ÜBER DIE BRECHUNG DES LICHTES

IN CRISTALLINISCHEN MITTELN

VON

SOPHIE KOWALEVSKI

in STOCKHOLM.

In seinen *Leçons sur l'élasticité* hat LAMÉ eine Anwendung der Elasticitätstheorie auf die Erklärung der doppelten Brechung des Lichtes in dreiaxigen Cristallen gegeben. Ich werde hier in wenigen Worten das Hauptergebniss seiner Untersuchungen recapituliren. Ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen, denen alle möglichen Schwingungen in einem elastischen homogenen (¹) Mittel unterworfen sind, stellt er zunächst die Bedingungen fest, unter welchen eine Doppelbrechung des Lichtes überhaupt möglich ist. Unter der Voraussetzung, dass die Schwingungen der einzelnen Theilchen transversal sind, d. h. ohne eine Änderung der Dichtigkeit des schwingenden Mittels vor sich gehen, können die partiellen Differentialgleichungen, welche dieselben bestimmen, stets auf die Form

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial y} - b^2\frac{\partial\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)}{\partial z}\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial z} - c^2\frac{\partial\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}{\partial x}\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)}{\partial x} - a^2\frac{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial y}
\end{aligned}
$$

(¹) D. h. in einem solchen, in welchem die elastischen Eigenschaften in der Umgebung eines jeden Punktes dieselben sind.

gebracht werden, wobei x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des schwingenden Mittels, ξ, η, ζ die Componenten der Verrückung dieses Punktes von seiner Gleichgewichtslage, t die Zeit und a, b, c drei positive Constanten — die Elasticitäts-Axen des betrachteten Körpers — bedeuten.

Die Hypothese, dass die Schwingungen vor sich gehen, ohne die Dichtigkeit des vibrirenden Mittels zu ändern, erfordert, dass die Grösse

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

identisch gleich Null sei.

Nun folgt aber aus den Gleichungen (1)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0.$$

Der aufgestellten Hypothese wird also genügt, wenn die Anfangswerthe von ξ, η, ζ und deren Ableitungen nach t für $t = 0$ so gewählt sind, dass $(\theta)_{t=0} = 0$ und $\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$ sind.

Der ganzen Theorie von Fresnel liegt die Hypothese zu Grunde, dass jedes Theilchen der Oberfläche des brechenden Mittels, welches von einem Lichtstrahle getroffen ist, zum Mittelpunkt eines Systemes von ebenen Wellen wird, und zwar so, dass nach jeder Richtung hin sich zwei Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen.

Es war also zuerst zu untersuchen, ob die Gleichungen (1) sich im Einklange mit dieser Hypothese integriren lassen.

Lamé macht die Annahme, dass der Schwingungsmittelpunkt eine Reihe von Schwingungen ausführt, so dass die Componenten seiner Verschiebungen durch die Formeln:

$$\xi_0 = X_0 \cos 2\pi\frac{t}{\tau}, \qquad \eta_0 = Y_0 \cos 2\pi\frac{t}{\tau}, \qquad \zeta_0 = Z_0 \cos 2\pi\frac{t}{\tau}$$

dargestellt werden können, wobei τ die Schwingungsdauer einer vollständigen Schwingung bedeutet. Ein beliebiger Punkt des vibrirenden Mediums wird nach zwei verschiedenen Hemmungen λ_1 und λ_2 in Schwingung gerathen, und das Gesetz seiner Verschiebung wird folglich durch die Componenten

$$\xi = X_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + X_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

$$\eta = Y_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + Y_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

$$\zeta = Z_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\tau} + Z_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\tau}$$

dargestellt werden. Die Grössen X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 sind Functionen von x, y, z, welche so bestimmt werden sollen, dass die entsprechenden Werthe von ξ, η, ζ in die Gleichungen (1) eingesetzt, denselben genügen, und dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$X_1 + X_2 = X_0, \qquad Y_1 + Y_2 = Y_0, \qquad Z_1 + Z_2 = Z_0 \quad \text{sei.}$$

Nach der Theorie von Fresnel ist der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche von der, aus dem Mittelpunkte ausgehenden Welle nach der Zeiteinheit getroffen werden, eine zweischaalige Fläche, welche in der Geometrie unter dem Namen der Wellenfläche bekannt ist. Setzt man mit Lamé

$$R = x^2 + y^2 + z^2, \qquad Q = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2,$$
$$P = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2, \qquad q = a^2b^2c^2,$$

so ist die Gleichung derselben

$$(2) \qquad q - Q + RP = 0.$$

Um die Lage der fortschreitenden Lichtwelle nach der Zeit λ zu ermitteln, braucht man nur in dieser Gleichung statt x, y, z, $\frac{x}{\lambda}$, $\frac{y}{\lambda}$, $\frac{z}{\lambda}$ zu schreiben. Man erhält dann die Gleichung

$$(2^a) \qquad q\lambda^4 - Q\lambda^2 + RP = 0,$$

welche alle die successiven Lagen der fortschreitenden Welle darstellt, wenn man in derselben λ variiren lässt.

In Beziehung auf λ^2 gelöst, hat diese Gleichung die zwei Wurzeln:

$$\lambda^2 = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}.$$

Die zwei positiven Werthe von λ, λ_1 und λ_2 stellen die zwei verschiedenen Zeiten dar, nach welchen ein Punkt von der fortschreitenden Welle getroffen wird.

Da die partiellen Differentialgleichungen (1) linear sind, so genügt es die Functionen X, Y, Z zu bestimmen, unter der Annahme, dass λ irgend eine der Wurzeln der obigen Gleichung ist.

Durch eine recht beschwerliche, wenn auch sehr elegante Rechnung, gelingt es LAMÉ in der That die Functionen X, Y, Z in der erforderlichen Weise zu bestimmen.

Setzt man

$$\omega = \frac{\lambda}{\sqrt{(a^2\lambda^2 - R)(b^2\lambda^2 - R)(c^2\lambda^2 - R)}}$$

$$X = \omega\left(y\frac{\partial\lambda}{\partial z} - z\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)$$

$$Y = \omega\left(z\frac{\partial\lambda}{\partial x} - x\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$

$$Z = \omega\left(x\frac{\partial\lambda}{\partial y} - y\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)$$

so werden die Grössen

$$\xi = X\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}$$

$$\eta = Y\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}$$

$$\zeta = Z\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\tau}$$

Integrale der Differentialgleichungen (1), welche zugleich die Relation

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

befriedigen. Selbstverständlich haben wir in diesem Falle nur ein System von particulären Integralen der partiellen Differentialgleichungen (1). Ausserdem sieht man bei näherer Untersuchung, dass dieselben eine physikalisch unmögliche Bewegung darstellen, denn in jedem Punkte einer optischen Axe stellt sich jede der Grössen X, Y, Z unter der Form $\frac{0}{0}$ dar und wird unbestimmt.

Lamé versucht dieses Ergebniss auf die folgende Weise zu erklären. Alle Molecüle, welche derselben Wellenfläche angehören, gerathen zu derselben Zeit in Schwingung. Ihre Verrückungen geschehen in der betreffenden Tangentialebene der Wellenfläche und senkrecht zur Richtung des Strahles. Wie man auf geometrischem Wege sofort erkennt, fallen sie also zusammen mit der Richtung der betreffenden sphärischen Curve auf der Wellenfläche. Durch jeden gewöhnlichen Punkt der Wellenfläche geht nur eine einzige sphärische Curve; aber der Endpunkt einer optischen Axe zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, gleichzeitig auf zwei spharischen Curven zu liegen. Seine Bewegung unterscheidet sich demnach von derjenigen eines jeden anderen Punktes. Die beiden Curven umschlingen ihn also gewissermassen, wie Lamé sagt, durch zwei entgegengesetzte Bogen, durch zwei Halbkreise oder Halbellipsen, deren Krümmung sehr gross ist. Daraus entsteht für den betrachteten Punkt eine zusammengesetzte kreisförmige oder elliptische Bewegung. In dieser Weise meint Lamé die aus den Formeln sich ergebende Unbestimmtheit zu erklären und zu beseitigen. Hiergegen könnte man jedoch einwenden, dass diese Erklärung aus den Formeln selbst abgeleitet werden müsste, d. h. dass man durch Combination der Ausdrücke X_1 und X_2, Y_1 und Y_2, Z_1 und Z_2 die Unbestimmtheit entfernen und die wirkliche Bahn des fraglichen Punktes müsste erklären können. Dieses ist aber keineswegs der Fall.

Ausserdem giebt es noch einen Punkt im Raume, in welchem die Lamé'schen Formeln nicht mehr im Stande sind, die Erscheinungen zu beschreiben: In dem Coordinatenanfangspunkte, d. h. im Schwingungsmittelpunkte selbst, wird jede der Grössen X, Y, Z unendlich gross. Hier müssten also die Schwingungen unendlich gross sein und zwar nach allen Richtungen hin; (übrigens ein Resultat, zu welchem man nothwendiger Weise geführt wird, wenn man von der Hypothese eines einzigen Schwingungsmittelpunktes ausgeht).

Lamé versucht diesen Widerspruch seiner Theorie mit der Wirklichkeit durch die Annahme zu erklären, dass jedes materielle Theilchen des betrachteten Mittels mit einer Aetheratmosphäre umgeben sei, welche durch das einfallende Licht in Schwingungen versetzt werde, die sich dann auf das materielle Theilchen übertragen.

Ich werde hier auf die Discussion dieser Hypothese nicht näher eingehen. Lamé selbst hat sie nur ausgesprochen, ohne auch zu versuchen sie mathematisch zu begründen. Bevor man die Möglichkeit von Schwingungen in einem cristallinischen Mittel der Fresnel'schen Theorie entsprechend discutirt, sollte man jedenfalls die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1) aufstellen, denn dann erst werden wir alle möglichen Bewegungen kennen. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand meiner Arbeit. Ich bin durch meinen hochverehrten Lehrer Weierstrass angeregt worden dieselbe zu unternehmen, in der Erwartung dass dieselbe Integrationsmethode, welche von ihm vor vielen Jahren aufgestellt und auf die Integration von einigen einfacheren linearen partiellen Differentialgleichungen angewendet wurde, auch in diesem Falle sich bewähren würde.

Ich werde hier den Inhalt einer noch nicht publicirten Abhandlung mittheilen, welche mir von Weierstrass im Jahre 1881 zur Verfügung gestellt, aber viel früher von ihm verfasst wurde.

»Es seien u, v, w reelle, veränderliche Grössen, die wir als die Coordinaten eines Punktes im Raume in Beziehung auf drei in einem Punkte O unter rechten Winkeln sich schneidende Axen betrachten. Ferner sei S irgend eine geschlossene Fläche von der Beschaffenheit, dass in jeder von O ausgehenden Richtung nur *ein* Punkt derselben liegt. Dann gehört zu jedem Punkte P des Raumes ein bestimmter Punkt P_1 der Fläche, nämlich derjenige, in welchem dieselbe von der Strecke OP oder deren Verlängerung über P hinaus geschnitten wird; und wenn man das Verhältniss OP zu OP_1 mit t bezeichnet, so ist t eine beständig positiv bleibende continuirliche Function der Coordinaten u, v, w von P, welche die Eigenschaft hat, dass sie in kt übergeht, wenn man u, v, w alle drei mit derselben positiven Zahl k multiplicirt. Der Ort aller Punkte ferner, für welche t denselben Werth hat, ist eine Fläche σ_t, welche S ähnlich ist und von dieser ganz umschlossen wird, wofern $t < 1$ ist, während das Umgekehrte stattfindet, wenn $t > 1$. Setzt man nun

$$u' = \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad v' = \frac{\partial t}{\partial v}, \qquad w' = \frac{\partial t}{\partial w},$$

so sind u', v', w' solche Functionen von u, v, w, die sich nicht ändern, wenn man diese Grössen alle drei mit k multiplicirt, und welche folgende geometrische Bedeutung haben. Man denke sich in dem Punkte u, v, w an der durch denselben gehenden Fläche σ_t die Tangentialebene gelegt, so ist deren Gleichung, wenn man mit U, V, W die Coordinaten irgend eines ihrer Punkte bezeichnet

$$u'U + v'V + w'W = t$$

Fällt man ferner von O aus auf diese Ebene ein Loth, so ist die Länge desselben

$$\frac{t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

und die Coordinaten seines Fusspunktes

$$\frac{u't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \qquad \frac{v't}{u'u' + v'v' + w'w'}, \qquad \frac{w't}{u'u' + v'v' + w'w'}.$$

Dieses vorausgesetzt, sei $F(u, v, w)$ eine Function von u, v, w, die sich überall stetig ändert, mit Ausnahme etwa in der Nähe des Punktes O, und es werde der Werth, den das Integral

$$\iiint F(u, v, w)\, du dv dw$$

erhält, wenn die Integration über alle diejenigen Punkte des Raumes ausgedehnt wird, die zwischen zweien Flächen σ_t und σ_{t_0} liegen, — wo wir jetzt t als eine unbeschränkt veränderliche positive Grösse und t_0 als einen besonderen (festen) Werth derselben betrachten — mit

$$\pm \int_{(t_0 \ldots t)} F(u, v, w)\, d\omega$$

bezeichnet, in welcher Formel $d\omega$ das Raumelement $du dv dw$ bedeutet und das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$t > t_0 \quad \text{oder} \quad t < t_0.$$

Dann erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung die folgenden beiden Gleichungen, in denen $d\sigma_t$ ein Element der Fläche σ_t bedeutet.

$$(A)\qquad D_t \int_{(t_0\ldots t)} F(u,\ v,\ w)d\omega = \int \frac{F(u,\ v,\ w)d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

$$(B)\qquad D_t \int_{(t_0\ldots t)} D_u F(u,\ v,\ w)d\omega = D_t \int \frac{u'F(u,\ v,\ w)d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}.\ (^1)$$

Daraus folgt, wenn man in der ersten Formel $u'F$ für F setzt

$$(C)\qquad D_t \int_{(t_0\ldots t)} D_u F(u,\ v,\ w)d\omega = D_t^2 \int_{(t_0\ldots t)} u'F(u,\ v,\ w)d\omega.$$

---

(1) Die Gleichung (A) ergiebt sich folgendermassen:

Der Zuwachs von $\int_{(t_0\ldots t)} F(u,\ v,\ w)d\omega$, wenn t sich um dt ändert, ist gleich

$$\int_{(t,\ldots,t+dt)} F(u,\ v,\ w)d\omega.$$

Da der Abstand der Tangentialebenen in entsprechenden Punkten der beiden Flächen t und $t + dt$ nach dem Obigen gleich $\frac{dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$ ist, so kann das Raumelement auch die Form

$$\frac{d\sigma_t dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

erhalten. Mithin ist

$$\int_{(t,\ldots,t+dt)} F(u,\ v,\ w)d\omega = \int \frac{F(u,\ v,\ w)d\sigma_t dt}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}$$

oder wenn man durch dt dividirt

$$D_t \int_{(t_0\ldots t)} F(u,\ v,\ w)d\omega = \int \frac{F(u,\ v,\ w)d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}.$$

Die Gleichung (B) ergiebt sich, abgesehn von der Differentiation nach t auf beiden Seiten, durch die bekannte Verwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral; vergl. z. B. Riemann, *Schwere, Electricität und Magnetismus*, § 19.

Nun sei $\varphi(u, v, w)$ eine Function, welche dieselbe Beschaffenheit hat, wie sie für F angenommen ist, $f(u, v, w)$ eine andere Function die sich überall stetig ändert (auch in der Nähe des Punktes O) und

$$F(x, y, z, t) = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi(u, v, w) f(x + u, y + v, z + w) d\omega,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes bedeuten. Dann hat man:

$$D_x F = D_t \int \varphi D_x f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$= D_t \int \varphi D_u f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$= D_t \int D_u [\varphi . f(x + u, y + v, z + w)] d\omega - D_t \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x + u, y + v, z + w) d\omega.$$

Mithin, nach (C):

$$\text{(D)} \qquad D_x F = D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} u' \varphi f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$- D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x + u, y + v, z + w) d\omega.$$

Ebenso findet man:

$$D_y F = D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} v' \varphi f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$- D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial v} f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$D_z F = D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} w' \varphi f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$- D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial w} f(x + u, y + v, z + w) d\omega.$$

Daraus ergiebt sich weiter:

$$D_x^2 F = D_t^3 \int u' u' \varphi \,.\, f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$-\ D_t^2 \int \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\varphi + 2u'\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) f(x+u,\ \ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$D_y^2 F = D_t^3 \int v' v' \varphi \,.\, f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$-\ D_t^2 \int \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\varphi + 2v'\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) f(x+u,\ \ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$D_z^2 F = D_t^3 \int w' w' \varphi \,.\, f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$-\ D_t^2 \int \left(\frac{\partial w'}{\partial w}\varphi + 2w'\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) f(x+u,\ \ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

(E)

$$D_{yz}^2 F = D_t^3 \int v' w' \varphi \,.\, f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$-\ D_t^2 \int \left(\varphi\frac{\partial v'}{\partial w} + v'\frac{\partial \varphi}{\partial w} + w'\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) f(x+u,\ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} f(x+u,\ldots) d\omega$$

$$D_{zx}^2 F = D_t^3 \int w' u' \varphi \,.\, f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$-\ D_t^2 \int \left(\varphi\frac{\partial w'}{\partial u} + w'\frac{\partial \varphi}{\partial u} + u'\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) f(x+u,\ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w \partial u} f(x+u,\ldots) d\omega$$

$$D_{xy}^2 F = D_t^3 \int u' v' \varphi \,.\, f(x+u,\ \ldots) d\omega$$

$$-\ D_t^2 \int \left(\varphi\frac{\partial u'}{\partial v} + u'\frac{\partial \varphi}{\partial v} + v'\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) f(x+u,\ldots) d\omega + D_t \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} f(x+u,\ldots) d\omega.$$

Bezeichnet man die Function von u, v, w, welche den zum unbestimmten Punkte (u, v, w) gehörigen Werth von t giebt, mit $\vartheta(u, v, w)$, so ist

$$u' = \frac{\partial\vartheta}{\partial u}, \qquad v' = \frac{\partial\vartheta}{\partial v}, \qquad w' = \frac{\partial\vartheta}{\partial w}$$

also:

$$\frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\partial w'}{\partial v} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v\partial w}, \qquad \frac{\partial w'}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial w} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\partial w}, \qquad \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\partial v}.$$

Aus den Formeln (E), die beliebig fortgesetzt werden können, folgt nun, wenn A, B, C, ... Constanten bedeuten

$$A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} + 2C''\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$

$$= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} Pf(x+u, y+v, z+w)d\omega - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} Qf(x+u, y+v, z+w)d\omega$$

$$+ D_t \int_{(t_0 \dots t)} Rf(x+u, y+v, z+w)d\omega.$$

Bei der Entwickelung dieser Formeln ist, ausser der in Betreff der Functionen f, φ gemachten Annahme, vorausgesetzt worden, dass die Functionen u', v', w' und deren Ableitungen, so weit dieselben in den Formeln vorkommen, in der Fläche σ sich stetig ändern. Die Formeln lassen sich jedoch auch in manchen Fällen anwenden, wo die hinsichtlich der Functionen φ, u', v', w' gemachten Annahmen in einzelnen Punkten nicht zutreffen.

Bildet man nämlich für verschiedene Functionen φ, die mit φ_1, φ_2, ... bezeichnet werden mögen, aber für eine und dieselbe Function f die Ausdrücke

$$F_1 = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)d\omega$$

$$F_2 = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)d\omega$$

. . . .

und ist T irgend ein aus partiellen Ableitungen von F_1, F_2 u. s. w. nach x, y, z linear und mit constanten Coefficienten zusammengesetzter Ausdruck, so lässt sich derselbe mittelst den aufgestellten Formeln in der Gestalt

$$T = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \Phi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$+ D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \Phi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega$$

$$+ \dots \dots \dots \dots$$

darstellen, wo Φ_1, Φ_2, ... Ausdrücke sind, welche aus den Functionen u', v', w', φ_1, φ_2, ... und deren Ableitungen so zusammengesetzt werden, dass auch in dem Falle, wo die letzteren an einzelnen Stellen sich nicht stetig ändern, Φ_1, Φ_2, ... Functionen von u, v, w sein können, welche der im Vorstehenden, hinsichtlich der Function φ, gemachten Annahme entsprechen. Trifft dieses zu, so ist die angegebene Darstellung von T zulässig. ([1])

Diese Formeln sollen jetzt angewendet werden auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2A' \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + 2B' \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + 2C' \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

für den Fall, dass die reellen Coefficienten A, B, ... solche Werthe haben, dass die Function

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$$

bei reellen Werthen von x, y, z stets positiv bleibt und nur dann Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden.

([1]) Ich muss bei dieser Gelegenheit auch bemerken, dass ich in diesem Sommer, nachdem meine Arbeit schon fertig war, durch eine freundliche persönliche Mittheilung von Prof. KRONECKER erfahren habe, dass er ähnliche Transformationsformeln für dreifache Integrale, welche auf die Differentiation nach einem Parameter beruhen, von welchem die Begrenzung des Integrales abhängt, bei seinen Untersuchungen über das Potential, gebraucht hat.

Das Resultat, in Doppelintegralen verwandelt, stimmt überein mit dem von Cauchy (Journal de l'Ecole polytechnique, Cah. 20, p. 297—309) und in dem besonderen Falle, wo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

mit dem von Poisson in einer Abhandlung in Mémoires de l'Académie des Sciences gegebenen.

Es sei in diesem Falle die Fläche σ ein Ellipsoid, und die Gleichung desselben

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1.$$

Dann ist

$$\vartheta^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv$$

und daher

$$\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u} = au + c'v + b'w, \quad \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = c'u + bv + a'w, \quad \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = b'u + a'v + cw,$$

welche drei lineare Functionen mit U, V, W bezeichnet werden mögen, und

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = \vartheta.$$

Daraus folgt, da

$$P = \Big[(AU + C'V + B'W)\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + (C'U + BV + A'W)\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

$$+ (B'U + A'V + CW)\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\Big]\frac{\varphi}{\vartheta}$$

ist, dass man $P = \varphi$ erhält, wenn man a, b, etc. so wählt, dass die Gleichungen

$$AU + C'V + B'W = u, \quad C'U + BV + A'W = v, \quad B'U + A'V + CW = w$$

erfüllt werden. Aus denselben folgt aber, wenn man

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

setzt:

$$a = \frac{BC - A'A'}{G}, \qquad b = \frac{CA - B'B'}{G}, \qquad c = \frac{AB - C'C'}{G},$$

$$a' = \frac{B'C' - AA'}{G}, \qquad b' = \frac{CA' - BB'}{G}, \qquad c' = \frac{A'B' - CC'}{G}.$$

Nimmt man nun ferner

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta},$$

so hat man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial u} = -\vartheta^{-3}U$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\vartheta^{-3}V$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = -\vartheta^{-3}W$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = -a\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w} = -a'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = -b\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial u} = -b'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} = -c\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = -c'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung der Gleichung $P = \varphi = \vartheta^{-1}$

$$R = -(Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c')\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}.$$

Aber

$$Aa + Bb + Cc = 1$$

$$A'a' + B'b' + C'c' = 1$$

und somit

$$R = 0,$$

woraus weiter auch $Q = 0$ folgt.

Wir haben also folgendes Resultat:

Setzt man

$$\vartheta(u, v, w) = \sqrt{\left(\frac{BC - A'A'}{G}u^2 + \frac{CA - B'B'}{G}v^2 + \frac{AB - C'C'}{G}w^2\right.}$$

$$\overline{\left. + 2\frac{B'C' - AA'}{G}vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G}wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G}uv\right)}$$

und

$$F = D_t \iiint\limits_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]} \frac{f(x + u, y + v, z + w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw,$$

wo die Integration über alle Punkte des Raumes auszudehnen ist, für welchen $\vartheta^2(u, v, w) < t^2$ ist (t_0 ist gleich o angenommen, was erlaubt ist, da F nicht davon abhängt und das dreifache Integral einen Sinn behält, trotzdem dass für den Punkt O $\vartheta = 0$ ist, so wird der betrachteten partiellen Differentialgleichung genügt, wenn $\psi = F$ genommen wird.

Nach der Form (1) ist

$$D_t \iiint \frac{f(x + u, \ldots)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw = \int \frac{f(x + u, \ldots)}{\vartheta\sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2}} d\sigma_t$$

$$= \int \frac{f(x + u, \ldots)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma_t,$$

wo $d\sigma_t$ ein Element der durch die Gleichung

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = t^2$$

dargestellten Fläche bedeutet. Daraus folgt weiter

$$F = \int \frac{tf(x + tu, y + tv, z + tw)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} d\sigma,$$

wenn man unter $d\sigma$ ein Element der Fläche

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1$$

versteht, unter u, v, w die Coordinaten eines zugehörigen Punktes, und die Integration über die ganze Fläche ausdehnt.

Das Vorstehende gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass t positiv ist. Es ist aber, für einen positiven Werth von t

$$\iiint\limits_{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]} \frac{f(x+u, \ldots)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u, v, w)} = \int\limits_0^t \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}} d\sigma \right) \tau d\tau.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat nun auch eine Bedeutung für negative Werthe von t, bleibt jedoch, wenn $-t$ für t gesetzt wird, unverändert, denn

$$\int\limits_0^{-t} \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}} d\sigma \right) \tau d\tau$$

$$= \int\limits_0^{t} \left(\int \frac{f(x-\tau u, y-\tau v, z-\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}} d\sigma \right) \tau d\tau.$$

Für jede Fläche σ aber, welche die Beschaffenheit hat, dass sie von einer durch O gehenden Geraden, in zweien, gleichweit von O abliegenden Punkten geschnitten wird, ist bei einer beliebigen Function $f(u, v, w)$

$$\int f(u, v, w)\,d\sigma = \int f(-u, -v, -w)\,d\sigma.$$

Es ist also das dreifache Integral, von dem F die Ableitung nach t ist, eine *grade* Function von t, F selbst also eine *ungrade*. Wenn aber die gegebene Differentialgleichung, unter der Voraussetzung dass ϕ eine ungrade, oder grade Function von t ist, für alle positiven Werthe dieser Grösse besteht, so ist sie auch für alle negativen gültig.

Für $t = 0$ wird $F = 0$, und

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, y, z) \int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}.$$

Es ist aber

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{dudvdw}{\vartheta(u, v, w)} = \int\limits_0^1 \left(\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U'^2 + V'^2 + W'^2}} \right) \tau d\tau = \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{U'^2 + V'^2 + W'^2}}.$$

Mithin, wenn man

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{dudvdw}{\vartheta(u, v, w)} = \tilde{\omega}$$

setzt, und

$$\phi = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw,$$

so ist ϕ eine Function, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt und zu gleicher Zeit für $t = 0$ die Bedingungen erfüllt:

$$\phi = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = f(x, y, z).$$

Daraus folgt sofort, dass man die allgemeine Lösung erhält, wenn man eine zweite willkürliche Function $F(x, y, z)$ annimmt, und

$$\phi = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t^2 \iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw$$

$$+ \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \iiint\limits_{(\vartheta^2<1)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)} dudvdw$$

setzt. Denn dann wird für $t = 0$

$$\phi = F(x, y, z), \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = f(x, y, z).$$

Führt man an die Stelle von u, v, w drei andere Veränderliche p, q, r ein:

$$p = \alpha u + \beta v + \gamma w$$
$$q = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w$$
$$r = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w,$$

so können die Constanten α, β, etc. so bestimmt werden, dass

$$u^2 + v^2 + w^2 \quad \text{in} \quad p^2 + q^2 + r^2$$

und

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv \quad \text{in} \quad gp^2 + hq^2 + kr^2$$

übergeht, wo g, h, k positive Constanten sind. Dann hat man

$$\text{für} \quad \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,\ v,\ w)} \quad \text{zu setzen} \quad \frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}}$$

und die Integration erstreckt sich über alle Werthe von p, q, r für welche

$$gp^2 + hq^2 + kr^2 < t^2$$

ist. Diese erhält man, wenn man

$$p = \sqrt{g}\,.\,\tau\cos\lambda, \qquad q = \sqrt{h}\,.\,\tau\sin\lambda\cos\mu, \qquad r = \sqrt{k}\,.\,\tau\sin\lambda\sin\mu$$

setzt, und

τ alle Werthe von 0 bis t

λ alle Werthe von 0 bis π

μ alle Werthe von 0 bis 2π

beilegt. Dann muss

$$\frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}} \quad \text{ersetzt werden durch} \quad \frac{\tau^2\sin\lambda\, d\tau\, d\lambda\, d\mu}{\sqrt{ghk}},$$

wobei zu bemerken, dass $ghk = \frac{1}{G}$ ist. Darnach hat man, wenn $X(u, v, w)$ eine beliebige Function von u, v, w ist,

$$\iiint\limits_{(\vartheta^2 < t^2)} \frac{X(u,\ v,\ w)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u,\ v,\ w)} = \int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sqrt{G}\,.\,X(\tau u_1,\ \tau v_1,\ \tau w_1)\tau^2\sin\lambda\, d\mu\, d\lambda\, d\tau.$$

wo

$$u_1 = \alpha\sqrt{g}\cos\lambda + \beta\sqrt{h}\sin\lambda\cos\mu + \gamma\sqrt{k}\sin\lambda\sin\mu$$

$$v_1 = \alpha'\sqrt{g}\cos\lambda + \beta'\sqrt{h}\sin\lambda\cos\mu + \gamma'\sqrt{k}\sin\lambda\sin\mu$$

$$w_1 = \alpha''\sqrt{g}\cos\lambda + \beta''\sqrt{h}\sin\lambda\cos\mu + \gamma''\sqrt{k}\sin\lambda\sin\mu.$$

Setzt man $X(u, v, w) = 1$, so kommt

$$\tilde{\omega} = \sqrt{G}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\tau^2\sin\lambda d\tau d\lambda d\mu = 2\pi\sqrt{G}.$$

Wir haben also das Resultat:

Es seien $F(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ zwei willkürlich angenommene Functionen von x, y, z

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

$$\vartheta(u, v, w) = \sqrt{\left(\frac{BC - A'A'}{G}u^2 + \frac{CA - B'B'}{G}v^2 + \frac{AB - C'C'}{G}w^2\right.}$$

$$\left. + 2\frac{B'C' - AA'}{G}vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G}wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G}uv\right)$$

$$F(x, y, z, t) = \iiint\limits_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]}\frac{F(x + u, y + v, z + w)}{\vartheta(u, v, w)}dudvdw$$

$$f(x, y, z, t) = \iiint\limits_{[\vartheta^2(u, v, w) < t^2]}\frac{f(x + u, y + v, z + w)}{\vartheta(u, v, w)}dudvdw.$$

Dann ist

$$\phi = \frac{1}{4\pi\sqrt{G}}\left(\frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}\right)$$

eine Function von x, y, z, t, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} + 2C''\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

genügt und zugleich so beschaffen ist, dass für $t = 0$

$$\varphi = F(x, y, z), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(x, y, z)$$

wird.

Dabei müssen aber

$$A, \; AB - C''C'', \; G$$

alle drei positiv sein.

Hat man namentlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

so ist $\sqrt{G} = a^3$

$$\vartheta(u, v, w) = \frac{1}{a^2}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}F(x, y, z, t) = \iiint\limits_{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{a^2\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}}\,dudvdw$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}f(x, y, z, t) = \iiint\limits_{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{a^2\sqrt{(u^2+v^2+w^2)}}\,dudvdw.$$

Hat die Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

so ist $\sqrt{G} = abc$

$$\vartheta^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2},$$

also

$$4abc\pi\psi = \frac{\partial^2 F(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$F(x, y, z, t) = \iiint \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)}} dudvdw$$

$$f(x, y, z, t) = \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)}} dudvdw$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2} < t^2\right).$$

Die Integration des folgenden Systemes partieller Differentialgleichungen (in denen a, b positive Constanten, t, x, y, z unbeschränkt Veränderliche reelle Grössen und ξ, η, ζ zu bestimmende Functionen derselben bedeuten):

$$\text{(F)}\quad \begin{aligned} &[D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\xi - (b^2 - a^2)D_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ &[D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\eta - (b^2 - a^2)D_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ &[D_t^2 - a^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\zeta - (b^2 - a^2)D_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \end{aligned}$$

lässt sich zurückführen auf die Integration der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)f = 0.$$

Zunächst ergiebt sich aus den Regeln, nach denen man die Integration eines solchen Systems partieller Differentialgleichungen auf die einer einzigen mit einer unbekannten Function reducirt, dass man setzen kann:

$$\text{(G)}\quad \begin{aligned} \xi &= [D_t^2 - b^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varphi_1 + (b^2 - a^2)D_x(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \eta &= [D_t^2 - b^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varphi_2 + (b^2 - a^2)D_y(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \zeta &= [D_t^2 - b^2(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)]\varphi_3 + (b^2 - a^2)D_z(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \end{aligned}$$

in denen φ_1, φ_2, φ_3 drei Functionen von t, x, y, z bedeuten, von denen jede die folgende Differentialgleichung befriedigt, in der zur Abkürzung

$$\Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

gesetzt ist

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0.$$

Nun bedeute $f(t, x, y, z)$ oder kürzer $f(t)$ eine Function von t, x, y, z, welche der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)f(t) = 0$$

genügt, und in Beziehung auf t *ungrade* ist. Ferner sei $\psi(t, x, y, z)$ oder $\psi(t)$ eine in Beziehung auf t ebenfalls *ungrade* Function, welche die Gleichung

$$D_t^2\psi(t) = f(t)$$

befriedigt.

Dann hat man

$$(D_t^2 - \Delta)D_t^2\psi(t) = 0$$

oder

$$D_t^2[(D_t^2 - \Delta)\psi(t)] = 0$$

woraus, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $(D_t^2 - \Delta)\psi(t)$ eine ungrade Function von t ist,

$$(D_t^2 - \Delta)\psi(t) = \psi_0 . t$$

folgt, wo ψ_0 bloss von x, y, z abhängt.

Setzt man in dieser Gleichung at für t, so ergiebt sich

$$\frac{1}{a^2}D_t^2\psi(at) - \Delta\psi(at) = \psi_0\ at,$$

oder

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\psi(at) = a^3t . \psi_0$$

und ebenso

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(bt) = b^3 t \,.\, \psi_0.$$

Daher

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(at) = - a^2 b^3 \,.\, t \,.\, \Delta\psi_0$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(bt) = - a^3 bt \,.\, \Delta\psi_0$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\left(\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)\right) = 0.$$

Setzt man daher

$$\varphi = \frac{\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2 - b^2},$$

so ergiebt sich

(H) $$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0$$

und zugleich hat man für $t = 0$

$$\varphi = 0,\ D_t\varphi = 0,\ D_t^2\varphi = 0,\ D_t^3 = \left(\frac{a^2\psi'''(at) - b^2\psi'''(at)}{a^2 - b^2}\right)_{t=0} = \psi'''(0) = f'(0),$$

so dass, wenn man $f(t, x, y, z)$ so bestimmt, dass für $t = 0$

(I) $$D_t f(t, x, y, z) = F(x, y, z)$$

wird, φ dasjenige Integral der Gleichung (H) ist, welches für $t = 0$ der Bedingung genügt

$$\varphi = 0, \qquad D_t\varphi = 0, \qquad D_t^2\varphi = 0, \qquad D_t^3\varphi = F(x, y, z).$$

Dabei ist φ eine ungrade Function von t

Bestimmt man nun 3 solche Functionen $f_1(t, x, y, z)$, $f_2(t, x, y, z)$, $f_3(t, x, y, z)$, welche für f gesetzt der Gleichung (I) genügen und bezeichnet mit φ_1, φ_2, φ_3 die Functionen, welche aus diesen so abgeleitet sind, wie hier φ aus f, und substituirt diese in die Gleichungen (G), so erhält man für ξ, η, ζ Ausdrücke, welche den Gleichungen (F) genügen, und zwar so, dass für $t = 0$

$$\xi = 0, \qquad D_t\xi = f_1'(0, x, y, z),$$
$$\eta = 0, \qquad D_t\eta = f_2'(0, x, y, z),$$
$$\zeta = 0, \qquad D_t\zeta = f_3'(0, x, y, z).$$

Dabei ist zu bemerken, dass weil

$$\Delta\psi(at) = \frac{1}{a^2}D_t^2\psi(at) - a\psi_0 \,.\, t = f(at) - a\psi_0 \,.\, t$$

ist, man

$$b^2\Delta\psi(at) = b^2 f(at) - ab^2\psi_0 \,.\, t$$
$$(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(at) = ab^2\psi_0 \,.\, t + (a^2 - b^2)f(at)$$

hat, und daher

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = (D_t^2 - b^2\Delta)\frac{\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2 - b^2}$$
$$= \frac{(a^2 - b^2)\frac{f(at)}{a} + b^2\psi_0 \,.\, t - b^2\psi_0 \,.\, t}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a}f(at).$$

Mithin kann man die Gleichungen (G) auch schreiben

$$\xi = \frac{1}{a}f_1(at) - D_x\left\{D_x\left[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\right] + D_y\left[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\right]\right.$$
$$\left. + D_z\left[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\right]\right\}$$

$$\eta = \frac{1}{a}f_2(at) - D_y\left\{D_x\left[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\right] + D_y\left[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\right]\right.$$
$$\left. + D_z\left[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\right]\right\}$$

$$\zeta = \frac{1}{a}f_3(at) - D_z\left\{D_x\left[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\right] + D_y\left[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\right]\right.$$
$$\left. + D_z\left[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\right]\right\}.$$

Es ist ferner

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t-\tau) f_1(\tau) d\tau + \psi_0^{(1)} . t$$

$$\psi_2(t) = \int_0^t (t-\tau) f_2(\tau) d\tau + \psi_0^{(2)} . t$$

$$\psi_3(t) = \int_0^t (t-\tau) f_3(\tau) d\tau + \psi_0^{(3)} . t$$

und daher

$$\frac{\mathrm{I}}{a}\psi_1(at) - \frac{\mathrm{I}}{b}\psi_1(bt) = \int_0^{at}\left(t - \frac{\tau}{a}\right) f_1(\tau) d\tau - \int_0^{bt}\left(t - \frac{\tau}{b}\right) f_1(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t (t-\tau)[af_1(a\tau) - bf_1(b\tau)] d\tau$$

etc.

Zur Integration der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0$$

kann man auch folgendermassen gelangen.

Es sei

$$\varphi(t,\ a)$$

eine Function von t, welche der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\varphi(t,\ a) = 0$$

genügt, und den Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t,\ a) = 0, \qquad D_t\varphi(t,\ a) = G(x,\ y,\ z),$$

wo G eine willkürliche Function von $x,\ y,\ z$ ist.

Ebenso sei $\varphi(t,\ b)$ definirt durch die Gleichung

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi(t,\ b) = 0$$

und die Bedingung, dass für $t = 0$

$$\varphi(t,\ b) = 0, \qquad D_t\varphi(t,\ b) = G(x,\ y,\ z).$$

Dann sind $\varphi(t,\ a)$, $\varphi(t,\ b)$ beide ungrade Functionen von t. Wenn wir

$$\varphi(t) = \varphi(t,\ b) - \varphi(t,\ a)$$

setzen, so genügt $\varphi(t)$ der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0,$$

und man hat für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \quad D_t\varphi(t) = 0, \quad D_t^2\varphi(t) = 0, \quad D_t^3\varphi(t) = D_t^3\varphi(t,\ a) - D_t^3\varphi(t,\ b).$$

Aber

$$D_t^3\varphi(t,\ a) = a^2\Delta D_t\varphi(t,\ a)$$

und daher

$$[D_t^3\varphi(t,\ a)]_{t=0} = a^2\Delta G$$

und ebenso

$$[D_t^3\varphi(t,\ b)]_{t=0} = b^2\Delta G$$

also

$$[D_t^3\varphi(t)]_{t=0} = (b^2 - a^2)\Delta G.$$

Bestimmt man daher G so, dass

$$(b^2 - a^2)\Delta G = f(x,\ y,\ z),$$

so ist $\varphi(t)$ diejenige, der betrachteten Gleichung genügende Function, welche die Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \qquad D_t\varphi(t) = 0, \qquad D_t^2\varphi(t) = 0, \qquad D_t^3\varphi(t) = f$$

sein soll, erfüllt.

Nun aber hat man, wenn

$$D_t^2\varphi(t,\ a) = \varphi''(t,\ a), \qquad D_t^2\varphi(t,\ b) = \varphi''(t,\ b)$$

gesetzt wird, auch

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\varphi''(t,\ a) = 0, \qquad (D_t^2 - b^2\Delta)\varphi''(t,\ b) = 0$$

und für $t = 0$

$$\varphi''(t,\ a) = 0, \qquad D_t\varphi''(t,\ a) = a^2\Delta G = \frac{a^2}{b^2 - a^2} f$$

$$\varphi''(t,\ b) = 0, \qquad D_t\varphi''(t,\ b) = b^2\Delta G = \frac{b^2}{b^2 - a^2} f.$$

Es ist also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2}\varphi''(t,\ a)$$

diejenige der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)F = 0$$

genügende Function, die die Bedingung erfüllt, dass für $t = 0$

$$F = 0, \qquad D_t F = f$$

sei. Also

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2}\varphi''(t,\ a) = \frac{1}{a} f(at)$$

und ebenso

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2}\varphi''(t,\ b) = \frac{1}{b} f(bt).$$

Daraus folgt

$$\varphi(t,\ a) = \frac{a}{b^2 - a^2}\int\limits_0\int\limits_0 f(at)\,dt\,dt + tG$$

$$\varphi(t,\ b) = \frac{b}{b^2 - a^2}\int\limits_0\int\limits_0 f(bt)\,dt\,dt + tG.$$

Ist nun $\psi(t)$ eine Function von t deren zweite Ableitung $f(t)$ ist und die für $t = 0$ verschwindet, so hat man

$$D_t^2\psi(at) = a^2 f(at)$$

$$a\int\limits_0\int\limits_0 f(at)\,dt\,dt = \frac{1}{a}\psi(at) - t\psi'(0),$$

wo

$$\psi'(0) = [D_t\psi(t)]_{t=0}.$$

Also

$$\varphi(t, a) = \frac{1}{a(b^2 - a^2)}\psi(at) + t\left[G - \frac{1}{b^2 - a^2}\psi'(0)\right]$$

und

$$\varphi(t) = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[\frac{1}{b}\psi(bt) - \frac{1}{a}\psi(at)\right].$$

Die vorstehenden Formeln geben die allgemeinen Integrale der Gleichungen (1) für den Fall dass ξ, η, ζ für $t = 0$ verschwinden, also jedenfalls auch, wenn ξ, η, ζ ungrade Functionen von t sein sollen. Nimmt man nun drei Ausdrücke von derselben Form, in denen aber f_1, f_2, f_3 durch drei andere Functionen vertreten sind, bildet von diesen die Ableitungen nach t und fügt diese bezüglich zu ξ, η, ζ hinzu, so hat man die allgemeinen Ausdrücke dieser Grössen.

Es ergiebt sich also folgendes Resultat: Man bestimme 6 Functionen

$$\begin{array}{lll} f_1(t, x, y, z), & f_2(t, x, y, z), & f_3(t, x, y, z), \\ F_1(t, x, y, z), & F_2(t, x, y, z), & F_3(t, x, y, z), \end{array}$$

welche für f gesetzt, der Gleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2)f = 0$$

genügen, und überdies alle für $t = 0$ verschwinden, ferner seien

$$\begin{array}{lll} \psi_1(t, x, y, z), & \psi_2(t, x, y, z), & \psi_3(t, x, y, z) \\ \Psi_1(t, x, y, z), & \Psi_2(t, x, y, z), & \Psi_3(t, x, y, z) \end{array}$$

diejenigen 6 Functionen, deren zweite Ableitungen nach t beziehlich

$$f_1, \ f_2, \ f_3$$
$$F_1, \ F_2, \ F_3$$

sind, und welche ebenfalls für $t = 0$ sämmtlich verschwinden. Setzt man dann

$$\phi(t, x, y, z) = D_x\phi_1(t, x, y, z) + D_y\phi_2(t, x, y, z) + D_z\phi_3(t, x, y, z)$$

$$\Psi(t, x, y, z) = D_x\Psi_1(t, x, y, z) + D_y\Psi_2(t, x, y, z) + D_z\Psi_3(t, x, y, z),$$

dann sind

$$\left.\begin{array}{l}\xi \\ \\ \eta \\ \\ \zeta\end{array}\right| = \left|\begin{array}{l}\frac{1}{a}f_1(at) + \frac{1}{a}D_tF_1(at) + D_x \\ \\ \frac{1}{a}f_2(at) + \frac{1}{a}D_tF_2(at) + D_y \\ \\ \frac{1}{a}f_3(at) + \frac{1}{a}D_tF_3(at) + D_z\end{array}\right| \left(\frac{1}{b}\phi(bt) - \frac{1}{a}\phi(at) + \frac{1}{b}D_t\Psi(bt) - \frac{1}{a}D_t\Psi(at)\right)$$

die allgemeinen Integrale der Gleichungen (1).

Hieraus erhält man ferner mit einiger Änderung der Bezeichnungen die Integrale der folgenden Differentialgleichungen, in denen

$$\vartheta = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta$$

und P, Q, R gegebene Functionen von t, x, y, z bedeuten:

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\xi - (b^2 - a^2)D_x\vartheta = P(t, x, y, z)$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\eta - (b^2 - a^2)D_y\vartheta = Q(t, x, y, z)$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\zeta - (b^2 - a^2)D_z\vartheta = R(t, x, y, z).$$

Man bestimme sechs Functionen

$$F_1(t), \qquad F_2(t), \qquad F_3(t)$$

$$F_1'(t), \qquad F_2'(t), \qquad F_3'(t)$$

von t und x, y, z, welche für f gesetzt der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies für $t = 0$ sämmtlich verschwinden.

Ferner seien

$$\varphi_1(t), \qquad \varphi_2(t), \qquad \varphi_3(t)$$

$$\varphi_1'(t), \qquad \varphi_2'(t), \qquad \varphi_3'(t)$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t den obigen 6 Functionen respective gleich sind und die ebenfalls für $t = 0$ alle Null werden. Endlich seien

$$F_1''(t, \tau), \qquad F_2''(t, \tau), \qquad F_3''(t, \tau)$$

— wo τ eine unbestimmte Grösse bedeutet — drei Functionen, welche ebenfalls der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies so bestimmt sind, dass für $t = 0$

$$F_1'' = 0, \qquad F_2'' = 0, \qquad F_3'' = 0$$

$$D_t F_1'' = P(\tau, x, y, z), \qquad D_t F_2'' = Q(\tau, x, y, z), \qquad D_t F_3'' = R(\tau, x, y, z).$$

Bezeichnet man dann mit

$$\varphi_1''(t, \tau), \qquad \varphi_2''(t, \tau), \qquad \varphi_3''(t, \tau)$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t

$$F_1'', \qquad F_2'', \qquad F_3''$$

sind, und welche für $t = 0$ ebenfalls verschwinden und setzt:

$$\varphi(t) = D_x\varphi_1(t) + D_y\varphi_2(t) + D_z\varphi_3(t)$$

$$\varphi'(t) = D_x\varphi_1'(t) + D_y\varphi_2'(t) + D_z\varphi_3'(t)$$

so ist

$$\varphi''(t,\ \tau) = D_x\varphi_1''(t,\ \tau) + D_y\varphi_2''(t,\ \tau) + D_z\varphi_3''(t,\ \tau)$$

$$\xi = D_t\left\{\frac{1}{a}F_1(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_1'(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)$$
$$+ \int_0^t \left\{\frac{1}{a}F_1''(at - a\tau,\ \tau) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt - b\tau,\ \tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at - a\tau,\ \tau)\right)\right\} dt$$

$$\eta = D_t\left\{\frac{1}{a}F_2(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_2'(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)$$
$$+ \int_0^t \left\{\frac{1}{a}F_2''(at - a\tau,\ \tau) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt - b\tau,\ \tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at - a\tau,\ \tau)\right)\right\} dt$$

$$\zeta = D_t\left\{\frac{1}{a}F_3(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_3'(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)$$
$$+ \int_0^t \left\{\frac{1}{a}F_3''(at - a\tau,\ \tau) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt - b\tau,\ \tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at - a\tau,\ \tau)\right)\right\} dt.$$

Um aus diesen Formeln die Ausdrücke für $D_t\xi$, $D_t\eta$, $D_t\zeta$ zu erhalten, hat man in den Formeln, welche die Functionen F'', φ'' enthalten, *unter* dem Integralzeichen nach t zu differenziren.

Bezeichnet man daher die Functionen, in welche

$$D_tF_1(t),\qquad D_tF_2(t),\qquad D_tF_3(t);\qquad D_tF_1'(t),\qquad D_tF_2'(t),\qquad D_tF_3'(t)$$

für $t = 0$ übergehen, mit

$$f_1(x,\ y,\ z),\quad f_2(x,\ y,\ z),\quad f_3(x,\ y,\ z);\quad f_1'(x,\ y,\ z),\quad f_2'(x,\ y,\ z),\quad f_3'(x,\ y,\ z),$$

so hat man für $t = 0$

$$\varsigma = f_1(x,\ y,\ z),\qquad \eta = f_2(x,\ y,\ z),\qquad \zeta = f_3(x,\ y,\ z)$$
$$D_t\xi = f_1'(x,\ y,\ z),\qquad D_t\eta = f_2'(x,\ y,\ z),\qquad D_t\zeta = f_3'(x,\ y,\ z).$$

Dabei können bei der Bestimmung der F die f willkürlich angenommen werden.»

Um die in den vorgehenden Blättern auseinandergesetzte Methode von Herrn WEIERSTRASS in dem vorliegenden Falle anwenden zu können, setze ich

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\xi &= D_t \int \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
\eta &= D_t \int \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
\zeta &= D_t \int \varphi_3(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) d\omega,
\end{aligned}
$$

wo die Integration auf der rechten Seite auf alle Punkte des Raumes erstreckt wird, welcher von einer gewissen geschlossenen Fläche, deren Gleichung $\vartheta(u, v, w) = t$ ist, begrenzt wird. Ich werde nun suchen die vier Functionen $\vartheta(u, v, w)$, $\varphi_1(u, v, w)$, $\varphi_2(u, v, w)$, $\varphi_3(u, v, w)$ so zu bestimmen, dass die Differentialgleichungen (1) durch diese Werthe von ξ, η, ζ befriedigt werden, indem wir $f(x+u, y+v, z+w)$ ganz beliebig lassen.

Indem ich die beiden Transformationsformeln (A) und (B) anwende, bilde ich zuerst die Ausdrücke

$$
\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}.
$$

Ich finde

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = D_t^2 &\int \left(\varphi_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - \varphi_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
- D_t &\int \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = D_t^2 &\int \left(\varphi_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} - \varphi_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
- D_t &\int \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}\right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = D_t^2 &\int \left(\varphi_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega \\
- D_t &\int \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}\right) f(x+u, y+v, z+w) d\omega.
\end{aligned}
$$

Die zweiten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichungen verschwinden, wenn ich setze

$$\text{(4)}\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial w}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}=0.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt für

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial u},\qquad \varphi_2=\frac{\partial\varphi}{\partial v},\qquad \varphi_3=\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

wo φ eine beliebige Function von u, v, w ist, welche später bestimmt werden soll.

Ich setze nun ferner

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned}
\psi_1(u, v, w) &= \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\\
\psi_2(u, v, w) &= \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\\
\psi_3(u, v, w) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= D_t^2\int\psi_1(u, v, w)f(x+u, y+v, z+w)d\omega\\
\eta_1 &= D_t^2\int\psi_2(u, v, w)f(x+u, y+v, z+w)d\omega\\
\zeta_1 &= D_t^2\int\psi_3(u, v, w)f(x+u, y+v, z+w)d\omega.
\end{aligned}$$

Dann ergiebt sich aus den Differentialgleichungen (1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}-b^2\frac{\partial\eta_1}{\partial z}\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial\xi_1}{\partial z}-c^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial\eta_1}{\partial x}-a^2\frac{\partial\xi_1}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Indem ich die Ausdrücke

$$c^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}-b^2\frac{\partial\eta_1}{\partial z},\qquad a^2\frac{\partial\xi_1}{\partial z}-c^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial x},\qquad b^2\frac{\partial\eta_1}{\partial x}-a^2\frac{\partial\xi_1}{\partial y}$$

in derselben Weise wie die von ξ, η, ζ mit Hülfe der WEIERSTRASS'schen Transformationsformeln umforme, finde ich:

$$c^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}-b^2\frac{\partial\eta_1}{\partial z}=D_t^3\int\left(c^2\psi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-b^2\psi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

$$-D_t^2\int\left(c^2\frac{\partial\psi_3}{\partial v}-b^2\frac{\partial\psi_2}{\partial w}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

$$a^2\frac{\partial\xi_1}{\partial z}-c^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}=D_t^3\int\left(a^2\psi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-c^2\psi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

$$-D_t^2\int\left(a^2\frac{\partial\psi_1}{\partial w}-c^2\frac{\partial\psi_3}{\partial u}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

$$b^2\frac{\partial\eta_1}{\partial x}-a^2\frac{\partial\xi_1}{\partial y}=D_t^3\int\left(b^2\psi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-a^2\psi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

$$-D_t^2\int\left(b^2\frac{\partial\psi_2}{\partial u}-a^2\frac{\partial\psi_1}{\partial v}\right)f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega.$$

Die Gleichungen (1) werden, bei beliebig genommenen $f(x+u, y+v, z+w)$, befriedigt sein, wenn ich setze

$$(6)\quad\begin{aligned}c^2\frac{\partial\psi_3}{\partial v}-b^2\frac{\partial\psi_2}{\partial w}&=0\\ a^2\frac{\partial\psi_1}{\partial w}-c^2\frac{\partial\psi_3}{\partial u}&=0\\ b^2\frac{\partial\psi_2}{\partial u}-a^2\frac{\partial\psi_1}{\partial v}&=0\end{aligned}\qquad\qquad(7)\quad\begin{aligned}c^2\psi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-b^2\psi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial w}&=\varphi_1\\ a^2\psi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial w}-c^2\psi_3\frac{\partial\vartheta}{\partial u}&=\varphi_2\\ b^2\psi_2\frac{\partial\vartheta}{\partial u}-a^2\psi_1\frac{\partial\vartheta}{\partial v}&=\varphi_3.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (6) werden befriedigt, wenn ich setze

$$\psi_1 = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad \psi_2 = \frac{1}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \psi_3 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial w}.$$

Die Gleichungen (5) und (7) werden dadurch zurückgeführt auf die folgenden zwei Gruppen von Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial w} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \qquad \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial w} - \dfrac{\partial\psi}{\partial w}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi}{\partial w}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial w} = \dfrac{1}{b^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \qquad \dfrac{\partial\psi}{\partial w}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial w} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial w} & \qquad \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} - \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial w},
\end{array}$$

welchen die 3 zu bestimmenden Functionen φ, ψ, ϑ genügen müssen. Aus diesen Gleichungen ist es leicht, eine solche abzuleiten, in welcher die Function $\vartheta(u, v, w)$ allein vorkommt. In der That, wenn man in die erste Gruppe der Gleichungen (8) für $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ ihre Werthe aus der zweiten Gruppe einsetzt, so findet man, wenn man zur Abkürzung $\vartheta_1 = \frac{\partial\vartheta}{\partial u}$, $\vartheta_2 = \frac{\partial\vartheta}{\partial v}$, $\vartheta_3 = \frac{\partial\vartheta}{\partial w}$ setzt, die folgenden drei Gleichungen

$$\begin{array}{lll}
\left(\dfrac{1}{a^2} - \vartheta_2^2 - \vartheta_3^2\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & + \vartheta_1\vartheta_2\dfrac{\partial\psi}{\partial v} & + \vartheta_1\vartheta_3\dfrac{\partial\psi}{\partial w} = 0 \\[2ex]
+ \vartheta_1\vartheta_2\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & + \left(\dfrac{1}{b^2} - \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial v} & + \vartheta_2\vartheta_3\dfrac{\partial\psi}{\partial w} = 0 \\[2ex]
+ \vartheta_1\vartheta_3\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & + \vartheta_2\vartheta_3\dfrac{\partial\psi}{\partial v} & + \left(\dfrac{1}{c^2} - \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial w} = 0.
\end{array}$$

Das sind lineare Gleichungen in $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial w}$; damit dieselben befriedigt werden können, muss die Determinante

$$D = \begin{vmatrix}
\dfrac{1}{a^2} - \vartheta_2^2 - \vartheta_3^2 & \vartheta_1\vartheta_2 & \vartheta_1\vartheta_3 \\[2ex]
\vartheta_1\vartheta_2 & \dfrac{1}{b^2} - \vartheta_3^2 - \vartheta_1^2 & \vartheta_2\vartheta_3 \\[2ex]
\vartheta_1\vartheta_3 & \vartheta_2\vartheta_3 & \dfrac{1}{c^2} - \vartheta_1^2 - \vartheta_2^2
\end{vmatrix}$$

verschwinden. Wenn man dieselbe ausrechnet, und zur Abkürzung

$$H = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2$$

$$F = b^2c^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + c^2a^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + a^2b^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2$$

$$G = (b^2 + c^2)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + (c^2 + a^2)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + (a^2 + b^2)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2$$

setzt, kommt man auf die folgende Differentialgleichung, welcher ϑ genügen muss:

$$1 - G + HF = 0. \tag{9}$$

Aber ein Integral von dieser Differentialgleichung kennen wir. Bezeichnet man mit λ den Parameter einer Wellenfläche, d. h. diejenige Function von u, v, w, welche durch die Gleichung (2^a) bestimmt wird, wenn man in derselben u, v, w an Stelle von x, y, z schreibt, so wird λ der Differentialgleichung (9) genügen (siehe LAMÉ: *Leçons sur l'élasticité,* p. 301) d. h. die Integrale, welche die Werthe von ξ, η, ζ angeben, sollen auf alle Punkte des Raumes erstreckt werden, welcher durch eine Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt ist.

Dieses Resultat war übrigens leicht vorauszusehen in Folge der physikalischen Bedeutung der Wellenfläche.

In der Abhandlung von WEIERSTRASS ist von der Fläche $\vartheta(u, v, w) = t$ vorausgesetzt, dass sie die Eigenschaft hat, von jeder aus dem Nullpunkte ausgehenden graden Linie nur einmal getroffen zu werden. Für die Wellenfläche ist diese Bedingung offenbar nicht erfüllt, denn jede Grade schneidet einmal die innere, einmal die äussere Schaale. Deshalb ist es nothwendig die beiden Schaalen von einander zu trennen, und unsere Integrale auf diejenigen Punkte des Raumes zu erstrecken, welcher von einer derselben z. B. der äusseren begrenzt wird.

Diese Trennung kann erzielt werden durch Einführung von neuen Coordinaten, welche uns das Mittel geben werden jede Schaale für sich darzustellen.

Diejenigen Coordinaten, welche für unseren Zweck am geeignetesten erscheinen, sind wohl diejenigen, welche von H. WEBER (BORCHARDT's Journal, Bd. 84, p. 353 f.) eingeführt sind.

Die reellen Constanten a, b, c seien nach ihrem absoluten Betrage geordnet $a^2 > b^2 > c^2$; u_1, u_2 bedeuten zwei neue Veränderliche, und $\operatorname{sn} u_1$, $\operatorname{cn} u_1$, $\operatorname{dn} u_1$ die elliptischen Functionen von JACOBI, welche dem Modul $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$; $\overline{\operatorname{sn}} u_2$, $\overline{\operatorname{cn}} u_2$, $\overline{\operatorname{dn}} u_2$ aber diejenigen welche dem Modul $\mu^2 = \frac{a^2}{b^2} \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$ entsprechen. Unter der für a^2, b^2, c^2 gemachten Voraussetzung ist sowohl k^2 wie μ^2 reell, positiv und < 1. Setzt man dann

$$\begin{aligned} u &= \lambda b \operatorname{sn} u_1 \cdot \overline{\operatorname{dn}} u_2 \\ v &= \lambda a \operatorname{cn} u_1 \, \overline{\operatorname{cn}} u_2 \qquad (10) \\ w &= \lambda a \operatorname{dn} u_1 \, \overline{\operatorname{sn}} u_2, \end{aligned}$$

so überzeugt man sich leicht, dass der Punkt, dessen Coordinaten u, v, w sind, der Wellenfläche mit dem Parameter λ angehören wird. Setzt man ferner

$$K = \int_0^1 \frac{du_1}{\sqrt{(1 - u_1^2)(1 - k^2 u_1^2)}}, \qquad L = \int_0^1 \frac{du_2}{\sqrt{(1 - u_2^2)(1 - \mu^2 u_2^2)}},$$

so wird man die ganze äussere Schaale dieser Wellenfläche und zwar jeden Punkt derselben nur einmal erhalten, wenn man u_1 alle reellen Werthe zwischen $-K$ und K und u_2 alle reellen Werthe zwischen $-2L$ und $+2L$ durchlaufen lässt. Ebenso, wenn man

$$K_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k_1^2 u^2)}}, \qquad L_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2)(1 - \mu_1^2 u^2)}}$$

und

$$u_1 = K - iu_1', \qquad u_2 = L - iu_2'$$

setzt, so erhält man alle die Punkte der inneren Schaale indem man u_1' alle reellen Werthe zwischen $-K_1$ und $+K_1$ und u_2' alle reellen Werthe zwischen $-2L_1$ und $+2L_1$ durchlaufen lässt.

Um alle diejenigen Punkte des Raumes zu erhalten, welche, sei es von der äusseren, sei es von der inneren Schaale der Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt sind, braucht man also nur in den obigen Formeln λ zwischen o und dem bestimmten Werthe $\lambda = t$, u_1 und u_2 aber zwischen den oben festgestellten Grenzen zu variiren.

Diese Coordinaten geben uns also das Mittel die verlangte Trennung der beiden Schaalen wirklich auszuführen. Aber darin besteht ihr ganzer Nutzen noch nicht. Wir werden sehen, dass auch die Integration der beiden Gruppen der Differentialgleichungen (8) mit deren Hülfe leicht zu erreichen ist.

Zu diesem Zwecke wollen wir diese Gleichungen mit Hülfe der neuen Coordinaten transformiren. Wenn man

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, & A_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\\
B &= \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial w}, & B_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_2}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial w}\\
C &= \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u}, & C_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u}
\end{aligned}$$

setzt, so sind die transformirten Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{aligned}
A\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + A_1\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, & A\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + A_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial u}\\
B\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + B_1\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial v}, & B\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + B_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{b^2}\frac{\partial \psi}{\partial v}\\
C\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + C_1\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial w}, & C\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + C_1\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Aber die Grössen A, B, C, A_1, B_1, C_1 genügen, wie man unmittelbar aus deren Definition sieht, den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A\frac{\partial \lambda}{\partial u} + B\frac{\partial \lambda}{\partial v} + C\frac{\partial \lambda}{\partial w} &= 0 & A_1\frac{\partial \lambda}{\partial u} + B_1\frac{\partial \lambda}{\partial v} + C_1\frac{\partial \lambda}{\partial w} &= 0\\
A\frac{\partial u_1}{\partial u} + B\frac{\partial u_1}{\partial v} + C\frac{\partial u_1}{\partial w} &= 0 & A_1\frac{\partial u_1}{\partial u} + B_1\frac{\partial u_1}{\partial v} + C_1\frac{\partial u_1}{\partial w} &= \Delta\\
A\frac{\partial u_2}{\partial u} + B\frac{\partial u_2}{\partial v} + C\frac{\partial u_2}{\partial w} &= -\Delta & A_1\frac{\partial u_2}{\partial u} + B_1\frac{\partial u_2}{\partial v} + C_1\frac{\partial u_2}{\partial w} &= 0,
\end{aligned}$$

wenn man mit Δ die Functional-Determinante von u_1, u_2, λ in Beziehung auf u, v, w bezeichnet, also

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u}, & \frac{\partial u_1}{\partial v}, & \frac{\partial u_1}{\partial w} \\ \frac{\partial u_2}{\partial u}, & \frac{\partial u_2}{\partial v}, & \frac{\partial u_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u}, & \frac{\partial \lambda}{\partial v}, & \frac{\partial \lambda}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Da nun

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial w}$$

ist, so ist

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B\frac{\partial \varphi}{\partial v} + C\frac{\partial \varphi}{\partial w} = -\Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

$$A_1\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_1\frac{\partial \varphi}{\partial v} + C_1\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}.$$

Man erhält also aus den Gleichungen (11), wenn man jede derselben respective mit A, B, C, oder mit A_1, B_1, C_1 multiplicirt und addirt, die folgenden Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (AA_1 + BB_1 + CC_1)\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \\ (AA_1 + BB_1 + CC_1)\frac{\partial \psi}{\partial u_1} + (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)\frac{\partial \psi}{\partial u_2} &= -\Delta\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ (a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + (a^2AA_1 + b^2BB_1 + c^2CC_1)\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= -\Delta\frac{\partial \psi}{\partial u_2} \\ (a^2AA_1 + b^2BB_1 + c^2CC_1)\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + (a^2A_1^2 + b^2B_1^2 + c^2C_1^2)\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \Delta\frac{\partial \psi}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Aber wenn man die Coefficienten der Ableitungen von φ und von ψ in diesen Gleichungen, nach den bekannten Formeln für die Transformation der Coordinaten ausrechnet, so findet man, indem man die Bezeichnungen

$$V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - (1 - k^2 - \mu^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2$$

$$U_1 = 1 - \frac{1 - k^4 - \mu^2}{1 - k^2} \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_2 + \frac{k^2(1 - k^2 - \mu^2)}{1 - k^2} \operatorname{sn}^4 u_1$$

$$U_2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \frac{1 - k^2 - \mu^4}{1 - \mu^2} \operatorname{sn}^2 u_2 + \frac{\mu^2(1 - k^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} \operatorname{sn}^4 u_2$$

einführt:

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b} \frac{1}{\lambda^2 V}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{a^2 b^2} \frac{1}{\lambda^2 V}, \qquad a^2 A^2 + b^2 B^2 + c^2 C^2 = \frac{c^2}{a^2 b^2} \frac{U_2}{\lambda^2 V^2}$$

$$a^2 A_1^2 + b^2 B_1^2 + c^2 C_1^2 = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\lambda^2 V}, \qquad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = \frac{1}{a^4} \frac{U_1}{\lambda^2 V^2}$$

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = a^2 AA_1 + b^2 BB_1 + c^2 CC_1 = 0.$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichungen (12) einsetzt, so werden 2 derselben mit einander identisch und sie reduciren sich auf die drei folgenden:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = -b \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

$$(13) \qquad \frac{U_1}{V} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \frac{a^2}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$$

$$\frac{V}{U_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = \frac{c^2}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}.$$

Diese letzteren können, da $U_1 U_2 - \frac{a^2}{c^2} V^2$ nicht identisch verschwindet, nur gelöst werden, wenn man setzt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\frac{1}{b} \frac{\partial \psi}{\partial u_1}.$$

Die allgemeinen Integrale dieser letzteren sind, wenn mit l, m, n 3 willkürliche Constanten bezeichnet werden

$$\varphi = lu_2 + m$$

$$\psi = -blu_1 + n.$$

Für unseren Zweck genügt es irgend ein particuläres Integral dieser Differentialgleichungen zu kennen. Man kann also

$$l = 1, \qquad m = n = 0$$

setzen.

Wenn wir diesen Werth von φ in die Ausdrücke von ξ, η, ζ einführen, erhalten wir also das folgende Resultat:

Es sei u_2 die Function von u, v, w, welche durch die Gleichungen (10) bestimmt wird; $f(x+u, y+v, z+w)$ eine willkürliche Function von $x+u$, $y+v$, $z+w$; $d\omega$ das Raum-Element: und bezeichnen wir mit

$$\int\limits_{(t)} \varphi(u, v, w)\, d\omega$$

ein Integral, welches über alle Punkte desjenigen Raumes erstreckt wird, welcher durch eine sei es äussere, sei es innere Schaale der Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt ist.

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\xi &= D_t \int\limits_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\
\eta &= D_t \int\limits_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \qquad (14) \\
\zeta &= D_t \int\limits_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega
\end{aligned}$$

stellen ein System von Integralen der partiellen Differentialgleichungen (1) *in allen denjenigen Fällen* dar, wo es erlaubt ist, die partielle Differentiation in Beziehung auf x, y, z unter dem Integralzeichen vorzunehmen.

Dieser letzte Punkt ist noch zu untersuchen.

Die 3 Functionen $\frac{\partial u_2}{\partial u}$, $\frac{\partial u_2}{\partial v}$, $\frac{\partial u_2}{\partial w}$ haben die folgende Bedeutung:

$$\frac{\partial u_2}{\partial u} = -\frac{1}{b}\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\frac{1}{\lambda}\frac{\operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \overline{\operatorname{cn}} u_2}{V}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial v} = -\frac{1}{a}\frac{1}{\lambda}\frac{\operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \overline{\operatorname{dn}} u_2}{V}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial w} = +\frac{1}{a}\frac{1}{\lambda}\frac{\operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}} u_2 \overline{\operatorname{dn}} u_2}{V},$$

wobei $V = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2 \overline{\operatorname{sn}}^2 u_2 - (1 - k^2 - \mu^2)\operatorname{sn}^2 u_1 \overline{\operatorname{sn}}^2 u_2$.

Sie haben einen bestimmten endlichen Werth für alle Werthe von u_1 und u_2, für welche V von Null verschieden ist. Man überzeugt sich, dass für Werthe von u_1 und u_2 innerhalb der von uns bestimmten Grenzen, dieser Ausdruck nur dann verschwinden kann, wenn gleichzeitig

$$\operatorname{cn} u_1 = 0, \qquad \overline{\operatorname{cn}} u_2 = 0$$

ist. Die entsprechenden Werthe von u, v, w sind dann die Coordinaten eines der vier singulären Punkte der betrachteten Wellenfläche. Innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet also V für alle die Punkte einer optischen Axe; man überzeugt sich aber leicht, dass die Integrale (14) nichts desto weniger einen bestimmten endlichen Werth behalten, da, wenn man dieselben in die neuen Coordinaten λ, u_1, u_2 transformirt, das Raumelement $d\omega$ die Gestalt erhält

$$a^2 b \lambda^2 V d\lambda du_1 du_2$$

und folglich

$$\xi = -a^2 D_t \int_0^t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} \lambda \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \overline{\operatorname{cn}} u_2 f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\lambda du_1 du_2$$

$$\eta = -ab D_t \int_0^t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \lambda \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \overline{\operatorname{dn}} u_2 f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\lambda du_1 du_2$$

$$\zeta = ab D_t \int_0^t \int_{-K}^{K} \int_{-2L}^{2L} \lambda \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}} u_2 \overline{\operatorname{dn}} u_2 f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\lambda du_1 du_2.$$

Es würde offenbar nicht gestattet sein die Ableitungen von ξ, η, ζ nach x, y, z ohne Weiteres durch Differentiation unter dem Integralzeichen aufzustellen, da die Ausdrücke, zu welchen man auf diese Weise gelangt, auch nach der Transformation in die neuen Coordinaten innerhalb der Grenzen der Integration unendlich werden. Aber nach einer Methode, welche mir von Herrn WEIERSTRASS vorgeschlagen wurde, überzeugt man sich, dass diejenigen speciellen Combinationen der Ableitungen, welche in den Differentialgleichungen (1) vorkommen, doch durch Differentiation unter dem Integralzeichen gebildet werden können, wenn nur die willkürliche Function $f(x+u,\ y+v,\ z+w)$ den folgenden Bedingungen unterworfen wird: 1°. Sie ist in dem betrachteten Raume überall eindeutig, endlich und stetig; 2°. Sie besitzt Ableitungen nach x, y und z, welche in dem betrachteten Raume überall endlich sind.

Dies wird auf folgende Weise gezeigt.

Man denke sich um den Nullpunkt eine kleine Kugel und auf der begrenzenden Wellenfläche um jeden der 4 singulären Punkte eine kleine geschlossene linie L beschrieben. Alsdann construire man vier Kegel, welche den Nullpunkt zum Scheitel und je eine der vier Linien L zur Directrice haben. Mit T möge der ursprüngliche Raum bezeichnet werden und mit T' derjenige, welcher aus ihm durch Ausscheidung der kleinen Kugel und der vier genannten Kegel hervorgeht. In dem Raume T' hat dann jede der Functionen $\frac{\partial u_2}{\partial u}$, $\frac{\partial u_2}{\partial v}$, $\frac{\partial u_2}{\partial w}$ nebst sämmtlichen Ableitungen einen bestimmten endlichen Werth. Nun muss untersucht werden, wie die Formeln des Herrn WEIERSTRASS sich in dem Raume T' gestalten.

Die Gleichung

$$D_t \int F(u,\ v,\ w)\, d\omega = \int \frac{F(u,\ v,\ w)\, d\sigma_t}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2}}$$

lässt sich jetzt ohne Weiteres anwenden. Die Gleichung

$$D_t \int D_u F(u,\ v,\ w)\, d\omega = D_t \int \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial u} F(u,\ v,\ w)\, d\sigma_t}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)^2}}$$

ferner bleibt gültig, wenn wir die Integration rechts auf die ganze Begrenzung des Raumes T' erstrecken d. h.: 1° über die äussere Schaale der begrenzenden Wellenfläche mit Ausnahme der vier ausgeschnittenen Linien L; 2° über die Mantel der vier Kegel, so weit sie nicht innerhalb der kleinen Kugel liegen; 3° über die Oberfläche der Kugel, so weit sie nicht innerhalb der vier Kegel liegt. Bei jeder dieser Integrationen bezeichnet der Ausdruck

$$\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2}}$$

den Cosinus desjenigen Winkels, welchen die nach Aussen gerichtete Normale mit der u-Axe bildet. Bezeichnet man diese Grösse mit U, so hat man also

$$\int\limits_{(T')} D_u F(u,\ v,\ w)d\omega = \int UF(u,\ v,\ w)d\sigma_t + \int U_0 F(u,\ v,\ w)d\sigma_0$$
$$+\sum\int U'F(u,\ v,\ w)d\sigma',$$

wo $d\sigma_0$ ein Element der Oberfläche der Kugel und $d\sigma'$ ein Element der Oberfläche eines der Kegel bedeutet. Ferner

$$D_t\int\limits_{(T')} D_u F(u,\ v,\ w)d\omega = D_t^2\int\frac{\partial\vartheta}{\partial u}F(u,\ v,\ w)d\omega + D_t\sum\int U'F(u,\ v,\ w)d\sigma'$$

(da das über die Kugel genommene Integral von t unabhängig ist).

Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes einer der ausgeschnittenen Linien auf der Fläche $\lambda = 1$, so kann man bei der letzten Integration auf der rechten Seite der obigen Gleichung

$$u' = tx_1, \qquad v' = ty_1, \qquad w' = tz_1$$

setzen; dann hat man

$$U'd\sigma' = t(y_1 dz_1 - z_1 dy_1)$$

und

$$D_t\int U'F(u',\ v',\ w')d\sigma' = t\int\limits_{(L)} F(u',\ v',\ w')(y_1 dz_1 - z_1 dy_1),$$

wo die Integration über die genannte Linie erstreckt ist. Ist also

$$\overline{F}(x, y, z) = D_t \int_{(T')} \psi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z) d\omega,$$

so ist

$$D_x \overline{F}(x, y, z) = D_t \int_{(T')} \psi \frac{\partial f(u + x, v + y, w + z)}{\partial x} d\omega$$

$$= D_t \int_{(T')} D_u [\psi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z)] d\omega - D_t \int \frac{\partial \psi}{\partial u} f(x + u, y + v, z + w) d\omega$$

$$= D_t^2 \int_{(T')} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \psi(u, v, w) f(u + x, v + y, w + z) d\omega$$

$$- D_t \int_{(T')} f(u + x, v + y, w + z) \frac{\partial \psi}{\partial u} d\omega$$

$$+ t \int_{(L)} f(u + x, v + y, w + z) \psi(u, v, w)(y_1 dz_1 - z_1 dy_1).$$

Nun bilde man nach dieser Formel die Ausdrücke $D_z \eta - D_y \zeta$ u. s. w. (im Raume T'); dann findet man

$$(15) \quad D_z \eta - D_y \zeta = D_t^2 \int_{(T')} \left(\frac{\partial u_2}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) f(u + x, v + y, w + z) d\omega$$

$$+ t \sum \int_{(L)} f(u + x, v + y, w + z) \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial v} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial w} (z_1 dx_1 - x_1 dz_1) \right\}$$

Nun muss man aber bemerken, dass u_2 eine homogene Function von der 0^{ten} Dimension in u, v, w ist; $\frac{\partial u_2}{\partial u}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial w}$ sind also homogene Functionen der $(-1)^{\text{sten}}$ Dimension.

Folglich:

$$\frac{\partial u_2}{\partial v} = t^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial w} = t^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial z_1}$$

$$t\left\{\frac{\partial u_2}{\partial v}(x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial w}(z_1 dx_1 - x_1 dz_1)\right\}$$

$$= \frac{\partial u_2}{\partial y_1}(x_1 dy_1 - y_1 dx_1) - \frac{\partial u_2}{\partial z_1}(z_1 dx_1 - x_1 dz_1)$$

$$= x_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1\right) - \left(y_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial u_2}{\partial z_1}\right) dx_1.$$

Aber, weil u_2 eine homogene Function der 0^{ten} Dimension ist, also

$$x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial u_2}{\partial z_1} = 0,$$

ist der obige Ausdruck gleich

$$x_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1\right) = x_1 du_2.$$

Es ist also:

$$(15^a) \qquad D_z\eta - D_y\zeta = D_t\int\limits_{(T)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right) f(x+u,\ y+v,\ z+w)\, d\omega$$

$$+ \Sigma\int\limits_{(L)} x_1 f(u+x,\ v+y,\ w+z)\, du_2.$$

Nun ist aber

$$\int\limits_{(L)} x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)\, du_2 = \int\limits_{(L)} d\{x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w) u_2\}$$

$$- \int\limits_{(L)} u_2 d\{x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)\}.$$

Da die Linie L eine geschlossene ist, und da sowohl $x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)$, wie auch $u_2 x_1 f(x+u,\ y+v,\ z+w)$ auf dem durch dieselbe begrenzten Theile der Fläche überall endlich und stetig bleiben, so ist das erste der beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden, Integrale gleich Null. Das zweite kann aber auch, wenn die Linie L nach und nach verkleinert wird, nur einen beliebig kleinen Beitrag liefern.

Ferner ist aber

$$\frac{\partial u_2}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\frac{b}{a^2}\frac{\partial u_1}{\partial u}$$

und der Ausdruck

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} d\omega$$

ist endlich und bestimmt in *jedem* Punkte der Wellenfläche. Die rechte Seite der Gleichung (15a) behält also einen bestimmten endlichen Werth wie klein man auch die Linie L annehmen mag. Bei dem $\lim L = 0$, wird jedes der Linien-Integrale unendlich klein, und man erhält

$$(15^b) \quad \xi_1 = a^2(D_y\zeta - D_z\eta) = -\frac{1}{b}\int\limits_{(T)} \frac{\partial u_1}{\partial u} f(u+x,\ v+y,\ w+z)d\omega.$$

Nun ist aber u_1 eine Function ganz von derselben Beschaffenheit wie u_2; dasselbe Raisonnement kann auf diese neuen Integrale übergetragen werden, und man überzeugt sich ganz in derselben Weise, dass die Ausdrücke

$$D_y\zeta_1 - D_z\eta_1 \text{ etc.}$$

dadurch gebildet werden können, dass man unter dem Integralzeichen differentiirt und dann die WEIERSTRASS'schen Transformationsformeln anwendet.

Wir sind also zu dem folgenden Resultate gekommen Bestimmt man die 3 Grössen λ, u_1, u_2 als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume, dadurch dass man

$$(16) \qquad \begin{aligned} u &= b\lambda \operatorname{sn} u_1 \overline{\operatorname{dn}} u_2, \\ v &= a\lambda \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{cn}} u_2, \\ w &= a\lambda \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{sn}} u_2 \end{aligned}$$

setzt, so hat man

$$(16_a)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial u} &= -\frac{1-k^2}{b\lambda}\,\frac{\operatorname{sn} u_1\,\overline{\operatorname{sn}}\,u_2\,\overline{\operatorname{cn}}\,u_2}{V}\\ \frac{\partial u_2}{\partial v} &= -\frac{1}{a\lambda}\,\frac{\operatorname{cn} u_1\,\overline{\operatorname{sn}}\,u_2\,\overline{\operatorname{dn}}\,u_2}{V}\\ \frac{\partial u_2}{\partial w} &= +\frac{1}{a\lambda}\,\frac{\operatorname{dn} u_1\,\overline{\operatorname{cn}}\,u_2\,\overline{\operatorname{dn}}\,u_2}{V}\end{aligned}$$

$$V = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 u_1 - \mu^2\,\overline{\operatorname{sn}}^2 u_2 - (1-k^2-\mu^2)\operatorname{sn}^2 u_1\,.\,\overline{\operatorname{sn}}^2 u_2.$$

Setzt man dann, mit x, y, z drei reelle Grössen, und mit $f(x+u, y+v, z+w)$ eine den oben auseinandergesetzten Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit genügende, sonst aber beliebige Function bezeichnend,

$$(17)\qquad \begin{aligned}\xi &= D_t\int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega\\ \eta &= D_t\int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega\\ \zeta &= D_t\int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega,\end{aligned}$$

wobei man die Integration auf der linken Seite auf alle die Punkte des Raumes erstreckt, welcher durch die äussere, (respective durch die innere) Schaale einer Wellenfläche mit dem Parameter $\lambda = t$ begrenzt ist, so stellen die so definirten Grössen ξ, η, ζ Functionen von x, y, z, t dar, welche für alle endlichen reellen Werthe dieser Veränderlichen einen bestimmten endlichen Werth besitzen und den partiellen Differentialgleichungen (1) genügen. Wenn man in den Gleichungen (17) das Raumelement $d\omega$ in den Coordinaten λ, u_1, u_2 ausdrückt, und für $\frac{\partial u_2}{\partial u}, \frac{\partial u_2}{\partial v}, \frac{\partial u_2}{\partial w}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (16_a) einsetzt, so erhält man die Grössen ξ, η, ζ unter der folgenden Form:

$$\xi = t\int\limits_{-K}^{K}\int\limits_{-2L}^{2L}\frac{1-k^2}{b}\operatorname{sn}u_1\,\overline{\operatorname{sn}}\,u_2\,\overline{\operatorname{cn}}\,u_2 f(x+u,\ y+v,\ z+w)du_1du_2$$

$$\eta = t\int\limits_{-K}^{K}\int\limits_{-2L}^{2L}-\frac{1}{a}\operatorname{cn}u_1\,\overline{\operatorname{sn}}\,u_2\,\overline{\operatorname{dn}}\,u_2 f(x+u,\ y+v,\ z+w)du_1du_2$$

$$\zeta = t\int\limits_{-K}^{K}\int\limits_{-2L}^{2L}\frac{1}{a}\operatorname{dn}u_1\,\overline{\operatorname{cn}}\,u_2\,\overline{\operatorname{dn}}\,u_2 f(x+u,\ y+v,\ z+w)du_1du_2$$

in welchen Formeln man für die in $f(x+u, y+v, z+w)$ auftretenden Grössen u, v, w ihre Werthe aus den Gleichungen (16) einsetzen muss.

Nun handelt es sich darum die Anfangswerthe der so definirten Grössen ξ, η, ζ, d. h. ihre Werthe für $t=0$ zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke werde ich diese Grössen ξ, η, ζ noch unter einer anderen Form darstellen. Es ist:

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial u} = \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial w}$$

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial v} = \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial w} = \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Indem wir von der Transformationsformel (B), welche man auch unter der Form

$$D_t^*\int\limits_t \varphi(u,\ v,\ w)\frac{\partial \lambda}{\partial u}f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

$$=\int\varphi(u,\ v,\ w)\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial x}d\omega + \int\frac{\partial \varphi}{\partial u}f(x+u,\ y+v,\ z+w)d\omega$$

schreiben kann, Gebrauch machen, erhalten wir:

$$\xi = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

$$= -bD_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial w} \right) f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

$$= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial z} \right] d\omega$$

$$\eta = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

(18)
$$= -bD_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

$$= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial x} \right] d\omega$$

$$\zeta = D_t \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

$$= -bD_t \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

$$= -b \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial y} \right] d\omega.$$

Um aber auch in diesem Falle Doppel-Integrale statt dreifacher zu erhalten, wollen wir statt ξ, η, ζ die Derivirten dieser neuen Ausdrücken nach t nehmen, welche natürlich auch ein System von Lösungen bilden. Wir setzen also

$$\xi = -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u,\ y+v,\ z+w) d\omega$$

(19)
$$= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial w} \frac{\partial f(x+u,\ \ldots)}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial f(x+u,\ \ldots)}{\partial z} \right] d\omega$$

(19)
$$\eta = -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial v} f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega$$
$$= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial f(x+u,\ldots)}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial w}\frac{\partial f(x+u,\ldots)}{\partial x}\right] d\omega$$
$$\zeta = -\frac{1}{b} D_t^2 \int \frac{\partial u_2}{\partial w} f(x+u,\ y+v,\ z+w)\,d\omega$$
$$= D_t \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial f(x+u,\ldots)}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial f(x+u,\ldots)}{\partial y}\right] d\omega.$$

Aus den Gleichungen (16) ergeben sich die folgenden Werthe für $\frac{\partial u_1}{\partial u}$, $\frac{\partial u_1}{\partial v}$, $\frac{\partial u_1}{\partial w}$

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{1}{b\lambda}\frac{\operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{dn}}\, u_2}{V} = \frac{V_1}{V}$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial v} = -\frac{1}{a\lambda}\frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1 \overline{\operatorname{cn}}\, u_2}{V} = \frac{V_2}{V}$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial w} = -\frac{1-\mu^2}{a\lambda}\frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 \overline{\operatorname{sn}}\, u_2}{V} = \frac{V_3}{V}.$$

Indem man in den Integralen auf der rechten Seite der Gleichungen (19) das Raumelement $d\omega$ in den neuen Coordinaten ausdrückt, und die Integration auf alle Punkte der *äusseren* Wellenfläche ausdehnt, findet man also:

$$\xi = t\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}\left[V_3\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial y} - V_2\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial z}\right] du_1\,du_2$$

(20)
$$\eta = t\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}\left[V_1\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial z} - V_3\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial x}\right] du_1\,du_2$$

$$\zeta = t\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}\left[V_2\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial x} - V_1\frac{\partial f(x+u,\ y+v,\ z+w)}{\partial y}\right] du_1\,du_2.$$

In diesen Formeln muss man für u, v, w ihre Werthe aus den Gleichungen (16) einsetzen.

Man überzeugt sich leicht (durch ähnliche Betrachtungen wie diejenigen, welche in der Abhandlung von WEIERSTRASS vorkommen), dass die durch diese Formeln dargestellten Werthe von ξ, η, ζ *ungrade* Functionen von t sind. Um den Coefficienten von t zu erhalten, muss man in der unter dem Integralzeichen vorkommenden Funktion $f(x+u, y+v, z+w)$, $t=0$, folglich auch $u=0$, $v=0$, $w=0$ setzen. Bezeichnet man diesen Coefficienten in ξ, η, ζ respective mit X_0, Y_0, Z_0, und setzt man

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=f_2(x, y, z), \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=f_3(x, y, z),$$

so hat man

$$X_0=f_2(x, y, z)\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_3du_1du_2-f_3(x, y, z)\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_2du_1du_2$$

$$Y_0=f_3(x, y, z)\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_1du_1du_2-f_1(x, y, z)\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_3du_1du_2$$

$$Z_0=f_1(x, y, z)\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_2du_1du_2-f_2(x, y, z)\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_1du_1du_2.$$

Nun ist aber

$$\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_1du_1du_2=\frac{1}{b}\int_{-K}^{K}\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_1du_1\int_{-2L}^{2L}\overline{\mathrm{dn}}\,u_2du_2=\frac{4\pi}{b}$$

$$\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_2du_1du_2=\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{dn}\,u_1du_1\int_{-2L}^{2L}\overline{\mathrm{cn}}\,u_2du_2=0$$

$$\int_{-K}^{K}\int_{-2L}^{2L}V_3du_1du_2=\int_{-K}^{K}\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_1du_1\int_{-2L}^{2L}\overline{\mathrm{sn}}\,u_2du_2=0.$$

Es werden also die durch die Formeln (20) dargestellen Werthe von ξ, η, ζ Integrale der partiellen Differentialgleichungen (1) sein, welche die folgenden Eigenschaften haben: für $t = 0$ sind ihre Werthe sämmtlich $= 0$, während die Anfangswerthe von $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ respective gleich sind:

$$0, \qquad \frac{4\pi}{b}\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}, \qquad -\frac{4\pi}{b}\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y},$$

wo $f(x, y, z)$ eine willkürliche Function von x, y, z ist. Diese Werthe von ξ, η, ζ sind dadurch erhalten, dass wir die Integration über die äussere Schaale der Wellenfläche erstreckt haben. Wenn man nun aus ähnlichen Formeln ausgeht, welche aber über die *innere* Schaale der Wellenfläche erstreckt werden, und in welchen statt $f(x + u, \ldots)$ eine andere willkürliche Function $F(x + u, \ldots)$ vorkommt, so kommt man zu Werthen von ξ, η, ζ, welche auch Integrale der Gleichungen (1) darstellen und so beschaffen sind, dass sie für $t = 0$ sämmtlich verschwinden, während die Werthe von $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_0$ respective

$$-\frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}, \qquad \frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x, y, z)}{dx}, \qquad 0$$

sind. Durch Combination von diesen beiden Systemen von Werthen für ξ, η, ζ kommt man zu einem System von Integralen der vorgelegten Differentialgleichungen, welche die Eigenschaft haben, dass für $t = 0$

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{4\pi}{b}\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{4\pi}{b}\left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right]$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}$$

ist. Die Functionen ξ, η, ζ sind der Bedingung unterworfen worden, dass ihre Anfangswerthe den Gleichungen

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

genügen. Man kann aber bekanntlich, wenn φ_1, φ_2, φ_3 irgend 3 Functionen von x, y, z sind, unter welchen die Relation

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = 0$$

besteht, immer zwei Functionen $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ finden, so dass

$$\varphi_1 = -\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right)$$

$$\varphi_3 = -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}$$

ist. Die betrachteten Werthe von ξ, η, ζ stellen also die allgemeinsten Integrale der Differentialgleichungen (1) dar, *welche zu gleicher Zeit ungrade Functionen von t sind.*

Nimmt man nun von diesen Werthen von ξ, η, ζ die ersten Ableitungen nach t, so kommt man zu einem Systeme von Integralen, welche grade Functionen von t sind. Die Combination der beiden Systeme mit einander liefert also das allgemeine System von Integralen der Differentialgleichungen (1), welche nur der Bedingung

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

unterworfen sind.

Hiermit ist also diejenige Aufgabe, die ich mir gestellt habe, vollständig gelöst. Nun werde ich aber noch Folgendes bemerkén.

Die partiellen Differentialgleichungen (1) sind von Lamé unter der Voraussetzung, dass die Verrückungen ξ, η, ζ der Gleichung

$$\theta = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

genügen, aufgestellt worden. Wenn man diese Voraussetzung fallen lässt, so kommt man, wie es Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mechanik gezeigt hat, zu einem Systeme von Differentialgleichungen, welches sich von dem Systeme (1) nur dadurch unterscheidet, dass auf der rechten

Seite jeder Gleichung respective das Glied $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ multiplicirt mit einer Constante hinzutritt.

Es ist nun leicht, auch von diesem Systeme von Differentialgleichungen das allgemeine Integralsystem aufzustellen.

Es sei in der That ξ, η, ζ ein System von Integralen desselben, so setze man

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_1$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial y} + \eta_1$$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_1 .$$

Bestimmt man nun die Function u vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

oder, wie ich zur Abkürzung schreiben werde

$$\Delta u - \theta = 0, \tag{21}$$

so bilden ξ, η, ζ ein System von Integralen der Gleichung (1), für welche die Relation

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0$$

statt findet. Dieselben sind also durch die oben aufgestellten Formeln darstellbar. Was nun die Function u betrifft, so muss dieselbe ausser der Gleichung (21) noch den folgenden Gleichungen

$$D_x(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

$$D_y(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

$$D_z(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

genügen. Es ist aber auf folgende Weise möglich diese Gleichungen gleichzeitig zu befriedigen.

Man bestimme zwei Functionen u_0 und u_1 von x, y, z aus den beiden Differentialgleichungen

$$\Delta u_0 = (\theta)_{t=0}$$

$$\Delta u_1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}.$$

Wenn man dann für u diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - \Delta)u = 0$$

nimmt, welche durch die Bedingungen

$$(u)_{t=0} = u_0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = u_1$$

bestimmt ist, so wird auch Δu eine Lösung der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - \Delta)\varphi = 0$$

sein, und zwar sind die Werthe von Δu und ihrer Ableitung nach t für $t = 0$ gleich Δu_0 respective Δu_1. Sie stimmen also mit den Anfangswerthen von θ und $\frac{d\theta}{dt}$ überein. Da nun θ derselben Differentialgleichung genügt, so ist mithin für alle Werthe von t

$$\Delta u = \theta.$$

u genügt also den erforderlichen Bedingungen.