusa, d'ordine di connessione  $Z$  pari, è equivalente all'insieme di due fogli piani, riuniti per mezzo di  $\frac{Z}{2}$  tubi.*

Risultati simili si possono stabilire per le falde unilateri dotate di orli. Così ad es. la nota *superficie di Möbius* si può rappresentare sopra una sfera dotata di un foro e di un punto fondamentale, cioè sopra un elemento piano (ad es. l'area interna ad una circonferenza) con un punto fondamentale.

11. Ed ora occupiamoci di alcune importanti proprietà dei circuiti chiusi tracciati sopra una falda unilatera chiusa  $F$ , aventi relazione col concetto d'*omologia*. Queste proprietà, come parecchie fra quelle già studiate finora, non troveranno diretta applicazione nel seguito; però, siccome le crediamo nuove, e d'altronde servono a completare l'esposizione dei principali risultati inerenti alla connessione delle superficie, non ci è parso inutile dar loro posto in questa Memoria.

Per lo studio delle proprietà in questione, è assai utile valersi della rappresentazione d'una falda unilatera  $F$ , d'ordine di connessione  $Z$ , sopra una sfera  $S$  dotata di  $Z$  punti fondamentali  $P_1, P_2, \dots, P_Z$ , e tener conto dell'osservazione seguente:

*La condizione necessaria e sufficiente affinché un cammino chiuso tracciato su  $F$  inverta l'indicatrice, è che il suo corrispondente su  $S$  passi un numero dispari di volte per i punti fondamentali, la cui verità consegue subito dal fatto che quel cammino appartiene ad una famiglia di circuiti chiusi (i cui corrispondenti su  $S$  hanno lo stesso comportamento nei punti fondamentali), due a due segantisi in un numero dispari di punti.*

Se ne deduce p. es. che:

*Ogni falda chiusa unilatera  $F$  si può ridurre bilatera mediante un sol taglio chiuso. Esso produce un solo orlo se l'ordine di connessione di  $F$  è dispari, due se esso è pari<sup>(84)</sup>.*

Basta invero eseguire il taglio lungo un circuito il cui corrispondente su  $S$  passi una volta per tutti i punti fondamentali, ed osservare che ogni altro circuito chiuso di  $S$  il quale non incontra quello già segnato fuori dei punti fondamentali, deve passare un numero *pari* di volte per quei punti.

Rivolgiamoci ora allo studio delle *omologie* fra circuiti chiusi appartenenti alla nostra falda unilatera  $F$ . E anzitutto precisiamo, perchè ne vale la pena, cosa si debba intendere per circuiti omologhi su  $F$ .

Limitiamoci a considerare, ciò che del resto non è restrittivo, soltanto circuiti *omologhi a zero*. Secondo POINCARÉ<sup>(85)</sup> si definisce come tale *un circuito  $C$  il quale costituisca la frontiera completa d'una falda  $\Phi$  che sia parte di  $F$* , e si scrive  $C \sim 0$ .

Nel caso delle *falde bilatere* si può anche definire come omologo a zero *un circuito  $C$  il quale sia riducibile ad un punto per deformazione continua operata su  $F$* <sup>(86)</sup>, giacchè si prova che tal definizione è equivalente alla pre-

<sup>(84)</sup> Cfr. DEHN ed HEEGAARD, loco cit. (25), pp. 199-202.

<sup>(85)</sup> Loco cit. (14), § 5. Se alle parole *un circuito  $C$  il quale* si sostituiscono le altre *un circuito  $C$  tale che esso o un suo conveniente multiplo intero* (con che si ammette per definizione che dalla omologia  $mC \sim 0$  si tragga  $C \sim 0$ ) si ottiene un'altra definizione dovuta allo stesso POINCARÉ, *Complément à l'Analysis Situs* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, XIII (1899), pp. 285-343], pp. 285-287.

<sup>(86)</sup> Cfr. p. es. SEVERI, loco cit. (28), p. 273. S'intende che durante la deformazione il circuito si potrà spezzare in più parti. Riterremo lecito nel seguito aggiungere a  $C$  delle linee percorse una volta in un senso e una volta nell'altro, giacchè si prova subito che, con ambedue le definizioni, se è  $C \sim 0$ , lo è anche il circuito  $C'$  dedotto, e reciprocamente.



cedente. Per amore di brevità, non ci tratteniamo sulla dimostrazione, che del resto è semplice.

Non ci sembra invece privo di interesse dimostrare *che le due definizioni non sono equivalenti se la falda  $F$  è unilatera.*

Allo scopo, premettiamo due osservazioni.

Quando mediante una deformazione continua si vuol ridurre un circuito  $C$  (ovvero un circuito ottenuto da  $C$  coll'aggiunta di linee percorse una volta in un senso e una nell'altro) ad un punto, le sue intersezioni con un altro circuito chiuso  $D$  debbono, durante la deformazione, sparire due a due. Perciò se il numero delle intersezioni di  $C$  e  $D$  è *dispari* nè  $C$  nè  $D$  possono ridursi per deformazione continua ad un punto.

Supponiamo che il circuito  $D$  non inverta l'indicatrice, cioè che tagliando  $F$  lungo  $D$  si producano *due* orli. Rispetto a  $D$  si potranno distinguere allora due *lati* di  $F$  (destro e sinistro), attribuendo ad uno di essi quei punti vicini a  $D$  che stanno alla destra di un osservatore il quale disposto lungo la normale ad  $F$  (sopra una determinata faccia) guardando un verso segnato su  $D$ , la percorra in quel verso; all'altro lato quelli che stanno alla sinistra dell'osservatore medesimo.

Sia ora  $C$  un circuito chiuso di  $F$ ,  $P$  un punto comune a  $C$  e  $D$ .

Fissato su  $C$  un verso di percorrenza, indichiamo con  $S(P)$  l'unità positiva o negativa secondo che descrivendo  $C$  nel verso fissato si passa in  $P$  dal lato sinistro al lato destro di  $F$  rispetto a  $D$ , ovvero viceversa; indi poniamo con POINCARÉ  $N(C, D) = \sum S(P)$ , la sommatoria essendo estesa a tutti i punti comuni a  $C$  e  $D$ .

Ora è evidente che  $N(C, D)$  non si altera aggiungendo a  $C$  delle linee percorse una volta in un senso e una nell'altro, ed è facilmente dimostrabile che esso non si altera neppure per una deformazione continua di  $C$ . Invero è ovvio che  $N(C, D)$  non muta finchè qualcuno dei punti comuni a  $C$  e  $D$  non viene a sparire; e d'altronde la scomparsa di un punto  $P$  siffatto non può effettuarsi se prima esso non coincide con un analogo punto  $Q$  tale che  $S(P) = -S(Q)$ .

Da ciò segue subito che:

*Condizione necessaria affinchè il circuito  $C$  sia riducibile ad un punto per deformazione continua è che sia  $N(C, D) = 0$  <sup>(37)</sup>.*

---

<sup>(37)</sup> POINCARÉ, loco cit. <sup>(14)</sup>, § 9, dimostra, per le falde bilatere, la sufficienza di tal condizione; però il ragionamento dell'Autore (inteso a provare che se è  $N(CD) = 0$  è  $C \sim 0$  nel senso sopra riportato) non è rigoroso. Vedi la Memoria dello stesso Autore citata <sup>(35)</sup>.

Consideriamo ora una falda unilatera  $F$ , d'ordine di connessione  $\mathfrak{2}$ , rappresentata sopra una sfera  $S$  dotata di due punti fondamentali  $P_1, P_2$  (Fig. 1) e su essa un circuito  $C$  il cui corrispondente su  $S$ , che indicheremo ancora con  $C$ , passi due volte per il punto fondamentale  $P_1$ .

Tagliando  $F$  lungo  $C$  essa si spezza in due parti  $F', F''$  corrispondenti alla regione non tratteggiata  $S'$  ed a quella tratteggiata  $S''$ , su ciascuna delle quali, come si vede dalla figura,  $C$  costituisce la frontiera completa. Dunque secondo la definizione di POINCARÉ è  $C \sim 0$ .

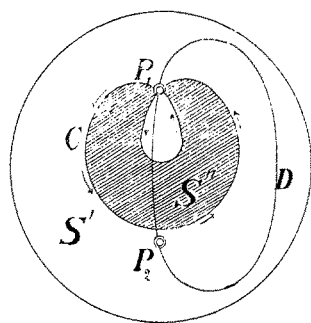


Fig. 1.

Si consideri ora un circuito  $D$  di  $F$  il cui corrispondente,  $D$ , di  $S$  passi semplicemente per  $P_1, P_2$ . In virtù d'un'osservazione precedente possiamo affermare che lungo  $D$  l'indicatrice non s'inverterà, e dalla figura si trarrà subito  $N(C, D) = \mathfrak{2}$ . Perciò il circuito  $C$  non è riducibile ad un punto per deformazione continua.

Constatata in tal guisa la non equivalenza delle due definizioni, sceglieremo per le nostre ricerche la seconda fra esse, chiamando omologhi due circuiti d'una falda unilatera quando siano riducibili uno all'altro per deformazione continua operata sulla falda stessa. Riterremo lecito, quando ci tornerà comodo, aggiungere o togliere all'uno o all'altro dei due circuiti delle linee percorse nei due sensi.

Consideriamo ora una falda unilatera  $F$ , d'ordine di connessione  $Z$ , rappresentata sopra una sfera  $S$  dotata di  $Z$  punti fondamentali  $P_1, P_2, \dots, P_Z$ . Indichiamo con  $K_i$  un piccolo circolo di  $S$  non racchiudente nell'interno alcuno dei punti fondamentali e passante per  $P_i$ , con  $C_i$  il circuito corrispondente di  $F$ . Fissiamo su ciascuno dei  $K_i$  un verso (in modo p. es. che tutti i versi siano concordanti su  $S$ ) a cui corrisponderà su  $C_i$  un verso che assumeremo come positivo; e proviamo che ogni circuito chiuso  $C$  di  $F$  è omologo ad una *combinazione lineare* a coefficienti interi<sup>(38)</sup> di  $C_1, C_2, \dots, C_Z$ .

Infatti il circuito  $K$  di  $S$  corrispondente a  $C$  si può facilmente ridurre, mediante convenienti linee percorse una volta in un senso e una nell'altro, ad una somma di  $m_1$  cicli del tipo  $K_1$ , più  $m_2$  cicli del tipo  $K_2, \dots$ , più  $m_Z$  cicli del tipo  $K_Z$ , più infine  $m$  cicli  $H$  riducibili su  $S$  ad un punto senza attraversare  $P_1, P_2, \dots, P_Z$  a cui corrispondono su  $F$  cicli omologhi a zero. Poichè

(38) Per il significato di questa locuzione cfr. SEVERI, loco cit. (28), p. 273.

tutti i cicli del tipo  $K_i$  formano evidentemente un sistema continuo, così i loro corrispondenti su  $F$  saranno omologhi (a  $C_i$ ), e quindi si avrà

$$C \sim m_1 C_1 + m_2 C_2 + \dots + m_Z C_Z, \tag{10}$$

c. d. d.

Ora domandiamoci: I cicli  $C_1, C_2, \dots, C_Z$  sono *indipendenti* nel senso che non siano legati da alcuna omologia a coefficienti interi? Per rispondere a questa domanda consideriamo su  $S$  un ciclo  $H$  riducibile ad un punto per deformazione continua senza attraversare  $P_1, P_2, \dots, P_Z$  e osserviamo che, mediante  $2Z - 1$  linee percorse nei due sensi, esso si può ridurre alla somma di due circuiti  $K_1$ , più due circuiti  $K_2, \dots$ , più due circuiti  $K_Z$  (cfr. la Fig. 2 per  $Z = 2$ ). Dunque su  $F$  si ha l'omologia

$$2 C_1 + 2 C_2 + \dots + 2 C_Z \sim 0, \tag{11}$$

la quale prova che *i circuiti  $C_1, C_2, \dots, C_Z$  non sono indipendenti*. Invece  $Z - 1$  fra essi, ad esempio  $C_2, \dots, C_Z$ , sono indipendenti perchè posto

$$C \sim n_2 C_2 + n_3 C_3 + \dots + n_Z C_Z$$

( $n_2, n_3, \dots, n_Z$  interi ed  $n_2 \neq 0$ ), indicando con  $D$  il ciclo di  $F$  che corrisponde ad un circuito chiuso di  $S$  passante semplicemente per  $P_1, P_2$  (come nella Fig. 1), cioè un circuito omologo a  $C_1 + C_2$ , si ha  $N(C, D) = n_2 > 0$ .

Moltiplichiamo ora per 2 i due membri della (10) e sostituiamo nel 2.<sup>o</sup> membro in luogo di  $2 C_1$  il circuito ad esso omologo che si ricava dalla (11); otterremo l'omologia

$$2 C \sim 2 \lambda_2 C_2 + 2 \lambda_3 C_3 + \dots + 2 \lambda_Z C_Z \tag{12}$$

(in cui si è posto  $\lambda_i = m_i - m_1$ ), la quale ne dice che il doppio d'ogni circuito chiuso di  $F$  è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti *pari* dei  $Z - 1$  circuiti indipendenti  $C_2, C_3, \dots, C_Z$ . Facendo uso di un linguaggio tolto alla teoria delle superficie algebriche possiamo dire che *sulla falda unilatera  $F$  i  $Z - 1$  circuiti indipendenti  $C_2, \dots, C_Z$  formano una base intermedia* (<sup>39</sup>).

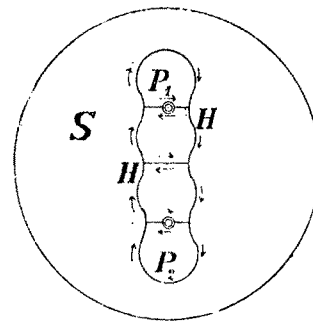


Fig. 2.

(<sup>39</sup>) SEVERI, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* [Annales de l'École Normale Supérieure de Paris, XXV (1908), pp. 449-468]. Se la falda  $F$  si

Possiamo ora domandarci se dalla (12) sia lecito ricavare

$$C \sim \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \dots + \lambda_Z C_Z, \quad (13)$$

cioè se i circuiti  $C_2, C_3, \dots, C_Z$  costituiscano su  $F$  una *base minima*. Ciò sarebbe possibile qualora su  $F$  la divisione per 2 di un circuito chiuso fosse un'operazione univoca (rispetto alle relazioni d'omologia); ma noi proveremo che ciò in generale non si verifica.

Invero se il coefficiente  $m_1$  della (10) è dispari, la (13), tenuto conto della (11) condurrebbe alla

$$C_1 + C_2 + \dots + C_Z \sim 0;$$

mentre fra i circuiti  $C_1, C_2, \dots, C_Z$  non può esistere nessuna omologia

$$\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \dots + \mu_Z C_Z \sim 0, \quad (14)$$

in cui qualcuno dei coefficienti  $\mu$  sia dispari, perchè, se ad es. lo fosse  $\mu_1$ , il circuito del primo membro di (14) si potrebbe ridurre, mediante una deformazione, a segare in un numero *dispari*  $\mu_1$  di punti il ciclo  $C_1$ .

Se ne deducono le seguenti conseguenze:

Anzitutto: *Sopra una falda unilatera  $F$  la divisione di un circuito per un intero non è operazione univoca.* Precisamente si può provare che, se l'intero è pari, la divisione può dar luogo a due circuiti distinti. Così ad. es., se  $F$  è un piano ( $Z=1$ ) il ciclo  $C_1$  sopra considerato è una retta, e il suo doppio  $2 C_1$  è omologo ad una conica, la quale si può anche dividere in due circuiti omologhi a zero. In tal caso per la (11) si ha  $2 C_1 \sim 0$ , cioè  $C_1 \sim -C_1$ ; e invero una retta, mediante una rotazione, può sovrapporsi a se stessa invertita di senso.

Inoltre: *Nessuno dei circuiti  $C_1, C_2, \dots, C_Z$  può esprimersi come combinazione lineare dei rimanenti;* da cui segue che, in generale, nel secondo membro della (10) non si può diminuire il numero dei termini e quindi che:

*Sulla falda unilatera  $F$  i  $Z$  circuiti  $C_1, C_2, \dots, C_Z$  costituiscono una base minima.*

---

considera come doppia, con che, come si è già osservato, bisogna assumerne l'ordine di connessione eguale a  $2(Z-1)$ , si prova che ogni circuito chiuso di essa è omologo ad una combinazione lineare dei  $2(Z-1)$  circuiti  $2 C_2, \dots, 2 C_Z, C_1 + C_2, \dots, C_1 + C_Z$  che, su  $F$  doppia, sono indipendenti.

Sopra una falda bilatera ogni circuito chiuso è notoriamente omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi delle  $Z = 2p$  retrosezioni Riemanniane, le quali sono indipendenti. Ne segue subito che su quelle falde la divisione è univoca, ecc.

12. Terminiamo il presente paragrafo coll'esame di un caso particolare. Sia  $\Phi$  una falda chiusa in corrispondenza biunivoca con una sfera  $S$  che presenti eccezioni (nel campo reale) in tre punti fondamentali  $P_1, P_2, P_3$  di  $S$  a cui corrispondono tre curve chiuse  $C_1, C_2, C_3$  di  $\Phi$  passanti per un punto fondamentale  $P$  corrispondente ad una curva chiusa  $C$  di  $S$  che passa (semplicemente) per  $P_1, P_2, P_3$ .

Se p. es. si proiettano un iperboloide ad una falda  $I$  e la sfera  $S$  da un loro punto generico sopra un piano  $\pi$ , indi si assumono come corrispondenti due punti di  $I, S$  che siano proiezioni d'uno stesso punto di  $\pi$ , si viene ad ottenere, fra  $I$  ed  $S$ , una corrispondenza che presenta le eccezioni suddette.

Sopra  $S$  non si possono tracciare circuiti chiusi passanti un numero dispari di volte per i punti fondamentali e non seganti, fuori di essi, la curva  $C$ ; perciò  $\Phi$  è bilatera e inoltre, come segue dal teorema di KLEIN, ha l'ordine di connessione 2.

Si potrà dunque assumere come modello di  $\Phi$  un toro; perciò un iperboloide ad una falda ed un toro sono equivalenti.

Ma si può andare più avanti realizzando una trasformazione birazionale senza eccezioni (nel campo reale) che muti una nell'altra le due superficie.

Si rappresenti invero realmente un toro  $T$  sopra un piano  $\pi$  in tal guisa che alle sezioni piane di  $T$  corrisponda il sistema  $\infty^3$  delle quartiche con due punti base doppi  $R_1, R_2$  reali e quattro punti base semplici imaginari (coniugati due a due). La trasformazione  $\omega$  fra  $T$  e  $\pi$  avrà come elementi eccezionali, nel campo reale, i punti fondamentali  $R_1, R_2$  e la retta fondamentale  $r \equiv R_1 R_2$  a cui corrisponde un punto (semplice) di  $T$ (<sup>40</sup>).

(<sup>40</sup>) La rappresentazione piana del toro

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

generato dalla rotazione intorno all'asse  $z$  d'un circolo di raggio  $r$  col piano passante per l'asse  $z$  e col centro sul piano  $z=0$  a distanza  $R$  dall'origine, è data dalle formole

$$x = \rho \frac{u^2 - \rho^2}{u^2 + \rho^2}, \quad y = \rho \frac{v^2 - \rho^2}{v^2 + \rho^2}, \quad z = \frac{2\rho r v}{v^2 + \rho^2},$$

in cui si è posto  $\rho = R + r$ . I punti  $R_1, R_2$  sono impropri sugli assi  $u, v$  e i punti fondamentali imaginari sono  $u = \pm i\rho, v = \pm i\sqrt{\rho^2 - 2\rho r}$ .

Colle stesse eccezioni nel campo reale si potrà evidentemente rappresentare su  $\pi$  un iperboloide ad una falda  $I$ , mediante una proiezione  $\sigma$  da un suo punto; e la trasformazione birazionale  $\tau \equiv \omega \sigma^{-1}$  adempierà all'ufficio richiesto (<sup>41</sup>).

#### § 4.

##### CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI CON UNA FALDA CIOÈ RAPPRESENTABILI REALMENTE SUL PIANO.

13. Veniamo ora a trar profitto dai risultati dei paragrafi precedenti applicandoli a studiare la connessione delle superficie razionali.

Anzitutto, poichè le superficie che considereremo potranno esser dotate di singolarità arbitrarie, converrà stabilire quale sia la loro influenza sulle proprietà di connessione.

La convenzione che appar più naturale ed alla quale noi ci atterremo (salvo in una breve discussione finale nella quale esamineremo un altro punto di vista) sarà quella di attribuire alle singolarità la stessa influenza che avrebbero se fossero risolte, cioè di considerare ogni superficie  $F$  come equivalente (dal punto di vista della connessione) ad un'altra  $F_0$  nella quale le singolarità siano risolte, che si considererà come *modello* di  $F$ .

Tuttavia per costruire questo modello — cioè per risolvere le singolarità di  $F$  — la strada non è univocamente determinata, e sorgono in proposito varî dubbî, a dissipare i quali non sembra sufficiente tener conto dell'avvertenza di *non introdurre eccezioni estranee alle singolarità* durante la loro risoluzione.

Sarà dunque utile, per evitare al seguito interpretazioni erranee o discutibili, precisare senza ambiguità la costruzione del modello  $F_0$ .

Partiremo perciò dalla rappresentazione piana *normale* della superficie  $F$ , supponendo che essa presenti il caso  $\alpha$ ) del Teorema enunciato al n.º 1, e riservandoci di trattare in seguito brevemente i casi  $\beta$ )  $\gamma$ ). Indichiamo con  $\Sigma$

---

(<sup>41</sup>) Il confronto fra l'iperboloide ad una falda ed il toro, dal punto di vista della connessione, istituito in modo erroneo da SCHLÄFLI nella citata Memoria *Quand'è*, ecc., fu ripreso da KLEIN nei citati lavori dei Math. Ann. VI (pp. 578-581) e VII, p. 552. In quest'ultima Memoria l'Autore si pone dal nostro punto di vista e trova gli stessi risultati.

il sistema lineare (privo di curve fondamentali semplici) imagine, sul piano  $\pi$ , di quello delle sezioni piane od iperpiane di  $F$ , con  $A_1, A_2, \dots, A_m$  i suoi punti base (punti fondamentali della rappresentazione), con  $\tau$  la trasformazione (di tipo normale) imagine del coniugio di  $F$ , in cui è unito  $\Sigma$ .

Denominiamo *sistema L* un sistema lineare  $\infty^r$  ( $r \geq 3$ ) unito in  $\tau$ , privo di curve fondamentali, avente per punti base impropri  $A_1, A_2, \dots, A_m$  e tale che le curve di esso passanti per un punto *qualunque* di  $\pi$  (anche infinitamente vicino ai punti base) non passino di conseguenza per altri punti nè abbiano genere inferiore a quello della generica  $L$ . Se  $C$  è il sistema delle curve d'ordine abbastanza elevato che passano, con qualche direzione variabile, per  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , e  $|C'|$  il suo corrispondente in  $\tau$ , si può ad es. soddisfare alle condizioni imposte ad  $L$  mediante il sistema completo  $C + C'$ .

Stabilendo una proiettività fra le curve di  $L$  e gl'iperpiani di un  $S_r$  in modo che all'antiproiettività subordinata entro  $L$  da  $\tau$  corrisponda il coniugio di  $S_r$  (cfr. F. n.º 12), il piano  $\pi$  si muterà in una superficie razionale reale  $F_0$ , priva di singolarità che assumeremo come modello di  $F$ .

Tale definizione di  $F_0$  è priva di ambiguità perchè un altro modello  $F'_0$  costruito cogli stessi criteri è, come ora proveremo, equivalente ad  $F_0$ .

Invero  $F'_0$  si costruirà come  $F_0$ , a partire da un sistema  $L'$ , analogo ad  $L$ , relativo ad un'altra rappresentazione normale di  $F$  sopra un piano  $\pi'$ , per cui conserveremo le stesse notazioni della precedente, munite di apice. È da notarsi che i punti base di  $\Sigma'$  saranno ancora  $m$  (F. pag. 31); li indicheremo con  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$ .

L'identità di  $F$  induce fra  $\pi$  e  $\pi'$  una trasformazione birazionale  $\sigma$  che muta  $\tau$  in  $\tau'$ . Gli  $h$  punti fondamentali di  $\sigma$  su  $\pi$  e  $\pi'$  cadranno tutti in punti base di  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  (F. pag. 31), p. es. in  $A_1, A_2, \dots, A_h; A'_1, A'_2, \dots, A'_h$ , e ad essi corrisponderanno, rispettivamente, su  $\pi', \pi$  le curve (non fondamentali per  $\Sigma', \Sigma$ )  $C'_1, C'_2, \dots, C'_h; C_1, C_2, \dots, C_h$ .

Alla trasformazione  $\sigma$ , cioè all'identità di  $F$  corrisponde una trasformazione birazionale reale  $\omega$  fra  $F_0$  ed  $F'_0$ ; e si prova subito che essa è priva di eccezioni (anche nel campo complesso).

Invero, se  $P$  è un punto qualunque di  $F_0$ , il suo corrispondente  $Q$  di  $\pi$  potrà:

- a) esser generico (nel senso che non abbia le posizioni eccezionali suddette);
- b) cadere su qualcuna delle curve  $C_1, \dots, C_h$ ;
- c) appartenere — in una determinata direzione — all'intorno d'uno dei punti  $A_1, \dots, A_m$ .

Nel caso *a*) il punto  $Q'$  di  $\pi'$  omologo di  $Q$  in  $\sigma$  sarà pure generico, e perciò gli corrisponderà un punto  $P'$  di  $F'_0$ ; nei casi *b*) *c*),  $Q'$  potrà cadere o nell'intorno d'uno dei punti  $A_1, \dots, A_m$ , ovvero su una delle curve  $C'_1, \dots, C'_n$ . Dunque il suo corrispondente  $P'$  sarà sempre *un punto* di  $F'_0$ .

Se il sistema  $\Sigma$  presenta le eccezioni contemplate nei casi  $\beta$ )  $\gamma$ ) del Teorema enunciato al n.º 1, la superficie  $F_0$  si costruisce a partire da un sistema  $L$  soddisfacente alle condizioni precedenti modificate nel senso che  $L$  abbia per sole curve fondamentali (semplici) le rette che così si comportano rispetto a  $\Sigma$ .

La costruzione d'un sistema  $L$  siffatto non offre alcuna difficoltà.

OSSERVAZIONE. Le condizioni imposte ad  $L$  non sono tutte in generale strettamente necessarie; se p. es. alcuni fra i punti  $A_1, \dots, A_m$  si corrispondono in  $\tau$  (cioè le curve omologhe su  $F$  sono immaginarie coniugate) si può togliere ad  $L$  l'imposizione di averli come punti base, giacchè a noi importa che su  $F_0$  sian risolte le singolarità *reali* di  $F$  senza che si introducano *nel campo reale* eccezioni estranee a quelle singolarità. Si possono analogamente imporre ad  $L$  tante quante si vogliono coppie di punti base corrispondenti in  $\tau$ .

Così, se  $F$  è un cono quadrico di  $S_3$ , cioè se  $\Sigma$  è il sistema reale  $\infty^3$  delle coniche con due punti base  $P_1, P_2$  infinitamente vicini, si può assumere come  $L$  il sistema reale  $\infty^3$  delle cubiche con un punto doppio in  $P_1$ , un punto semplice in  $P_2$  e due ulteriori punti base immaginari coniugati.  $F_0$  è allora una *quadrica rigata*.

Dunque, per noi, un cono dovrà considerarsi come una falda *bilatera* d'ordine di connessione 2. Si osservi in proposito che se si considera un osservatore eretto sul piano tangente e mobile lungo una generatrice, esso dovrà *capovolgarsi* all'atto del passaggio per il vertice, altrimenti il cono risulterebbe unilatero. E ciò corrisponde alla circostanza che se si sposta sul cono l'indicatrice facendone scorrere i punti di eguali segmenti sulle generatrici che li contengono, il verso di essa si inverte, all'atto del passaggio per il vertice, se l'osservatore guarda sempre la medesima faccia del piano tangente; come pure all'altra che se sopra un iperboloido ad una falda si considerano due punti  $M, N$  d'una medesima generatrice, equidistanti dall'intersezione di essa coll'ellisse di gola, l'angolo  $\alpha$  di cui ruota il piano tangente nel passaggio da  $M$  ad  $N$ , ha per limite  $\pi$  quando l'ellisse di gola si restringe indefinitamente in modo da tendere al vertice d'un cono.

14. D'ora in poi parlando d'una superficie  $F$ , intenderemo di considerarla sempre come equivalente al modello  $F_0$ .



Trattiamo, per primo, del caso in cui  $F$  ha una falda, cioè, nella rappresentazione normale,  $\tau$  è il coniugio e quindi  $\Sigma$  (ed  $L$ ) un sistema reale. Distinguiamo, secondo il Teorema del n.º 1, tre casi:

α)  $\Sigma$  è privo di curve fondamentali semplici ed ha  $m$  punti base, di cui  $r$  reali e  $2i$  a coppie imaginari coniugati. Le eccezioni (nel campo reale) alla corrispondenza tra il piano  $\pi$  ed  $F$  cadono soltanto negli  $r$  punti base reali di  $\Sigma$  che sono fondamentali per essa, mancando affatto su  $F$  punti siffatti perchè alle curve fondamentali di  $\Sigma$  (non semplici) rispondono su  $F$  intorno di punti multipli che si mutano in curve sul modello  $F_0$ . Perciò (n.º 9)  $F$  è unilatera ed ha l'ordine di connessione  $Z = r + 1$ . Poichè inoltre (F. n.º 21) l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I$  relativo ad  $F$  è eguale ad  $r + 2i - 1$ , così si hanno le relazioni

$$I - Z = 2(i - 1), \quad I + Z = 2(r + i), \quad (15)$$

da cui seguono le

$$I \equiv Z \pmod{2}, \quad Z \leq I + 2, \quad (16)$$

il segno  $\equiv$  valendo solo quando  $i = 0$ . È da notarsi che, dato  $I$ , esistono superficie  $F$  con una falda, relative a qualunque valore di  $Z$  compatibile colle (16); esse si ottengono assumendo come sistema  $\Sigma$  quello delle curve d'ordine abbastanza elevato che passano per  $r = Z - 1$  punti reali e per  $2i = I + 2 - Z$  coppie di punti imaginari coniugati, generici, del piano  $\pi$ .

β) Ci sono due sottocasi:

1.º) I due punti fondamentali  $P_1, P_2$  appartenenti alla retta  $r$  ch'è fondamentale (semplice) per  $\Sigma$  sono imaginari coniugati, e inoltre  $\Sigma$  ha altri  $2i$  punti base pure imaginari coniugati. Il modello  $F_0$  (costruito mediante le coniche per  $P_1, P_2$ ) è una *sfera*, e perciò  $F$  ha  $Z = 0$  e  $I = 2i$  (cfr. F., nota \*\*\*) a pag. 30).

2.º)  $P_1, P_2$  son reali, e inoltre  $\Sigma$  ha altri  $2i$  punti base a coppie imaginari coniugati;  $F_0$  è un *iperboloide ad una falda* od un *toro* e quindi  $F$  ha  $Z = 2, I = 2i$ .

In definitiva valgono sempre le relazioni (16), e di più si ha

$$\left. \begin{array}{ll} I - Z = 2i, & I + Z = 2i, & \text{se } F \text{ è del tipo } \textit{sfera}, \\ I - Z = 2(i - 1), & I + Z = 2(i + 1), & \text{se } F \text{ è del tipo } \textit{toro}. \end{array} \right\} (15')$$

γ) Siano  $p_1, p_2, \dots, p_m$  le rette fondamentali (semplici) di  $\Sigma$  uscenti dal

punto base reale  $O$ , e contenenti rispettivamente i punti base  $P_1, P_2, \dots, P_m$  infinitamente vicini ad  $O$ ; fra questi,  $\nu$ , colle relative rette, siano reali, e  $2\nu$  a coppie immaginari coniugati. Inoltre  $\Sigma$  abbia altri  $r$  punti base reali, e  $2i$  immaginari coniugati.

Si ha allora subito  $I = r + 2i$ , e siccome le eccezioni (nel campo reale) alla corrispondenza tra  $\pi$  ed  $F$  (o  $F_0$ ) cadono, su  $\pi$ , nei  $\nu + r + 1$  punti base reali, e su  $F$  in  $\mu$  punti semplici omologhi delle rette fondamentali, così dal teorema di KLEIN si deduce  $Z = r + 2$ . Valgono quindi anche in questo caso le (16) e si hanno inoltre le

$$I - Z = 2(i - 1), \quad I + Z = 2(r + i + 1). \quad (15'')$$

Proviamo ora che se  $r > 0$ , cioè se  $Z > 2$ , la superficie  $F'$  è unilatera. Invero, mediante il sistema delle curve d'ordine  $n$  abbastanza elevato che hanno in  $O$  un punto  $n - 1$ -plo, e in  $P_1, \dots, P_m$  punti base semplici, si costruisca una superficie reale (rigata)  $\Phi$  (d'ordine di connessione 2); indi si osservi che nella corrispondenza reale che resta subordinata tra  $\Phi$  ed  $F$  dal fatto che ambedue son rappresentate realmente su  $\pi$ , le eccezioni dipendenti dai punti  $O, P_i$  e dalle rette  $p_i$  sono scomparse, mentre rimangono (nel campo reale) solo quelle dipendenti da  $r$  punti fondamentali reali che esistono su  $\Phi$ . Dunque (n.º 9)  $F$  è unilatera.

Sia ora  $r = 0$ , cioè  $Z = 2$ ; mostriamo che  $F'$  è bilatera od unilatera secondo che  $\nu$  è dispari o pari. Perciò eseguiamo dapprima una trasformazione quadratica reale del piano  $\pi$  in un altro piano  $\sigma$ , assumendo, su  $\pi$ , come punti fondamentali,  $O$  e due punti immaginari coniugati sopra una retta reale  $\alpha$ , non passante per  $O$ . Le eccezioni, nel campo reale, alla corrispondenza fra  $\sigma$  ed  $F$  cadranno su  $\sigma$ :

In un punto  $\Omega$  corrispondente ad  $\alpha$ ;

In  $\nu$  punti (distinti fra loro e da  $\Omega$ )  $Q_1, Q_2, \dots, Q_\mu$  situati sulla retta reale  $u$  omologa di  $O$  e congiunti ad  $O$  da  $\nu$  rette fondamentali (semplici)  $q_1, q_2, \dots, q_\nu$  (corrispondenti a  $p_1, p_2, \dots, p_\mu$ ). Non vi sono altre curve fondamentali semplici, perchè se  $u$  è retta fondamentale — il che accade quando  $O$  è punto base proprio per  $\Sigma$  — essa non è semplice (F. pag. 26, Oss. II e nota \*) a pag. 27).

Trasformando mediante proiezione stereografica il piano  $\sigma$  in una sfera  $S$  si avranno su questa  $\mu$  cerchi massimi fondamentali  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\mu$  segantisi in due punti fondamentali  $A, B$ , e contenenti rispettivamente i punti  $R_1, R_2, \dots, R_\mu$  pure fondamentali.

Sia ora  $C$  un ciclo chiuso di  $F'$  che si potrà supporre — dopo una eventuale deformazione — non passi per i punti (semplici) che corrispondono ad  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\mu$ . Il ciclo corrispondente  $K$  di  $S$  taglierà i cerchi  $\omega_i$  solo nei punti fondamentali, passando  $\alpha$  volte per  $A$ ,  $\beta$  volte per  $B$ , ed  $r_1, r_2, \dots, r_\mu$  volte rispettivamente per  $R_1, R_2, \dots, R_\mu$ .

Siccome  $K$  è chiuso, il numero  $k_i = \alpha + \beta + r_i$  dei suoi incontri con  $\omega_i$  sarà *pari*, e perciò, se  $\mu$  è dispari, risulterà pari anche il numero complessivo  $N$  dei passaggi di  $K$  per i punti fondamentali, che è espresso dalla formola

$$N = \alpha + \beta + \sum_{i=1}^{\mu} r_i = \sum_{i=1}^{\mu} k_i - (\mu - 1) (\alpha + \beta).$$

Se ne dedurrà, in base ad una osservazione del n.º 11, che in tal caso nessun circuito chiuso di  $F'$  invertirà l'indicatrice, e quindi che  $F'$  sarà *bilatera* (e perciò, avendo  $Z = 2$  apparterrà al tipo *toro*). Invece, se  $\mu$  è pari, assumendo, come è lecito,  $K$  in guisa che  $\alpha + \beta$  sia dispari (ad es.  $\alpha = 1, \beta = r_1 = r_2 = \dots = r_\mu = 0$ ),  $N$  risulterà dispari e quindi  $F'$  sarà *unilatera*.

La conclusione definitiva è che :

*L'ordine di connessione  $Z$  d'una superficie razionale reale con una falda (rappresentabile realmente sul piano) è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I$  dalle relazioni*

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad 0 \leq Z \leq I + 2; \quad (\text{I})$$

*e, per ogni dato valore di  $I$  esistono superficie del tipo suddetto corrispondenti a tutti i valori di  $Z$  che son compatibili colle relazioni stesse.*

Inoltre :

*Tutte le superficie razionali reali con una falda, aventi l'ordine di connessione  $Z > 2$  sono unilatere. I tipi bilateri si hanno solo per  $Z = 0, 2$  e i rispettivi modelli sono la sfera ed il toro.*

Per i modelli delle falde unilatere rimandiamo al paragrafo precedente, e per qualche esempio all'ultimo paragrafo di questa Memoria.

Qui termineremo facendo notare che dall'ultimo enunciato si deduce la seguente :

OSSERVAZIONE. *Fra le superficie razionali reali non esistono modelli di Riemanniane aventi il genere superiore ad 1.*

## § 5.

CONNESSIONE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI CON PIÙ FALDE  
APPARTENENTI ALLA I<sup>a</sup>, II<sup>a</sup> e III<sup>a</sup> FAMIGLIA.

15. Per studiare la connessione d'una superficie razionale reale  $F$ , dotata di più falde, ci atterremo costantemente al criterio di confrontarla con una superficie  $\Phi$  della sua classe (cioè trasformata birazionale reale di  $F$ ), la cui connessione si sappia determinare direttamente, valendosi p. es. dell'equazione di  $\Phi$ . La superficie  $\Phi$  si sceglierà in modo che i punti base del sistema  $\Sigma$ , relativo alla rappresentazione normale di  $\Phi$ , che non sono fondamentali per la trasformazione  $\tau$ , non siano uniti in  $\tau$ , cioè siano due a due corrispondenti ovvero manchino affatto. La ragione di tal scelta della superficie  $\Phi$  sta principalmente in alcune importanti proprietà che ora ci proponiamo di stabilire.

Anzitutto: *Due superficie  $\Phi$  appartenenti alla stessa classe sono equivalenti dal punto di vista della connessione.*

Siano  $\Phi, \Phi'$  quelle due superficie,  $\Sigma, \tau, \Sigma', \tau'$  rispettivamente i sistemi lineari e le trasformazioni relativi alle loro rappresentazioni normali su  $\pi, \pi'$ . Possiamo addirittura, per maggior chiarezza, supporre che  $\Phi, \Phi'$  sian due modelli privi di singolarità relativi alle superficie stesse, in modo che  $\Sigma, \Sigma'$  siano affatto privi di curve fondamentali e dotati di punti base tutti impropri. Fra i punti base di  $\Sigma$  ci saranno tutti i punti fondamentali di  $\tau$ , a ciascuno dei quali corrisponderà una curva (non reale) di  $\Phi$ ; gli ulteriori punti base saranno due a due corrispondenti in  $\tau$ . Analogamente per  $\Sigma', \Phi'$ .

Poichè  $\Phi, \Phi'$  appartengono alla stessa classe, esisterà una trasformazione birazionale  $\omega$  che muterà  $\tau$  in  $\tau'$ ; ed essa indurrà fra  $\Phi$  e  $\Phi'$  una trasformazione birazionale reale  $\Omega$ .

Se  $\omega$  è l'identità, cioè se  $\tau, \tau'$  coincidono,  $\Omega$  è priva di eccezioni nel campo reale. Invero ad ogni punto reale di  $\Phi$  corrisponde su  $\pi$  un punto unito in  $\tau$  che non è base per  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  (e che eventualmente potrà cadere, in una direzione unita, nell'intorno di qualcuno dei punti fondamentali di  $\tau$ ), il cui omologo su  $\Phi'$  è quindi un punto reale.

La stessa cosa si può affermare, nè vale la pena di entrare nei dettagli d'un ragionamento analogo al precedente, se i punti fondamentali di  $\omega$  su  $\pi$  e  $\pi'$  cadono in punti base di  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ .

Da ciò segue subito la verità del teorema enunciato, per le superficie della II<sup>a</sup> e III<sup>a</sup> famiglia. Invero, riferendosi p. es. al primo caso, se  $\Phi$  e  $\Phi'$  appartengono alla II<sup>a</sup> famiglia,  $\tau$  e  $\tau'$  sono trasformazioni di 8.<sup>o</sup> ordine con 7 punti tripli, ciascuna delle quali lascia unita una rete di cubiche coi 7 punti base generici (F. n.<sup>o</sup> 37) e quindi priva di curve fondamentali. Poichè si può supporre che  $\omega$  muti l'una nell'altra quelle due reti (F. § 7, n.<sup>o</sup> 49), i suoi punti fondamentali su ciascuno dei due piani cadranno tutti in punti base delle reti stesse, che son fondamentali per  $\tau, \tau'$ , e quindi base per  $\Sigma, \Sigma'$ .

Il caso delle superficie appartenenti alla I<sup>a</sup> famiglia domanda una discussione più accurata. Ricordiamo (F. § 6, 7) che allora  $\tau$  è una trasformazione d'ordine  $m + 1$  con un punto fondamentale  $m$ -plo  $O$  e  $2m$  punti fondamentali semplici  $P_i (i = 1, 2, \dots, 2m)$  aventi ordinatamente per omologhe le rette  $p_i = OP_i$ . Su ciascuna delle rette reali (supposto, come è lecito, che lo sia  $O$ ) del fascio  $O$  la  $\tau$  subordina un'antiproiettività involutoria, che può esser dotata di (infiniti) punti uniti, oppure no; e le rette per cui vale la prima delle due proprietà son tutte quelle che cadono entro  $m$  angoli completi non adiacenti, ciascuno dei quali è determinato da due rette fondamentali consecutive; per esempio negli angoli  $\alpha_i = p_{2i-1} p_{2i} (i = 1, 2, \dots, m)$ . All'insieme dei punti uniti che cadono entro l'angolo  $\alpha_i$  rispondono i punti (reali) di una fra le  $m$  falde di  $\Phi$ , che denoteremo con  $A_i$ . Adotteremo le stesse lettere, munite di apice, per la trasformazione  $\tau'$  e la superficie  $\Phi'$ , tenendo conto del fatto che i due gruppi di rette  $p_i, p'_i$  son proiettivi (F. n.<sup>o</sup> 47), e attribuendo lo stesso indice a due rette corrispondenti in tale proiettività  $\sigma$ .

Ricordiamo ancora che si può sempre costruire una trasformazione birazionale  $\omega$ , la quale muti  $\tau$  in  $\tau'$  subordinando fra i fasci  $O, O'$  la proiettività  $\sigma$ . Se  $P$  è un punto fondamentale di  $\omega$ , su  $\pi$ , la retta  $p'$  del fascio  $O'$  corrispondente ad  $OP$  in  $\sigma$  sarà fondamentale (per  $\omega$ ) su  $\pi'$ , e conterrà un punto fondamentale  $Q'$  a cui corrisponderà la retta  $q = OP$  (<sup>42</sup>).

(<sup>42</sup>) I punti e le rette fondamentali di  $\omega$  si possono supporre *distinti*. Se le equazioni di  $\tau, \tau'$  su  $\pi(x, y), \pi'(X, Y)$  sono (F. n.<sup>o</sup> 48)

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \frac{a(\bar{x})\bar{y} + B(\bar{x})}{C(\bar{x})\bar{y} - a(\bar{x})}; \quad X' = \bar{X}, \quad Y' = \frac{a'(\bar{X})\bar{Y} + B'(\bar{X})}{C'(\bar{X})\bar{Y} - a'(\bar{X})},$$

con  $a\bar{a} + BC = a'a' + B'C'$ , si può prendere come  $\omega$  la trasformazione

$$X = x, \quad Y = \frac{B(x)y}{(a'(x) - \bar{a}(x))y + B(x)},$$

Consideriamo ora la trasformazione reale  $\Omega$  indotta fra  $\Phi$  e  $\Phi'$  da  $\omega$ . Essa non avrà eccezioni fra quei punti di  $\Phi$  e  $\Phi'$  a cui corrispondono, su  $\pi$  e  $\pi'$ , punti non fondamentali per  $\omega$  e non appartenenti alle rette fondamentali; ma ne presenterà invece in corrispondenza ai punti e alle rette fondamentali di  $\omega$ .

Se p. e. entro l'angolo  $\alpha_1$ , esiste il solo punto fondamentale *unito*  $P$  (e quindi entro  $\alpha'_1$ , il punto  $Q$ ), la  $\Omega$  trasformerà biunivocamente la falda  $A_1$  nella falda  $A'_1$  e le eccezioni alla biunivocità della corrispondenza (fra  $A_1$  ed  $A'_1$ ) cadranno solo in due punti  $M, M'$  di  $A_1, A'_1$ , a cui corrisponderanno due curve chiuse  $m', m$ , passanti rispettivamente per  $M', M$ .

Se ne deduce immediatamente, per il teorema di KLEIN, che  $A_1, A'_1$  hanno lo stesso ordine di connessione. Inoltre poichè il circuito  $m$  è omologo a zero su  $A_1$  in quanto, facendo variare la retta  $g$  entro l'angolo  $\alpha_1$  tendendo a  $p_1$ ,  $m$  si deforma tendendo ad un punto, corrispondente all'unica direzione unita uscente da  $P_1$  (ch'è quella di  $p_1$ ), così ogni ciclo chiuso di  $A_1$  taglierà  $m$  in un numero *pari* di punti.

Ne segue che, se  $A_1$  è bilatera, non potrà essere  $A'_1$  unilatera, perchè ad un circuito chiuso  $c'$  di  $A'_1$ , che invertisse l'indicatrice, e non passasse, come si può supporre, per  $M'_1$ , dovrebbe rispondere su  $m$  un ciclo chiuso  $c$  non segante  $m$  fuori di  $M$  e passante ivi un numero dispari di volte. Dunque  $A_1, A'_1$  saranno entrambe unilatera o bilatera e perciò equivalenti.

Dal teorema ora dimostrato si trae, con agevoli deduzioni, l'importante conseguenza:

*Ogni superficie razionale reale  $F$  con più falde si può rappresentare sopra una qualunque superficie  $\Phi$  della sua classe dotata di un numero  $r$  di punti fondamentali (reali), eguale a quello dei punti base del sistema  $\Sigma$  relativo alla rappresentazione piana normale di  $F$ , che sono uniti nella trasformazione  $\tau$ .*

Infatti, partendo dalla rappresentazione normale di  $F$  sopra un piano  $\pi$ , si costruisca, mediante un sistema lineare  $L$  privo di curve fondamentali, unito nella  $\tau$  relativa ad  $F$  e avente i punti base solo in punti fondamentali di  $\tau$ , una superficie  $\Phi$ . La trasformazione birazionale reale fra  $F$  e  $\Phi$  in cui si corrispondono due punti rappresentati dallo stesso punto di  $\pi$ , non ha eccezioni (nel campo reale) altro che in corrispondenza agli  $r$  punti base

---

le cui rette fondamentali su  $\pi$  sono  $B(x)B'(x) = 0$ . Se le radici di questa equazione non sono distinte basterà prima trasformare  $\tau$  (ed eventualmente  $\tau'$ ) mediante una proiettività del tipo  $x' = \alpha x, y'_i = \lambda y_i + \mu$ , e si raggiungerà lo scopo.

di  $\Sigma$  (non fondamentali per  $\tau$ ) che sono uniti in  $\tau$ ; a questi punti rispondono su  $\Phi$  altrettanti punti fondamentali reali aventi per omologhe  $r$  curve chiuse di  $F$ .

Poichè d'altronde tutte le superficie  $\Phi$  d'una classe sono equivalenti, ne segue che la stessa relazione si può porre tra  $F$  e una qualunque  $\Phi$ .

Supponiamo ora che le falde di  $F$  siano tutte bilatere: dovrà allora essere  $r = 0$ , perchè la presenza di punti fondamentali reali su qualche falda di  $\Phi$  porterebbe di conseguenza l'unilateralità della falda corrispondente di  $F$ . Perciò sarà  $F$  equivalente a  $\Phi$ ; donde il notevole criterio:

*Se fra le superficie d'una classe ve n'è una le cui falde sono tutte bilatere, essa è una superficie  $\Phi$ .*

Ed ora passiamo a studiare separatamente la connessione delle superficie appartenenti alle tre famiglie.

16. *I.<sup>a</sup> famiglia.* Partendo da una qualunque superficie  $F$ , con  $m$  falde, costruiamone una trasformata reale le cui falde siano tutte bilatere. Perciò deduciamo anzitutto da  $F$ , mediante trasformazione birazionale reale, una superficie  $F'$ , avente equazione del tipo

$$z^2 = f(x, y), \quad (17)$$

$f=0$  essendo una curva d'ordine  $2n$  dotata di un punto  $2n-2$ -plo  $O$  e di  $2m$  tangenti reali di 1.<sup>a</sup> specie (cioè tali che lungo esse  $f$  è negativa) uscenti da  $O$  (F. n.<sup>1</sup> 27, 31, 32). Indi osserviamo che se

$$x = \frac{\alpha(x', y')}{\gamma(x', y')}, \quad y = \frac{\beta(x', y')}{\gamma(x', y')},$$

sono le equazioni d'una trasformazione birazionale reale fra il piano  $x, y$  ed il piano  $x', y'$ , la superficie

$$z^2 = f(\alpha(x', y'), \beta(x', y')),$$

si ottiene dalla (17) mediante la trasformazione birazionale reale

$$x = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad y = \frac{\beta}{\gamma}, \quad z = \frac{z'}{\gamma^n};$$

e che perciò sarà lecito, per il nostro scopo, sostituire nella (17) in luogo di  $f(x, y)$  il 1.<sup>o</sup> membro  $\varphi(x, y)$  dell'equazione d'una curva che si ottenga da

$f=0$  mediante una trasformazione cremoniana reale, preso con un segno determinato <sup>(43)</sup>.

Ora, mandando con una proiettività reale il punto  $O$  all'infinito sull'asse  $y$ , si otterrà da  $f=0$  la curva

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0, \quad (18)$$

e da essa mediante la trasformazione reale

$$X = x, \quad Y = 2ay + b,$$

si passerà alla

$$Y^2 = D(X) \quad [D = b^2 - 4ac]. \quad (19)$$

Poichè possiamo supporre (F. n.º 27) che la curva  $f=0$  e quindi anche la (18) sia priva di punti doppi (tal supposizione non è però qui strettamente necessaria), le radici di  $D(X)=0$  saran distinte e fra esse alcune saranno certo reali perchè esistono tangenti reali di  $f=0$  uscenti da  $O$ . Ne segue che per qualche valore  $a$  di  $X$  sarà  $D(a) < 0$ , e quindi, se  $\nu$  è l'ordine di  $D$ , mediante la trasformazione reale

$$X = \frac{ax + 1}{x} \quad Y = \frac{y}{x^\mu}$$

( $2\mu = \nu$  se  $\nu$  è pari,  $= \nu - 1$  se  $\nu$  è dispari), si passerà in definitiva alla curva

$$y^2 = \Delta(x), \quad (20)$$

$\Delta$  essendo un polinomio d'ordine pari, a radici distinte (fra cui alcune reali) tale che  $\Delta(\infty) < 0$ .

Ogni superficie  $F$  della Iª famiglia con  $m > 1$  falde sarà quindi trasformabile realmente in una superficie avente equazione del tipo

$$z^2 = \pm (y^2 - \Delta(x)), \quad (21)$$

in cui il segno è ancora da determinarsi.

Per studiare la forma della curva  $y^2 = \Delta(x)$ , consideriamo, come è lecito, due radici reali consecutive  $a, b$  di  $\Delta(x) = 0$  tali che sia  $a < b$  e inoltre, per  $\varepsilon$

---

<sup>(43)</sup> Insomma delle due superficie  $z^2 = \varphi(xy)$ ,  $z^2 = -\varphi(xy)$  che non si equivalgono per trasformazioni birazionali reali (cfr. F. nota \*\*) a p. 36) una sola è equivalente in quel senso alla (17).



positivo e convenientemente piccolo  $\Delta(a-\varepsilon) < 0$ ,  $\Delta(b+\varepsilon) > 0$ . Il polinomio  $\Delta$  sarà positivo in tutto il segmento  $a, b$  dell'asse  $x$  e perciò ai punti di esso corrisponderanno due valori *reali e finiti* di  $y$  eguali e di segno opposto, in tal guisa che al variare di  $x$  nel segmento  $ab$  il punto  $xy$  descriverà un *ramo* (reale) della curva  $y^2 = \Delta(x)$  chiuso, privo di singolarità, tangente in  $a$  e  $b$  alle rette  $x=a$ ,  $x=b$  e racchiudente un'area  $A$  semplicemente connessa (Fig. 3). La curva  $y^2 = \Delta(x)$  risulterà composta da un certo numero  $h$  di rami siffatti, distinti, e situati tutti al finito perchè è  $\Delta(\infty) < 0$ .

Ora osserviamo che il polinomio  $y^2 - \Delta(x)$  è *negativo* entro tutte le aree  $A$ , *positivo* nell'unica regione piana  $R$  esterna a quelle aree. Perciò se nella (21) si scegliesse il segno  $+$  ad ogni punto di  $R$  risponderebbero due punti *reali* della superficie rappresentata, che verrebbero a coincidere quando il punto cade sul contorno di  $R$ . Quindi la superficie stessa avrebbe una sola falda.

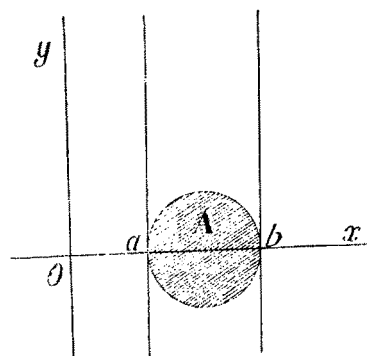


Fig. 3.

Siccome  $F$ , e quindi anche la superficie trasformata che si ottiene dalla (21) per una conveniente scelta del segno, ha  $m > 1$  falde, così nella (21) bisognerà scegliere il segno  $-$ ; ed allora ad ogni punto di una delle aree  $A$  risponderanno due punti *reali* della superficie che in corrispondenza ad  $A$  descriveranno una falda chiusa, priva di singolarità, bilatera e del tipo sfera. Sarà dunque  $h = m$ , e si concluderà che:

*In ogni classe di superficie della I<sup>a</sup> famiglia con  $m$  falde, esiste una superficie  $\Phi$  di equazione*

$$z^2 + y^2 = \Delta(x),$$

*colle falde tutte bilatere e d'ordine di connessione 0.*

L'ordine di connessione di  $\Phi$  sarà dunque per la (8) eguale a  $-2m + 2$ .

Ritorniamo ora a considerare una qualunque superficie  $F$  della I<sup>a</sup> famiglia con  $m$  falde  $A_1, A_2, \dots, A_m$ ; il sistema  $\Sigma$  relativo alla sua rappresentazione piana normale abbia  $2m + 1 + r + 2i$  punti base, di cui  $2m + 1$  nei punti fondamentali di  $\tau$ ,  $r$  uniti in  $\tau$  e  $2i$  due a due corrispondenti. Sarà  $I = 2m + r + 2i$ , e siccome in virtù d'un teorema del numero precedente si può stabilire, tra  $F$  e la superficie  $\Phi$  (della sua classe) ora costruita, una corrispondenza biunivoca continua, ecc., dotata di eccezioni solo in  $r$  punti

fondamentali su  $\Phi$ , così l'ordine di connessione  $Z$  di  $F$  risulterà per il teorema di KLEIN <sup>(44)</sup>, eguale ad  $r - 2m + 2$ . Dunque avremo

$$I - Z = 2(2m + i - 1), \quad I + Z = 2(r + i + 1), \quad (22)$$

da cui segue

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad Z \leq I - 4m + 2, \quad (23)$$

il segno  $=$  valendo soltanto se  $i = 0$ . Se son dati i valori di  $m, I, Z$ , compatibili colle (23) e colla condizione che  $I, Z$  non siano inferiori ai rispettivi valori minimi  $2m$  (F. Teor. VI),  $-2m + 2$ , esistono, in ogni classe di superficie della 1<sup>a</sup> famiglia con  $m$  falde, delle superficie a cui competono quei valori di  $I$  e  $Z$ . Esse si costruiscono partendo da un sistema  $\Sigma$ , privo di curve fondamentali, ecc., unito in una trasformazione  $\tau$  di tipo normale relativa a quella classe, e dotato di punti base nei punti fondamentali di  $\tau$ , in  $r$  punti uniti, e in  $i$  coppie di punti corrispondenti in  $\tau$ ; i valori di  $i$  ed  $r$  essendo dati dalle formole

$$r = Z + 2m - 2, \quad i = \frac{I + Z}{2} - (r + 1),$$

che si traggono dalle (22). Anzi, distribuendo convenientemente gli  $r$  punti base uniti negli  $m$  angoli  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  (cfr. num. prec.) a cui corrispondono le  $m$  falde d'ogni superficie di quella classe (in particolare di  $\Phi$ ), possiamo fare in modo che gli ordini di connessione  $z_1, z_2, \dots, z_m$  delle falde appartenenti alla costruenda superficie assumano qualunque valore ( $\geq 0$ ) compatibile col dato  $Z$  e colla formola  $Z = \sum_{i=1}^m z_i - 2m + 2$ . Dunque, in definitiva si ha il teorema:

*L'ordine di connessione  $Z = \sum_{i=1}^m z_i - 2m + 2$  d'una superficie razionale reale della 1<sup>a</sup> famiglia, dotata di  $m$  falde  $A_1, A_2, \dots, A_m$  aventi gli ordini di connessione rispettivamente eguali a  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I (\geq 2m)$  dalle relazioni*

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad -2m + 2 \leq Z \leq I - 4m + 2; \quad (II)$$

*e, per un dato valore di  $m$  ed  $I (\geq 2m)$ , esistono in ogni classe, superficie*

<sup>(44)</sup> Che, come si ricava subito dalle (9), (8) vale anche per superficie con più falde.

corrispondenti a tutti i valori di  $z_1, z_2, \dots, z_m$  tali che il relativo  $Z$  sia compatibile colle relazioni stesse.

Si osservi ora che se  $r > 0$ , cioè  $Z > -2m + 2$ , esistono certo su qualche falda di  $\Phi$  punti fondamentali per la corrispondenza tra  $\Phi$  ed  $F$ , è che perciò le falde corrispondenti di  $F$  sono unilateri. Se ne dedurrà facilmente che:

*Le superficie della I<sup>a</sup> famiglia con  $m$  falde aventi l'ordine di connessione  $Z > -2m + 2$  possiedono almeno una falda unilatera e la somma degli ordini di connessione di tali falde è eguale a  $Z + 2m - 2$ . Al valor minimo  $Z = -2m + 2$  corrispondono invece superficie con tutte le falde bilatere (d'ordine di connessione 0).*

In particolare, poichè in virtù delle (II) il valor minimo di  $Z$  è raggiunto solo se  $I$  è pari si ha che:

*Tutte le superficie della I<sup>a</sup> famiglia con più falde ed invariante  $I$  dispari hanno almeno una falda unilatera.*

17. II<sup>a</sup> famiglia. Ogni superficie  $F$  di essa è trasformabile realmente nella superficie

$$z^2 = f(xy), \quad (24)$$

$f = 0$  essendo una quartica di genere 3, dotata di 4 rami reali racchiudenti ciascuno un'area semplicemente connessa nell'interno della quale  $f$  è positivo (F. n.º 33). Dunque, ragionando come al numero precedente, si vede che la superficie (24) ha quattro falde bilatere d'ordine di connessione 0, cioè che essa è una superficie  $\Phi$ . Il suo ordine di connessione risulta, per la (8), eguale a  $-6$ .

Se dunque il sistema  $\Sigma$  relativo alla rappresentazione piana normale di  $F$  ha dei punti base, oltrechè nei 7 punti fondamentali di  $\tau$ , anche in  $r$  punti uniti e in  $2i$  punti corrispondenti in  $\tau$ , si avrà, ragionando come precedentemente,  $I = r + 2i + 6$ ,  $Z = r - 6$ , e quindi

$$I - Z = 2(i + 6), \quad I + Z = 2(r + i), \quad (25)$$

da cui segue

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad Z \leq I - 12. \quad (26)$$

Di qui, come al num. prec., si dedurrà senza difficoltà che:

*L'ordine di connessione  $Z = \sum_{i=1}^4 z_i - 6$  d'una superficie razionale reale della II<sup>a</sup> famiglia, dotata di 4 falde  $A_1, \dots, A_4$  aventi gli ordini di connessione*

rispettivamente eguali a  $z_1, \dots, z_i$ , è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I (\geq 6)$  dalle relazioni

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad -6 \leq Z \leq I - 12, \quad (III)$$

e, per un dato valore di  $I$ , esistono, in ogni classe di quella famiglia, superficie corrispondenti a tutti i valori di  $z_1, \dots, z_i$  tali che  $Z$  risulti compatibile colle relazioni stesse.

Le superficie della II<sup>a</sup> famiglia aventi l'ordine di connessione  $Z > -6$  possiedono almeno una falda unilatera e la somma degli ordini di connessione di tali falde è eguale a  $Z + 6$ . Al valor minimo  $Z = -6$  corrispondono invece superficie con tutte le falde bilatere (d'ordine di connessione 0).

Tutte le superficie della II<sup>a</sup> famiglia con invariante  $I$  dispari hanno almeno una falda unilatera.

18. III<sup>a</sup> famiglia. Ogni superficie  $F$  di essa si può rappresentare doppiamente sopra un cono quadrico reale  $\Gamma$ , con sestica di diramazione dotata di cinque rami reali. Di questi rami uno è dispari (rispetto alle generatrici) e gli altri quattro pari; e questi stanno tutti in una fra le due regioni determinate dal ramo dispari e dal vertice. Alle quattro aree semplicemente connesse racchiuse dai rami pari, e a quella fra le regioni determinate dal ramo dispari e dal vertice che non contiene i rami pari rispondono le cinque falde di  $F$  (F. n.° 34, 35, 36).

Proiettando il cono  $\Gamma$  da un suo punto sopra un piano  $xy$ , si ricava che  $F$  può rappresentarsi doppiamente su quel piano, con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini. Scegliendo il centro di proiezione nella regione in cui stanno i rami pari, sopra una generatrice

che non li incontri, si vede che la sestica del piano  $xy$  ha cinque rami pari  $a, b, c, d, e$  racchiudenti ciascuno un'area semplicemente connessa ed *esterni* uno all'altro (Fig. 4); alle cinque aree  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  (tratteggiate nella Fig. 4) corrispondono le cinque falde di  $F$  e di qualunque sua trasformata reale.

Sicchè detta  $f(xy) = 0$  l'equazione della sestica potremo, col solito procedimento, trasformare realmente  $F$  nella superficie

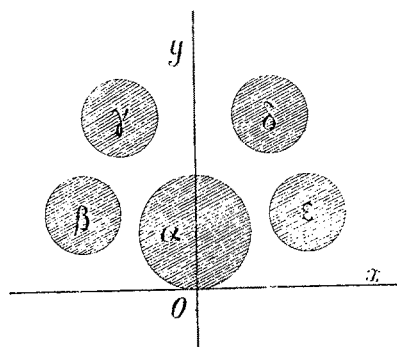


Fig 4.

$$z^2 = f(xy), \quad (27)$$

e in tale equazione il segno del 2.<sup>o</sup> membro risulterà determinato in modo che  $f$  sia positivo nelle cinque regioni  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ , a cui corrisponderanno le cinque falde  $A, B, C, D, E$  della superficie (27).

Sia ora  $a$  il ramo di  $f=0$  ch'è proiezione del ramo dispari appartenente a  $\Gamma$ ,  $O$  la traccia della generatrice di  $\Gamma$  che passa per il centro di proiezione. Il punto  $O$  sarà semplice, come singolarità *reale* del ramo  $a$ , ma sarà invece triplo, con un analogo punto infinitamente vicino, come singolarità (complessa) di  $f=0$ . La superficie (27) ha in  $O$  un *punto doppio uniplanare* speciale ed è priva di altre singolarità, sia reali che complesse, situate al *finito* (mentre in  $z=\infty$  ha un punto singolare *reale* isolato).

Sicchè le quattro falde  $B, C, D, E$  saranno finite, chiuse, prive di singolarità, bilatere e del tipo sfera; ma lo stesso non si potrà affermare della falda  $A$  pure finita e chiusa finchè non si determini l'influenza che ha sulla sua connessione la singolarità esistente in  $O$ .

Nel seguito sarà provato che la falda  $A$  è *unilatera ed ha l'ordine di connessione 1*, cioè che così si comporta in un qualunque modello della superficie (27) nel quale la singolarità sia risolta. Trattandosi di un'interessante applicazione dei metodi di questa Memoria ci riserviamo di trattarla in un apposito paragrafo in cui, mediante la rappresentazione piana normale, proveremo ancora che *la (27) è una superficie  $\Phi$* . Essa ha l'ordine di connessione  $0 + 0 + 0 + 0 + 1 - 10 + 2 = -7$ .

Ammissa per ora come vera la proprietà enunciata, ne seguirà che ogni superficie  $F$  della stessa classe di quella  $\Phi$  si può rappresentare sulla  $\Phi$  dotata di un certo numero  $r (\geq 0)$  di punti fondamentali, e quindi che:

*Ogni superficie della III<sup>a</sup> famiglia possiede una ed una sola falda (unilatera) che non si può ridurre bilatera mediante una trasformazione reale.*

Essa si chiamerà la *falda singolare* della superficie.

Consideriamo ora la rappresentazione piana normale della superficie  $F$ , e supponiamo che il relativo sistema  $\Sigma$  abbia  $8 + r + 2i$  punti base, di cui 8 nei punti fondamentali di  $\tau$ ,  $r$  uniti e  $2i$  a coppie corrispondenti in  $\tau$ . Si avrà  $I = r + 2i + 7$ , e, tenendo conto della rappresentazione di  $F$  su  $\Phi$ ,  $Z = r - 7$ ; quindi

$$I - Z = 2(i + 7), \quad I + Z = 2(r + i), \quad (28)$$

cioè

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad Z \leq I - 14. \quad (29)$$

Ragionando nel solito modo e tenendo presente che, se si vuol costruire

una superficie  $F$  corrispondente a valori dati di  $I$  e  $Z$  compatibili colle (29), si possono disporre arbitrariamente gli  $r$  punti base uniti di  $\Sigma$  in tal guisa che i corrispondenti punti fondamentali di  $\Phi$  sian distribuiti su ciascuna delle falde in numero prefissato, ma che però, comunque si operi, l'ordine di connessione della falda singolare rimane sempre  $> 1$ , si giunge alla conclusione seguente:

L'ordine di connessione  $Z = \sum_{i=1}^5 z_i - 8$  d'una superficie razionale reale della III<sup>a</sup> famiglia, dotata di 5 falde  $A_1, \dots, A_5$  aventi gli ordini di connessione rispettivamente eguali a  $z_1, \dots, z_5$ , è legato all'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I (\geq 7)$  dalle relazioni

$$Z \equiv I \pmod{2}, \quad -7 \leq Z \leq I - 14, \quad (\text{IV})$$

e, per un dato valore di  $I$ , esistono, in ogni classe di quella famiglia, superficie corrispondenti a tutti i valori di  $z_1, \dots, z_5$  tali che  $Z$  risulti compatibile colle relazioni suddette, e, se  $A_1$  è la falda singolare, sia  $z_1 \geq 1$ .

Tutte le superficie della III<sup>a</sup> famiglia hanno qualche falda unilatera, e la somma degli ordini di connessione di tali falde è eguale a  $Z + 8$ . Al valor minimo  $Z = -7$  corrispondono superficie con 4 falde bilatere (d'ordine di connessione 0) ed una unilatera (d'ordine di connessione 1).

Osserviamo infine che i due caratteri  $Z$  ed  $I$  relativi ad una superficie razionale reale  $F$  variano in modo diverso al variare di  $r$  ed  $i$ , come consegue dalle formole assegnate; tanto che la loro variazione, purchè compatibile colle disuguaglianze assegnate, si conserva *indipendente*. Vedremo nel prossimo paragrafo come si possa trovare un *terzo carattere* dipendente dalle proprietà *reali* della superficie  $F$ , che si esprime mediante  $r$  ed  $i$ , e che varia con essi in modo diverso da  $I$  e  $Z$ . L'eliminazione di  $r$  ed  $i$  ci condurrà allora ad una importante relazione.

## § 6.

IL NUMERO BASE REALE  $\bar{p}$ . RELAZIONE FRA I CARATTERI  $I$ ,  $Z$  e  $\bar{p}$ .

19. Diremo che  $\bar{p}$  curve *reali*  $C_1, C_2, \dots, C_{\bar{p}}$ , appartenenti ad una superficie algebrica *reale*  $F$  costituiscono su essa una base per le curve reali, o, più semplicemente, una *base reale*, se:

1.º Esse sono algebricamente indipendenti;

2.º Ogni altra curva *reale* di  $F$  è algebricamente legata ad esse <sup>(45)</sup>.

Il numero  $\bar{p}$ , che risulta ovviamente indipendente dalle curve che costituiscono la base, si dirà il *numero base reale* della superficie  $F$ .

Nel caso delle superficie regolari — in particolare razionali — due o più curve algebricamente dipendenti o indipendenti, lo sono, come è ben noto, anche linearmente. È questo il caso in cui noi ci troveremo.

Incominciamo collo studiare qual relazione interceda fra i numeri base reali  $\bar{p}_0, \bar{p}$ , di due superficie algebriche reali  $\Phi, F$  fra cui interceda una trasformazione birazionale reale, priva di punti fondamentali su  $F$  e dotata su  $\Phi$  di  $m = r + 2i$  punti fondamentali. Fra questi, i punti  $P_1, P_2, \dots, P_r$  sian reali, e i punti  $Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2, \dots, Q_i, Q'_i$  due a due immaginari coniugati. Indichiamo con  $C_1, C_2, \dots, C_r, D_1, D'_1, D_2, D'_2, \dots, D_i, D'_i$  le curve corrispondenti di  $F$ , con  $B_1, B_2, \dots, B_{\bar{p}_0}$  le curve reali che costituiscono una base su  $\Phi$ , con  $E_1, E_2, \dots, E_{\bar{p}_0}$  le corrispondenti su  $F$ .

Ogni curva reale  $K$  di  $F$ , essendo la trasformata d'una curva reale di  $\Phi$  passante con certe molteplicità per i punti fondamentali, sarà linearmente legata alle curve *indipendenti* <sup>(46)</sup>  $E_1, E_2, \dots, E_{\bar{p}_0}, C_1, C_2, \dots, C_r, D_1, D'_1, \dots, D_i, D'_i$  da una relazione del tipo

$$m K \equiv e_1 E_1 + e_2 E_2 + \dots + e_{\bar{p}_0} E_{\bar{p}_0} + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_r C_r + \\ + d_1 D_1 + d'_1 D'_1 + \dots + d_i D_i + d'_i D'_i;$$

e quindi anche dalla relazione

$$m K \equiv e_1 E_1 + e_2 E_2 + \dots + e_{\bar{p}_0} E_{\bar{p}_0} + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_r C_r + \\ + d_1 D'_1 + d'_1 D_1 + \dots + d_i D'_i + d'_i D_i,$$

che si ottiene operando sui due membri della precedente colla trasformazione di coniugio di  $F$ .

Si avrà dunque sottraendo membro a membro

$$(d_1 - d'_1)(D_1 - D'_1) + \dots + (d_i - d'_i)(D_i - D'_i) \equiv 0,$$

e quindi, per l'indipendenza delle curve  $D$ ,

$$d_1 = d'_1, \dots, d_i = d'_i;$$

<sup>(45)</sup> Per il significato delle locuzioni qui usate cfr. SEVERI, *Sulla totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica* [Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), pp. 194-225].

<sup>(46)</sup> SEVERI, loco cit. <sup>(39)</sup>, § 7.

e perciò la prima relazione scritta diverrà

$$mK \equiv e_1 E_1 + e_2 E_2 + \cdots + e_{\bar{\rho}_0} E_{\bar{\rho}_0} + c_1 C_1 + \cdots + c_r C_r + \\ + d_1 (D_1 + D'_1) + \cdots + d_i (D_i + D'_i),$$

da cui segue che le curve reali linearmente indipendenti

$$E_1, E_2, \dots, E_{\bar{\rho}_0}, C_1, C_2, \dots, C_r, D_1 + D'_1, D_2 + D'_2, \dots, D_i + D'_i,$$

costituiscono una *base reale* su  $F$ . Se ne deduce la cercata relazione

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + r + i. \quad (30)$$

Nulla importa per la validità di essa che i punti fondamentali di  $\Phi$  sian distinti o infinitamente vicini; per persuadersene basta osservare che la corrispondenza tra  $\Phi$  ed  $F$  può, coll'introduzione di superficie ausiliarie, esser decomposta in una successione di corrispondenze in ciascuna delle quali si introduca un sol punto fondamentale.

Applichiamo ora la formola (30) a determinare il numero  $\bar{\rho}$  per tutte le superficie razionali reali, dando ai numeri  $r$  ed  $i$ , caso per caso, i significati loro attribuiti nei due paragrafi precedenti.

*Superficie con una falda.*

*Caso  $\alpha$ .* Assumendo come  $\Phi$  un piano reale ( $\bar{\rho} = 1$ ), si ha subito

$$\bar{\rho} = r + i + 1. \quad (31)$$

*Caso  $\beta$ .*  $F$  è rappresentabile sopra una quadrica reale  $\Phi$ , ellittica o iperbolica, secondo che  $F$  è del tipo sfera o del tipo toro, dotata di  $2i$  punti fondamentali due a due immaginari coniugati. Detto  $\bar{\rho}_0$  il numero base di  $\Phi$  si ha dunque  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + i$ .

Ora su  $\Phi$  la base dal punto di vista complesso è costituita da due generatrici  $g_1, g_2$  appartenenti a schiere diverse, e per ogni curva  $D$  di  $\Phi$  (trattandosi di base *minima*) si ha

$$D \equiv a g_1 + b g_2 \quad (a, b \text{ interi}). \quad (32)$$

Se  $\Phi$  è iperbolica  $g_1$  e  $g_2$  son reali, e perciò  $\bar{\rho}_0 = 2$ ; invece, se  $\Phi$  è ellittica  $g_1$  e  $g_2$  si possono supporre immaginarie coniugate, e allora, operando sui due membri della (32) colla trasformazione di coniugio di  $\Phi$  si trae subito che  $a = b$ , cioè che su  $\Phi$  la base è costituita dall'*unica* curva reale (sezione



piana)  $g_1 + g_2$ . Dunque in tal caso  $\rho_0 = 1$ , e quindi in definitiva

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= i + 1 && \text{se } F \text{ è del tipo sfera;} \\ \bar{\rho} &= i + 2 && \text{se } F \text{ è del tipo toro.} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

*Caso  $\gamma$* . Sia  $\Phi$  una superficie corrispondente ad  $r = i = 0$ , cioè tale che il sistema lineare reale imagine, sul piano  $\pi$ , di quello delle sezioni piane od iperpiane di  $\Phi$  abbia i punti base solo in  $O, P_1, P_2, \dots, P_m$  e per curve fondamentali (semplici) solo le rette  $p_1, p_2, \dots, p_m$  (cfr. n.º 14  $\gamma$ ). Il suo numero base (complesso)  $\rho_0$  è eguale a 2, come si ricava subito confrontando  $\pi$  e  $\Phi$  colla superficie rigata le cui sezioni piane od iperpiane hanno per imagine su  $\pi$  le curve d'ordine  $n$  abbastanza elevato con un punto  $n - 1$ -plo in  $O$  e punti base semplici in  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Tale è anche il relativo numero base reale  $\bar{\rho}_0$  perchè, se esso risultasse minore di 2, le due curve reali di  $\Phi$  corrispondenti ad una retta reale di  $\pi$  e all'intorno di  $O$  sarebbero dipendenti, il che è assurdo. Tenendo conto che ogni superficie  $F$  la cui rappresentazione piana normale presenti il caso  $\gamma$  (in relazione ai punti fondamentali  $O, P_i$  e alle rette fondamentali  $p_i$ ) si rappresenta sulla  $\Phi$  dotata di  $r + 2i$  punti fondamentali, ecc., si ricava per  $F$

$$\bar{\rho} = r + i + 2. \quad (34)$$

Passiamo ora alle superficie con più falde. Mantenendo ad  $F$  e  $\Phi$  i significati del paragrafo precedente, detti  $\bar{\rho}, \bar{\rho}_0$  i rispettivi numeri base reali, ricordando la rappresentazione di  $F$  su  $\Phi$  stabilita al n.º 15, avremo  $\bar{\rho} = \rho_0 + r + i$ ; e quindi tutto si ridurrà a determinare  $\rho_0$ . Supposto, come è lecito, che i punti base del sistema  $\Sigma$  relativo alla rappresentazione piana normale di  $\Phi$  cadano soltanto nei punti fondamentali di  $\tau$  e che  $\Sigma$  sia privo di curve fondamentali semplici (anzi si può supporre addirittura privo di curve fondamentali), si conclude che su  $\Phi$  la base (minima) dal punto di vista complesso è costituita dalla curva corrispondente ad una retta del piano  $\pi$  (su cui è rappresentata  $\Phi$ ) e dalle curve corrispondenti dei punti fondamentali di  $\tau$ .

Esaminiamo ora separatamente i vari casi.

*Iª famiglia*. Riferendoci, per i punti fondamentali di  $\tau$ , alle notazioni dei n.º 15, 16, indichiamo con  $R$  la curva di  $\Phi$ , corrispondente ad una retta di  $\pi$ , con  $C, D_1, D_2, \dots, D_{2m}$  le curve corrispondenti ai punti fondamentali  $O, P_1, P_2, \dots, P_{2m}$ , con  $L$  una curva reale (irriducibile) appartenente al fascio di curve razionali che corrisponde al fascio di rette di centro  $O$ , con  $K$  una

qualunque curva *reale* di  $\Phi$ . Si avrà l'equivalenza

$$K \equiv aR + bC + d_1 D_1 + d_2 D_2 + \dots + d_{2m} D_{2m},$$

da cui, tenendo conto che si ha ovviamente

$$L + C \equiv R,$$

seguirà

$$K \equiv \alpha L + \beta C + d_1 D_1 + d_2 D_2 + \dots + d_{2m} D_{2m}, \quad (\alpha = a, \beta = b + 1). \quad (35)$$

Sia ora  $C'$  la curva complessa coniugata di  $C$ , e siano  $D'_1, D'_2, \dots, D'_{2m}$  le curve complesse coniugate di  $D_1, D_2, \dots, D_{2m}$ , cioè quelle che corrispondono alle rette fondamentali  $p_1, p_2, \dots, p_{2m}$  di  $\tau$ : operando sui due membri della (35) colla trasformazione di coniugio di  $\Phi$  otterremo

$$K \equiv \alpha L + \beta C' + d_1 D'_1 + d_2 D'_2 + \dots + d_{2m} D'_{2m},$$

e quindi sommando

$$2K \equiv 2\alpha L + \beta(C + C') + d_1(D_1 + D'_1) + \dots + d_{2m}(D_{2m} + D'_{2m}).$$

Ma le curve  $D_i + D'_i$  sono componenti totali del fascio  $|L|$  perchè quando una retta del fascio  $O$  tende a  $p_i$  la curva  $L$  corrispondente tende alla curva spezzata  $D_i + D'_i$ , e perciò si ha

$$L \equiv D_1 + D'_1 \equiv D_2 + D'_2 \equiv \dots \equiv D_{2m} + D'_{2m},$$

e quindi in definitiva si conclude

$$2K \equiv \beta(C + C') + \gamma L, \quad (\gamma = 2\alpha + d_1 + \dots + d_{2m}). \quad (36)$$

D'altronde le due curve *reali*  $C + C'$  ed  $L$  sono indipendenti perchè in caso contrario dalla (36) si potrebbe trarre un'equivalenza del tipo

$$\mu K \equiv \nu L,$$

e quindi *ogni* curva reale di  $\Phi$  risulterebbe composta con curve del fascio  $L$ , il che è manifestamente assurdo. Dunque sarà  $\bar{p}_0 = 2$  e quindi:

$$\bar{p} = r + i + 2. \quad (37)$$

*II<sup>a</sup> famiglia.* Sia  $R$  la curva di  $\Phi$  corrispondente ad una retta  $s$  di  $\tau$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_r$  le curve corrispondenti ai punti  $P_1, P_2, \dots, P_r$  fondamentali

per  $\tau$ ,  $R'$  la curva complessa coniugata di  $R$ ,  $C'_1, C'_2, \dots, C'_7$  le complesse coniugate di  $C_1, C_2, \dots, C_7$ , che corrisponderanno ordinatamente alle cubiche  $K_1, K_2, \dots, K_7$  (passanti semplicemente per sei dei punti fondamentali, e doppiamente per l'ulteriore punto a cui corrispondono in  $\tau$ ) (F. n.º 37). Detta  $K$  una qualunque curva reale di  $\Phi$  avremo l'equivalenza:

$$K \equiv a R + c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_7 C_7,$$

da cui, operando mediante il coniugio di  $\Phi$ , dedurremo

$$K \equiv a R' + c_1 C'_1 + c_2 C'_2 + \dots + c_7 C'_7,$$

e quindi sommando

$$2K \equiv a(R + R') + c_1(C_1 + C'_1) + \dots + c_7(C_7 + C'_7). \quad (38)$$

Ora si osservi che  $R'$  è la trasformata della curva corrispondente ad  $s$  in  $\tau$ , cioè d'una curva d'ottavo ordine coi punti tripli  $P_1, P_2, \dots, P_7$  e che quindi  $R + R'$  appartiene al sistema lineare di  $\Phi$  trasformato di quello delle curve di 9.º ordine coi punti tripli  $P_1, P_2, \dots, P_7$ . Ne segue che se si indica con  $L$  una curva *reale* di  $\Phi$  che corrisponda ad una cubica della rete individuata da  $P_1, P_2, \dots, P_7$ , la quale sia unita in  $\tau$ , si ha

$$R + R' \equiv 3L,$$

e siccome è ancora ovviamente

$$C_1 + C'_1 \equiv C_2 + C'_2 \equiv \dots \equiv C_7 + C'_7 \equiv L,$$

così, dalla (38) si trae in definitiva

$$2K \equiv \alpha L^{(47)}, \quad (\alpha = 3a + c_1 + \dots + c_7)$$

e quindi  $\bar{p}_0 = 1$ , e

$$\bar{p} = r + i + 1. \quad (39)$$

*IIIª famiglia.* Ragionando come precedentemente si conclude che per qualunque curva reale  $K$  di  $\Phi$  vale la relazione d'equivalenza

$$2K \equiv \alpha L,$$

(47) Questa relazione si può interpretare dicendo che tutte le curve unite in  $\tau$  sono d'ordine  $3n \left( n = \frac{\alpha}{2} \right)$  coi 7 punti  $P_1, P_2, \dots, P_7$   $n$ -pli. Ciò si può anche ricavare direttamente, come in F. n.º 37.

$L$  essendo la curva corrispondente ad una cubica del fascio individuato dagli 8 punti  $P_1, P_2, \dots, P_8$  fondamentali in  $\tau$ . Dunque  $\bar{\rho}_0 = 1$ , e

$$\bar{\rho} = r + i + 1. \tag{40}$$

Confrontiamo ora i risultati delle formole (15) (15') (15'') (22) (25) (28) con quelli delle (31) (33) (34) (37) (39) (40) nella seguente tabella :

	$I + Z$	$\bar{\rho}$
<i>Superficie con una falda. Caso</i> $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right.$	(tipo sfera) $2(r + i)$	$r + i + 1$
	(tipo toro) $2i$	$i + 1$
	$2(i + 1)$	$i + 2$
<i>Superficie con più falde. Famiglia . . .</i> $\left\{ \begin{array}{l} \text{I}^a \\ \text{II}^a \\ \text{III}^a \end{array} \right.$	$2(r + i + 1)$	$r + i + 2$
	$2(r + i + 1)$	$r + i + 2$
	$2(r + i)$	$r + i + 1$
	$2(r + i)$	$r + i + 1$

dal confronto si dedurrà il seguente teorema :

*Fra l'ordine di connessione  $Z$ , l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE  $I$  e il numero base reale  $\bar{\rho}$  di qualunque superficie razionale reale intercede la relazione*

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1). \tag{V}$$

§ 7.

APPLICAZIONI ED ESEMPLI.

STUDIO APPROFONDITO DELLA FALDA SINGOLARE APPARTENENTE  
ALLE SUPERFICIE DELLA III<sup>a</sup> FAMIGLIA.

20. I risultati dei paragrafi precedenti danno modo di determinare la connessione d'una superficie razionale reale partendo dalla sua rappresentazione piana, e quindi di assegnare dei modelli atti a rendere intuitive le

proprietà inerenti alla forma delle falde reali appartenenti alla superficie considerata. Converrà in proposito osservare che non è sempre strettamente necessario, quando si tratta d'un caso particolare, ricorrere alla rappresentazione piana normale della superficie. Così ad es. se si tratta d'una superficie rappresentabile realmente sul piano, l'ordine di connessione si potrà determinare aggiungendo 1 alla differenza fra il numero dei punti fondamentali reali e quello delle curve fondamentali semplici pure reali inerenti ad una rappresentazione piana reale della superficie (<sup>48</sup>). Dopo ciò dagli enunciati del n.º 14 si ricaverà subito, salvo nel caso  $Z=2$  che richiede una discussione più accurata, se la superficie sia bilatera o unilatera.

Diamo ora qualche esempio e sviluppiamo qualche applicazione, scelta fra quelle che, mentre consentono in modo semplice d'illustrare i risultati ottenuti, si prestano anche ad ulteriori brevi indagini, non prive d'interesse.

*Rigate cubiche di  $S_3$ .* Se si proiettano da un punto reale della direttrice doppia sopra un piano reale  $\pi$ , si ottiene ivi, come immagine delle sezioni piane della data superficie un sistema (reale)  $\infty^3$  di cubiche con un punto base doppio reale, e due punti base semplici che si posson supporre reali assumendo il centro di proiezione in un punto per cui passano due generatrici reali della rigata. Tale sistema ha due rette fondamentali (semplici) che son le congiungenti il punto base doppio  $P$  ai punti base semplici  $A, B$ , e però *la rappresentazione su  $\pi$  non è normale*. Per ridurla a quel tipo basta trasformare quadraticamente  $\pi$  in un altro piano reale  $\sigma$ , assumendo su  $\pi$  come triangolo fondamentale quello che ha per vertici i punti  $P, A, B$ ; si ottiene allora sopra  $\sigma$ , come immagine delle sezioni piane della superficie data, un sistema  $\infty^3$  di coniche aventi un punto base reale  $M$  (e soddisfacenti di più alla condizione di segare sulla retta  $p$  omologa di  $P$  le coppie d'una certa involuzione); e perciò *le rigate cubiche di  $S_3$  sono superficie unilatere d'ordine di connessione 2*.

*Superficie cubiche generali di  $S_3$ .* Si possono, come è noto, rappresentare sopra un piano (reale)  $\pi$  in guisa che alle loro sezioni piane risponda un sistema lineare  $S, \infty^3$ , di cubiche con 6 punti base  $A_1, A_2, \dots, A_6$  che (escludendo le rigate e le superficie con punti doppi) si possono supporre distinti e generici nel senso da non individuare curve (rette o coniche) fondamentali per  $S$ . La trasformazione  $T$ , immagine del coniugio della superficie data, dovendo lasciare unito  $S$ , non avrà punti fondamentali fuori di  $A_1,$

(<sup>48</sup>) Cfr. ENRIQUES, loco cit. (1).

$A_2, \dots, A_6$ ; e perciò, come si ricava subito dalla considerazione dei casi possibili, o dall'elenco dei tipi normali con al più 6 punti fondamentali (F. n.º 37), si può ridurre (mediante successive trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali in punti base di  $S$  o dei suoi trasformati, che mutano in definitiva  $S$  in un sistema  $\Sigma$  perfettamente analogo) al coniugio, ovvero ad una trasformazione di 3.º ordine con un punto fondamentale doppio e quattro semplici (<sup>49</sup>); e in quest'ultimo caso la superficie cubica apparterrà alla Iª famiglia e avrà *due* falde (F. n.º 41). Ridotta così la  $T$  a tipo normale  $\tau$ , poichè il sistema  $\Sigma$  si comporta come  $S$ , la rappresentazione piana della superficie sarà normale.

Se  $\tau$  è il coniugio, ci troviamo nel caso  $\alpha$ ) del n.º 14; dalle formole ivi assegnate, unite alla (31), col solito significato delle notazioni, tenendo conto che  $r + 2i = 6$ , siamo condotti allora ai casi elencati nella seguente tabella:

$r$	$i$	$I$	$Z$	$\bar{p}$	$v$
0	3	5	1	4	3
2	2	5	3	5	7
4	1	5	5	6	15
6	0	5	7	7	27

in cui  $v$  indica il numero delle rette reali appartenenti alla superficie, che si determina subito in corrispondenza a dati valori di  $r$  ed  $i$  tenendo conto della nota rappresentazione piana di quelle rette. Le superficie considerate sono poi tutte unilateri (<sup>50</sup>).

Se invece  $\tau$  è una trasformazione di 3.º ordine col punto fondamentale doppio  $A_1$  ed i punti fondamentali semplici  $A_2, A_3, A_4, A_6$ , l'ulteriore punto

(<sup>49</sup>) Le trasformazioni antiquadratiche prive di punti uniti non si presentano trattandosi di superficie che hanno sempre punti reali.

(<sup>50</sup>) I valori ottenuti per  $Z$  coincidono con quelli assegnati da SCHLÄFLI nel lavoro *Correzione*, ecc. (citato (<sup>21</sup>)), non con quelli di KLEIN, *Ueber*, ecc. (citata (<sup>17</sup>)), in quanto ivi l'Autore parte dall'assegnare all'ordine di connessione del piano il valore 2, e neppure con quelli dell'altra Memoria di KLEIN, *Bemerkungen*, ecc., che si riferiscono all'ordine di connessione  $Z' = 2Z - 2$  delle superficie unilateri considerate come doppie.

base  $A_6$  di  $\Sigma$  sarà unito in  $\tau$ , e, dalle formole del n.º 16, per  $m = 2$ ,  $r = 1$  si avrà  $I = \bar{5}$ ,  $Z = -1$ ; delle due falde, una sarà unilatera ( $z_1 = 1$ ), l'altra bilatera ( $z_2 = 0$ ). Inoltre dalla (37) si ricava  $\bar{p} = 3$ , e infine facilmente si trova  $v = 3$ .

Per avere un controllo dei risultati sopra elencati consideriamo una superficie cubica reale  $F$ , per cui sia  $v = 27$ . Essa sarà unilatera e avrà l'ordine di connessione 7; onde (n.º 10) si potrà considerare equivalente ad un foglio piano congiunto ad una sfera per mezzo di quattro tubi, ovvero a quel foglio sormontato da un ponte a tre archi. Cerchiamo di ritrovare per via completamente diversa questi modelli.

Perciò detto  $O$  un punto *ellittico* di  $F$ ,  $\sigma$  il relativo piano tangente,  $D$  l'ulteriore intersezione di  $\sigma$  con  $F$ , che sarà composta d'un sol ramo chiuso, non passante per  $O$ , e dispari perchè segato in un punto da ogni retta di  $\sigma$  per  $O$ , proiettiamo doppiamente  $F$  da  $O$  su un piano reale  $\pi$  parallelo a  $\sigma$ . La curva di diramazione della corrispondenza (1, 2) così stabilita fra  $\pi$  ed  $F$  sarà, come è noto, una quartica  $C_4$  di genere 3, reale, e avente tutte le 28 bitangenti reali. Fra esse 27 son proiezioni delle rette di  $F$ , l'altra è la retta impropria di  $\pi$ ; e su essa i contatti sono imaginari coniugati in corrispondenza alle tangenti principali che escono da  $O$ . Perciò <sup>(\*)</sup>  $C_4$  avrà *quattro rami reali*  $r_1, r_2, r_3, r_4$  *pari* (ciascuno dei quali racchiude un'area semplicemente connessa) *tutti situati al finito*.

Ad ogni punto  $P$  di  $\pi$  esterno alle regioni racchiuse dai rami di  $C_4$  rispondono due punti reali e distinti di  $F$  i quali tendono a coincidere quando  $P$  tende ad un punto situato su uno dei rami. Se invece  $P$  si allontana indefinitamente, uno dei due punti corrispondenti tende ad  $O$ , l'altro ad un punto della curva  $D$ .

Per cui se il piano  $\pi$  si imagina sdoppiato in due fogli  $\alpha, \beta$  forati in corrispondenza alle aree racchiuse da  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e connessi lungo il loro contorno, l'insieme di tali due fogli così preparati si può porre in corrispondenza biunivoca continua con  $F$ , dotata su  $F$  del punto fondamentale  $O$  a cui corrisponde la retta impropria d'uno dei due piani, per es. di  $\beta$ ; mentre alla retta impropria del piano  $\alpha$  risponde, punto per punto, la curva  $D$ . Sicchè per avere un *modello* di  $F$  basterà far sparire l'eccezione esistente in corrispondenza alla retta impropria di  $\beta$ .

(\*) ZEUTHEN, *Sur les courbes du quatrième ordre* [Mathematische Annalen, VII (1873), pp. 410-432].

Lo scopo si raggiunge mediante una proiezione stereografica che trasformi la parte del piano  $\beta$  esterna ad un circolo  $k$  il quale racchiuda nel suo interno  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , in una mezza sfera avente  $k$  per circolo massimo. Dopo ciò il foglio  $\beta$ , mediante evidente deformazione, potrà ridursi ad una sfera riunita ad  $\alpha$  mediante quattro tubi corrispondenti ai giunti lungo i rami  $r_1, r_2, r_3, r_4$ ; e così si ritroverà per altra via il modello sopra assegnato.

21. *Connessione della falda singolare appartenente alle superficie della III<sup>a</sup> famiglia.*

Incominciamo col determinare la rappresentazione piana normale della superficie reale  $\Phi$  rappresentata dall'equazione

$$z^2 = f(x, y),$$

nella quale  $f=0$  è una sestica reale dotata di due punti tripli infinitamente vicini, risidenti nell'origine  $O$  delle coordinate e disposti lungo l'asse delle  $x$ . Per i rami di  $f=0$ , e le falde di  $\Phi$  manterremo le notazioni del n.º 18, e per quanto riguarda quelle proprietà della rappresentazione piana che qui vengono enunciate senza dimostrazione, rimandiamo ai n.º 29, 36 di F.

Il sistema  $\Sigma$  relativo alla rappresentazione piana normale di  $\Phi$  sarà unito in una trasformazione  $\tau$  di 17.º ordine con 8 punti (fondamentali)  $P_1, P_2, \dots, P_8$  sestupli (che si posson supporre reali (cfr. F. n.º 49)) i quali son doppi per un sistema  $S, \infty^3$ , di sestiche dotato delle proprietà che tutte le sue curve le quali passano per un punto del piano  $\pi$  (che lo sostiene), passano di conseguenza per un altro punto, coniugato del primo in una involuzione  $I$ , unita in  $\tau$ , a cui risponde l'involuzione reale  $x' = x, y' = y, z' = -z$  di  $\Phi$ .

Entro  $S$  esiste una rete  $R$ , dotata di due (ulteriori) punti base semplici  $M, N$  coniugati in  $I$ , legata alla rete delle rette appartenenti al piano  $xy$  da una proiettività  $\lambda$  che permette di rappresentare doppiamente il piano  $\pi$  sul piano  $xy$  in modo che ai punti di  $xy$  rispondano coppie di  $I$ ; e in tale rappresentazione alla  $C_6$  unita in  $I$  (per cui i punti  $P_i$  sono tripli) risponde la sestica  $f=0$ . Alla retta impropria di  $xy$  che taglia  $f=0$  in sei punti, due a due immaginari coniugati, corrisponde una curva  $K$  di  $R$  che taglia  $C$  ( $\equiv C_6$ ) in sei punti  $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$  (fuori dei punti base di  $R$ ) due a due corrispondenti in  $\tau$ .

Sia  $X$  la cubica del fascio individuato da  $P_1, P_2, \dots, P_8$ , che passa per  $M$ , e quindi per  $N$  (in quanto ogni cubica di quel fascio è unita in  $I$ ) e si consideri il sistema  $\Lambda, \infty^3$ , delle curve di 18.º ordine individuato dalla rete  $2K + R$ , colla curva  $2K$  fissa e dalla curva  $3X = C$ , cioè quello che ha come



punti base

$$\begin{array}{ll} P_1, P_2, \dots, P_8 & \text{sestupli,} \\ M, N & \text{tripli,} \end{array}$$

$Q_1, Q_2, \dots, Q_6$  ciascuno con un analogo punto infinitamente vicino su  $C$ , *semplici*. Ci proponiamo di provare che tal sistema  $\Lambda$  coincide col sistema  $\Sigma$  relativo alla rappresentazione piana normale di  $\Phi$ .

Invero detta  $\omega$  la proiettività che intercede fra  $R$  e la stella dei piani paralleli all'asse  $z$  quando si chiami omologo d'una curva  $\rho$  di  $R$  quel piano della stella anzidetta che passa per la retta di  $xy$  corrispondente a  $\rho$  in  $\lambda$ , si pongano le curve di  $\Lambda$  in corrispondenza proiettiva coi piani dello spazio  $x, y, z$  in modo che all'antiproiettività subordinata entro  $\Lambda$  da  $\tau$  risponda il coniugio, e che inoltre sian soddisfatte le seguenti condizioni compatibili colla precedente:

Alla rete  $2K + R$  risponda, mediante  $\omega$ , la stella dei piani paralleli all'asse  $z$ ;

Alla curva  $3X + C$  risponda il piano  $z = 0$ .

A siffatte condizioni si può soddisfare in  $\infty^1$  modi, ciascuno dei quali conduce ad una superficie di 6.<sup>o</sup> ordine a sezioni piane di genere 10, rappresentata su  $\pi$  mediante  $\Lambda$  e  $\tau$ . Un'analisi ulteriore, non difficile, che per brevità omettiamo, prova che si cade sopra una delle  $\infty^1$  superficie

$$z^2 = cf(xy),$$

$c$  essendo una costante reale. Sarà dunque lecito supporre scelta la proiettività anzidetta in modo che sia  $c = 1$ , e allora si cadrà sulla superficie  $\Phi$ . Siccome  $\Lambda = \Sigma$  è un sistema privo di curve fondamentali semplici, così la rappresentazione piana stabilita per  $\Phi$  risulterà normale<sup>(52)</sup>.

Si avranno inoltre le relazioni seguenti, che ci limitiamo ad enunciare:

Al fascio delle curve  $2K +$  corrisponde Il fascio delle sezioni coi  
 $X + U$  la cui parte variabile  $U$  su  $\Phi$  piani passanti per l'asse  $z$ ;  
 è una cubica per  $P_1, P_2, \dots, P_8$ ;

Alla curva  $X$ ;

L'intorno del punto singolare  $O$ ;

<sup>(52)</sup> Nelle ultime righe del n.° 41 (fine del § 6) di F. è affermato che la superficie  $z^2 = f(xy)$  può ottenersi come *proiezione* particolare d'una  $F_9$  di  $S_8$  per cui  $\Sigma$  è un sistema di curve di 9.<sup>o</sup> ordine. Si tratta d'una svista senza conseguenze,

Alla curva $K$ ;	<i>corrisponde</i>	L'intorno del punto quadru-
	su $\Phi$	plo improprio;
Alla curva $2X + 2K$ ;		La sezione col piano $y=0$ ;
Ai punti $M, N$ ;		Le due cubiche $\mu, \nu$ sezioni
		di $\Phi$ col piano $y=0$ ;
Ai punti $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ cia-		Le sei rette sezioni di $\Phi$ col
scuno preso assieme coll'analogo		piano improprio ciascuna delle
punto infinitamente vicino;		quali contiene un punto doppio
		di $\Phi$ infinitamente vicino al punto
		quadruplo.

Da esse si trae anzitutto che, siccome le due cubiche  $\mu, \nu$  sono immaginarie coniugate, così i due punti  $M, N$  saran corrispondenti in  $\tau$ , e perciò il sistema  $\Sigma$  si troverà nelle condizioni assegnate in principio del n.º 15 per la costruzione delle superficie che là s'indicavano con  $\Phi$ . Cerchiamo poi di servirci di quelle relazioni per studiare la connessione della falda singolare  $A$  appartenente a  $\Phi$ .

Sia  $\Phi_0$  una superficie priva di punti multipli, equivalente a  $\Phi$ , costruita a partire da un sistema lineare  $\Sigma_0$  di  $\pi$ , unito in  $\tau$ , privo di curve fondamentali, e avente punti base solo in  $P_1, P_2, \dots, P_8$ ;  $A_0$  la falda di  $\Phi_0$  corrispondente ad  $A$ .

Supponiamo, come è evidentemente lecito (cfr. Fig. 5), che il piano  $x=0$  tagli soltanto la falda  $A$ , e sia  $\varphi$  un angolo diedro (di cui nella Fig. 5 è segnata la sezione normale) contenente quel piano e tutto costituito da piani analoghi. Alle sezioni di essi colla falda  $A$  corrisponderanno su  $\pi$  (tolta la parte fissa che proviene dagl'intorni dai punti multipli di  $\Phi$  situati sull'asse  $z$ ) cubiche del fascio  $U$ , e su  $A_0$  certe curve  $V$  formanti un sistema continuo. Siccome due cubiche  $U$  si tagliano, fuori di  $P_1, P_2, \dots, P_8$  in un punto  $P_g$  unito in  $\tau$  (F. n.º 29), così due curve  $V$  si taglieranno in *un sol* punto reale, e perciò  $A_0$  — e quindi  $A$  — sarà unilatera (n.º 7).

Proviamo ora che  $A$  ha l'ordine di connessione 1. Perciò immaginiamo di asportare da  $A$  la singolarità esistente in  $O$ , tagliando  $A$  lungo una piccola curva  $m$  (di cui nella Fig. 5 è segnata la proiezione) sezione di  $A$  con un piano  $y=\varepsilon$  ( $\varepsilon$  essendo convenientemente piccolo) in tal guisa da dividere  $A$  in due pezzi  $P, Q$ , di cui il secondo contenga la singolarità. Il taglio  $m_0$  corrispondente su  $A_0$  la spezzerà in due parti  $P_0, Q_0$  di cui la seconda conterrà la curva reale  $\xi$  corrispondente all'intorno di  $O$ , cioè ad  $X$ . Ad  $m_0$  cor-

risponderà su  $\pi$  (tolta la parte fissa  $2S$ ) una curva di  $R$  la quale al tendere di  $\varepsilon$  a zero, cioè di  $m$  ad  $O$ , tenderà alla curva  $2X$ . Una tal proprietà si rende assai chiara osservando che, siccome lungo  $\xi$  l'indicatrice si inverte — in quanto  $\xi$  appartiene ad un sistema continuo analogo a quello delle curve  $V$  — così la curva  $m_0$ , infinitamente vicina a  $\xi$ , dovrà passare due volte nell'intorno di ogni punto di  $\xi$ , da bande opposte, giacchè  $m_0$  e  $\xi$  non hanno punti comuni perchè  $m$  non passa per  $O$ . Dunque al tendere di  $\varepsilon$  a zero,  $m_0$  tenderà a  $2\xi$ .

Se ne deduce che la falda  $Q_0$  è formata da una sottile striscia aderente a  $\xi$  e avente l'unico orlo  $m_0$ , cioè è del tipo della superficie di MÖBIUS.

Il suo ordine di connessione  $Z_{Q_0} = Z_Q$  sarà dunque eguale a 2. Invece la falda  $P_0$  equivalente a  $P$  è, come  $P$ , del tipo d'una calotta sferica, cioè ha l'ordine di connessione  $Z_{P_0} = Z_P = 1$ .

Se ora dal n.º 8 ricordiamo che l'ordine di connessione d'una falda non si altera per effetto d'un taglio chiuso, anche se questo la spezza, e teniam presente la formola (8) avremo

$$Z_A = Z_P + Z_Q - 2 = 1. \quad \text{c. d. d. } (^{53}).$$

22. L'indagine precedente ci offre l'esempio d'una falda  $A$  l'ordine di connessione della quale non si altera asportando da  $A$  l'intorno  $Q$  d'un suo punto multiplo isolato. Ci si può domandare se un'analogha operazione si possa fare per qualunque punto multiplo isolato  $V$  d'una superficie razionale reale  $R$ , conducendo allo stesso risultato.

Evidentemente la risposta a tale questione dipende dalle convenzioni che si adottano sul modo di eseguire i tagli atti a staccare la singolarità. Ci occuperemo qui di stabilirne in modo preciso l'esecuzione e l'influenza, nel caso semplice *in cui il cono  $\Gamma$  tangente ad  $F$  in  $V$  non abbia parti nè generatrici multiple reali*, cioè sia composto d'una o più falde chiuse, pari

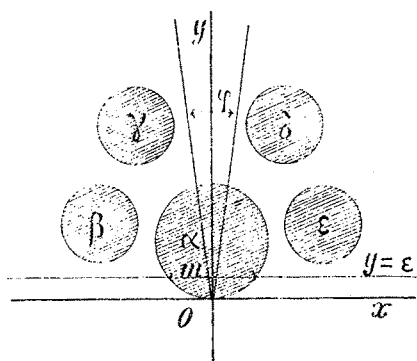
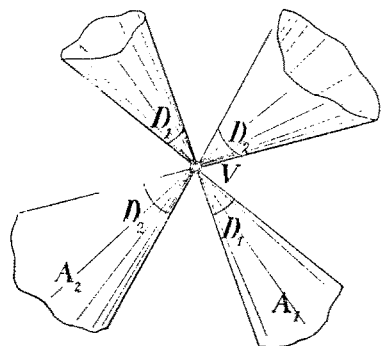


Fig 5.

(<sup>53</sup>) Dai ragionamenti precedenti si rileva che il punto singolare  $O$  produce sulla falda  $A$  lo stesso effetto d'un punto fondamentale o d'un intreccio di 1.ª specie.

o dispari (nel senso di STAUDT), aventi in comune solo il vertice. Escludiamo che fra esse vi siano dei fasci di raggi.

Fissiamo l'attenzione sopra una di quelle falde, che indicheremo con  $A_1$ , e segniamo, sopra ognuna delle generatrici che le appartengono, i due punti distanti dal vertice d'un segmento piccolissimo  $\varepsilon$ . Otterremo in tal modo una curva reale  $D_1$ , composta di uno o due rami, secondo che  $A_1$  è dispari o pari; e tal curva potrà supporre trasportata in un'analogha curva  $C_1$  di  $F$  mediante una piccola deformazione che adatti la falda  $A_1$  su quella parte di  $F$  che le è aderente. Imaginiamo ripetuta la stessa operazione per tutte le falde  $A_1, A_2, \dots, A_m$  di  $\Gamma$ , indi tagliamo  $F$  lungo le curve  $C_1, C_2, \dots, C_m$  così ottenute, asportando l'intorno di  $V$ . Vogliam provare



*Fig. 6.*

che l'ordine di connessione  $Z_1$  della superficie  $F_1$  rimanente (che può eventualmente esser composta d'un numero di falde superiore a quello relativo ad  $F$ ) è eguale all'ordine di connessione  $Z$  di  $F$ .

Poichè la singolarità di  $F$  in  $V$  è *ordinaria* dal punto di vista reale (cioè non ha altre singolarità reali infinitamente vicine) potremo risolverla mediante il sistema delle forme d'ordine abbastanza elevato passanti per  $V$ , mutando  $F$  in una superficie  $\Phi$  ad essa equivalente<sup>(54)</sup>; e poichè a due punti reali infinitamente vicini a  $V$  in direzioni distinte rispondono due punti distinti di  $\Phi$ , così al punto  $V$  risponderà su  $\Phi$  una curva composta di  $m$  rami reali  $V_1, V_2, \dots, V_m$  (chiusi) privi di punti doppi e di punti comuni.

Indichiamo ora con  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  le curve di  $\Phi$  corrispondenti a  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . La curva  $\Delta_i$  sarà infinitamente vicina a  $V_i$  e tenderà ad essa col tendere di  $\varepsilon$  a zero; anzi ad ogni punto di  $V_i$  si potranno associare due punti di  $\Delta_i$  situati da bande opposte rispetto a  $V_i$ , i quali provengono da due punti situati sopra una medesima generatrice del cono  $A_i$ . In particolare se  $\Delta_i$  ha un sol ramo (cioè se  $A_i$  è una falda dispari) si potrà, descrivendolo, passare da uno all'altro di quei due punti, e quindi lungo  $V_i$ , l'indicatrice s'invertirà sopra  $\Phi$ .

Tagliando  $\Phi$  lungo  $\Delta_i$  se ne staccherà un pezzo  $\pi$ , formato da una sot-

<sup>(54)</sup> Tale affermazione domanderebbe una breve indagine che crediamo lecito risparmiarci.

tile striscia aderente a  $V$ , e avente per orlo  $\Delta_i$ , che sarà assimilabile ad una superficie di MÖBIUS o ad una corona circolare secondo che  $\Delta_i$  avrà uno o due rami; in ogni caso avrà ordine di connessione 2. Immaginando eseguita la stessa operazione per tutte le curve  $\Delta_i$  rimarrà, dopo asportati i pezzi  $\pi_i$ , una superficie  $\Phi_1$  che sarà evidentemente equivalente ad  $F_1$ . Poichè d'altronde i tagli chiusi non alterano l'ordine di connessione d'una superficie, così, tenendo conto della (8), con ovvio significato dei simboli, avremo

$$Z_{\Phi} = Z_{\Phi_1} + \sum_{i=1}^m Z_{\pi_i} - 2(m+1) + 2,$$

cioè, perchè  $Z_{\pi_i} = 2$ ,

$$Z_{\Phi} = Z_{\Phi_1},$$

da cui, per l'equivalenza di  $F$ ,  $\Phi$  e di  $F_1$ ,  $\Phi_1$ , segue

$$Z_F = Z_{F_1}, \quad \text{c. d. d.}$$

Se il cono  $\Gamma$  avesse delle generatrici multiple o delle parti multiple reali, la costruzione delle curve  $D$  può cadere in difetto, e le cose possono ancora complicarsi per la presenza di punti multipli o di punti comuni alle curve  $V$ . Lo studio di quei casi esigerebbe un'analisi assai delicata, che ci risparmiamo, bastandoci d'aver trattato esaurientemente il caso più espressivo <sup>(55)</sup>.

15 aprile 1914.

---

<sup>(55)</sup> Nota aggiunta durante la correzione delle bozze (26 novembre 1914). A proposito della costruzione del sistema  $L \equiv |C + C'|$  di cui si parla al n.° 13 — sui dettagli della quale abbiamo per brevità sorvolato — vogliam qui osservare che le condizioni imposte a quel sistema son soddisfatte appena lo siano per  $|C|$ . La possibilità di costruire un sistema  $|C|$  che così si comporti in relazione ad un dato gruppo base  $A_1, A_2, \dots, A_m$  trovasi stabilita in un recentissimo lavoro di SEVERI, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in una priva di punti multipli*, di prossima pubblicazione.

---

## INDICE

---

	PAG.
INTRODUZIONE . . . . .	215
§ 1. Rappresentazione piana normale delle superficie razionali reali . . . . .	220
§ 2. Generalità sulla connessione delle superficie . . . . .	231
§ 3. Le proprietà di connessione considerate di fronte alle trasformazioni che introducono punti fondamentali. Teorema di KLEIN. Modelli. Omologie sulle falde unilaterale . . . . .	240
§ 4. Connessione delle superficie razionali con una falda, cioè rappresentabili realmente sul piano . . . . .	252
§ 5. Connessione delle superficie razionali con più falde appartenenti alla I <sup>a</sup> , II <sup>a</sup> e III <sup>a</sup> famiglia . . . . .	258
§ 6. Il numero base reale $\rho$ . Relazione fra i caratteri $I$ , $Z$ e $\rho$ . . . . .	268
§ 7. Applicazioni ed esempi. Studio approfondito della falda singolare appartenente alle superficie della III <sup>a</sup> famiglia . . . . .	274

---