SULLE SUPERFICIE
AVENTI IL GENERE ARITMETICO NEGATIVO.

Nota di **G. Castelnuovo**, in Roma.

(Estratto da una Lettera al Prof. M. DE FRANCHIS).

Adunanza del 14 maggio 1905.

. . . .

Come Ella accenna alla fine della Sua bella Nota *), il sig. ENRIQUES ed io siamo pure pervenuti ai teoremi da Lei dati. E spingendo più oltre l'analisi fondata su quei concetti, veramente fecondi, siamo giunti a nuovi risultati, che presentano qualche interesse. Penso perciò di comunicarle qui la parte di queste ricerche, cui ho principalmente contribuito, lasciando al sig. ENRIQUES la cura di esporre i risultati a lui dovuti, che si riattaccano ad un suo recente lavoro. Come Ella vedrà, l'insieme di queste ricerche permette di caratterizzare in modo completo le superficie, che hanno il genere aritmetico negativo, le quali si riducono ad un numero ristrettissimo di tipi.

1. Anch'io parto, come Lei, dal teorema che *una superficie, sopra cui un integrale semplice di prima specie è funzione di un altro integrale siffatto, possiede un fascio irrazionale di curve* **). Io dimostro questo teorema con un ragionamento fondato sullo stesso concetto di cui Ella si vale, ma forse più breve; mi limito ad accennarlo qui.

Siano $I = \int P dx + Q dy$, $I_1 = \int P_1 dx + Q_1 dy$ due integrali di

---

*) *Sulle superficie algebriche, le quali contengono un fascio irrazionale di curve* [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 49-54 (adunanza del 23 aprile 1905)].

**) Parlo di integrali di *prima specie*, sebbene, come Ella nota giustamente, il teorema valga, con qualche restrizione, anche per gli integrali di specie superiore, perchè di questi ultimi non faccio uso nel seguito.

prima specie della superficie $f(x, y, z) = 0$, linearmente indipendenti, ma funzione uno dell'altro; P, Q, P_1, Q_1 sono funzioni razionali delle variabili x, y, z legate dall'equazione $f = 0$. In virtù della ipotesi fatta, sarà identicamente nullo il determinante jacobiano $PQ_1 - P_1 Q$. Segue che $\frac{P_1}{P}$ è un fattore integrante dell'espressione differenziale $P dx + Q dy$, che è già un differenziale esatto. Si conclude che $\frac{P_1}{P}$ è funzione dell'integrale I, o, se si vuole, che $I = F\left(\frac{P_1}{P}\right)$.

Dunque le curve del fascio $\frac{P_1}{P} = k$ (costante) sono curve di livello per l'integrale I. Ma ciò non è possibile, a meno che quelle curve non si spezzino in più parti variabili, giacchè altrimenti I sarebbe un integrale abeliano di prima specie di una funzione *razionale* di k; sarebbe quindi una costante. Concludiamo che le parti variabili, componenti le dette curve, formano un fascio irrazionale, del quale fascio (ente algebrico ∞^1) I ed I_1 sono integrali abeliani di prima specie. Il genere del fascio è dunque non inferiore a 2.

2. Ciò premesso, si presenta naturale la domanda: « Supposto che

$$I_h = \int P_h dx + Q_h dy \qquad (h = 1, 2, \ldots, d) \tag{1}$$

siano $d \geqq 2$ integrali di prima specie, linearmente indipendenti, che una superficie data possiede, come si riconoscerà se un integrale $\sum_{h=1}^{h=d} \lambda_h I_h$ sia funzione di un altro integrale dello stesso tipo $\sum_{h=1}^{h=d} \mu_h I_h$? ». Naturalmente le λ e le μ devono costituire due sistemi di valori nè tutti nulli, nè proporzionali.

La risposta è immediata.

Si formi il determinante funzionale dei due ultimi integrali, e si uguagli a zero identicamente. Un facile calcolo permette di scrivere l'identità sotto la forma

$$\sum_{hk} (\lambda_h \mu_k - \lambda_k \mu_h)(P_h Q_k - P_k Q_h) = 0, \tag{2}$$

dove per hk si devono porre le combinazioni binarie dei numeri 1, 2, ..., d.

3. Data una superficie $f(x, y, z) = 0$, che abbia il sistema completo (1) di integrali linearmente indipendenti di prima specie, non si cono-

sceranno, in generale, relazioni *particolari* del tipo (2) tra i binomi $P_h Q_k - P_k Q_h$. Ma relazioni lineari, di tipo *generale*, tra quei binomi, potranno esser note *a priori*, in virtù della seguente considerazione, cui Ella stessa ricorre. Si sa *) che, se il binomio sopra scritto non è identicamente nullo, esso può porsi sotto la forma

$$P_h Q_k - P_k Q_h = \frac{1}{f'_z} \varphi_{hk}(x, y, z),$$

dove $f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}$, e φ_{hk} è un polinomio, d'ordine $n - 4$, aggiunto alla superficie f, d'ordine n. I $\frac{d(d-1)}{2}$ binomi analoghi, che si possono formare adoperando i d integrali (1), dànno dunque luogo ad altrettante superficie d'ordine $n - 4$ aggiunte alla f. Ma se il genere geometrico p_g di questa è inferiore a $\frac{d(d-1)}{2}$, se dunque

$$(3) \qquad p_g = \frac{d(d-1)}{2} - \delta \qquad (\delta > 0),$$

tra i polinomi φ_{hk}, e quindi tra i binomi $P_h Q_k - P_k Q_h$, devono passare δ identità lineari, distinte tra loro:

$$(4) \qquad \sum_{hk} \rho_{hk}^{(i)} (P_h Q_k - P_k Q_h) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \delta).$$

Le $\rho_{hk}^{(i)}$ formano δ sistemi di $\frac{d(d-1)}{2}$ costanti. Insieme alle identità (4) sussistono quelle, che si ottengono combinando linearmente le (4). Fra le identità così formate, ve ne sarà qualcuna che possa scriversi sotto la forma (2)? In altre parole: si potranno trovare δ parametri $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_\delta$, non tutti nulli, e tali che sussistano le $\frac{d(d-1)}{2}$ relazioni

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=\delta} \sigma_i \rho_{hk}^{(i)} = \lambda_h \mu_k - \lambda_k \mu_h,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_d$ e $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_d$ sono due sistemi di quantità, ancora indeterminate?

La questione si presenta in una forma molto semplice, se si ricorre al linguaggio geometrico. Consideriamo infatti le $\rho_{hk}^{(i)}$ come coordinate omogenee di δ punti $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_\delta$ di uno spazio S con

*) Cfr. PICARD-SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, pp. 137-139.

$\frac{d(d-1)}{2} - 1$ dimensioni. Allora il primo membro della (5) ci fornisce (per $h, k = 1, 2, \ldots, d$) le coordinate di un punto generico dello spazio $S_{\delta-1}$ determinato dai punti $A_1, \ldots, A_\delta$. Il secondo membro delle (5) ci dà pure le coordinate di un punto dello spazio ambiente S, ma di un punto particolare, precisamente di un punto costretto a giacere entro alla varietà algebrica V a $2(d-2)$ dimensioni, che rappresenta in S (nel senso di KLEIN) l'insieme delle rette di uno spazio a $d-1$ dimensioni $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$. La questione sopra enunciata si traduce in questa: «Lo spazio $S_{\delta-1}$ e la varietà algebrica V a $2(d-2)$ dimensioni, contenuti entro lo spazio S a $\frac{d(d-1)}{2} - 1$ dimensioni, avranno qualche punto comune?». Certamente se

$$\delta - 1 + 2(d-2) \geqq \frac{d(d-1)}{2} - 1,$$

ossia, tenuto conto della (3), se

$$p_g \leqq 2(d-2).$$

Ricordando ora che il numero d degli integrali semplici, di prima specie, linearmente indipendenti, è uguale *) alla differenza $p_g - p_a$ tra i generi geometrico ed aritmetico della superficie, trascriverò quella condizione così:

(6) $$p_g \geqq 2(p_a + 2).$$

Approfittando dei vari risultati ottenuti, si può dunque enunciare il teorema:

Se tra il genere geometrico ed il genere aritmetico di una superficie passa la disuguaglianza (6), *la superficie contiene un fascio irrazionale di curve,* fascio il cui genere è superiore od uguale a 2.

4. La (6) è verificata certamente se $p_a \leqq -2$, giacchè, per definizione, si ha $p_g \geqq 0$. Si ritrova così il Suo teorema, secondo il quale una superficie con $p_a < -1$ possiede un fascio irrazionale di curve. Ma si può precisar di più il risultato, facendo vedere che queste curve sono razionali, e che quindi **) la superficie può trasformarsi birazionalmente

*) V. la mia Nota dei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences del 23 gennaio 1905, e le dimostrazioni dello stesso teorema date dai sigg. PICARD e SEVERI (Comptes Rendus, 3 aprile 1905).

**) ENRIQUES, Mathem. Annalen, LII (1899), pp. 449-456.

in una rigata. Basta far uso perciò di un ragionamento, di cui il sig. ENRIQUES si è già valso in altra occasione *), e che qui riporto per maggior chiarezza.

Sia $\pi > 0$ (se è possibile) il genere della curva generica del fascio, $\pi' > 0$ il genere del fascio, Δ il numero delle curve del fascio, che posseggono un punto doppio. Allora l'invariante J di ZEUTHEN-SEGRE è espresso dalla formola **)

$$J = \Delta + 4(\pi - 1)(\pi' - 1) - 4.$$

Tenendo conto della relazione di NÖTHER

$$J + p^{(1)} = 12 p_a + 9$$

(dove $p^{(1)}$ è il genere lineare della nostra superficie, che, nelle ipotesi fatte, può supporsi priva di curve eccezionali) ***), quella formola diviene

$$\Delta + 4(\pi - 1)(\pi' - 1) + p^{(1)} = 12 p_a + 13. \tag{7}$$

Ora qui è certo $\Delta \geqq 0$, ed è inoltre $p^{(1)} \geqq 1$, per la ipotesi fatta ****). Il primo membro dunque è maggiore od uguale ad 1; precisamente, perchè risulti uguale ad 1, è necessario che sia $\pi = 1$, oppure $\pi' = 1$. Il secondo membro invece è negativo, se $p_a < -1$. È dunque assurda l'ipotesi che le curve componenti il fascio irrazionale siano irrazionali.

Concludiamo:

Ogni superficie, il cui genere aritmetico sia inferiore a -1, *può trasformarsi birazionalmente in una rigata;* il genere della rigata vale, come è noto, $-p_a$.

5. Ritorniamo alla formola (6). Essa permette di discutere, almeno in parte, anche il caso $p_a = -1$. Vediamo infatti, anzitutto, che, se $p_g \geqq 2$, la superficie contiene un fascio irrazionale di curve, fascio il cui genere è $\geqq 2$, e la cui curva generica è ellittica, in virtù della (7). Dunque: *una superficie, il cui genere numerico valga* -1, *ed il genere geometrico superi* 1, *contiene un fascio di genere* $\geqq 2$ *di curve ellittiche.*

Rimangono da trattare le ipotesi $p_a = -1$, $p_g = 0, 1$. Ma la prima ($p_a = -1$, $p_g = 0$) conduce ad un tipo di superficie dotate di

*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. III, pag. 83.

**) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [Ann. di Mat., s. III, t. VI (1901), pp. 165-225], n° 6, Oss.

***) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, l. c., n° 18.

****) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, l. c., n° 20.

un fascio ellittico di curve, e di un fascio razionale di curve ellittiche, superficie, che vengono accuratamente studiate in un lavoro del sig. ENRIQUES *). La seconda ipotesi invece ($p_a = -1$, $p_g = 1$) conduce a superficie, la cui rappresentazione analitica (mediante funzioni abeliane di due variabili) diede luogo a profonde ricerche dei sigg. NÖTHER, PICARD e PAINLEVÉ **); queste superficie sono rappresentabili, in modo semplice o multiplo, sulle superficie iperellittiche.

Non mi fermo sulla discussione ulteriore, che qui si presenterebbe, giacchè essa verrà condotta a termine dal sig. ENRIQUES ***). Mi limito ad enunciare il seguente teorema, che riassume i principali risultati di questa mia ricerca:

Ogni superficie, il cui genere aritmetico sia negativo, appartiene ad uno dei seguenti tipi:

1) *superficie contenente un fascio irrazionale (di genere* $-p_a$*) di curve razionali; una tal superficie ha* $p_g = 0$, *e può trasformarsi birazionalmente in una rigata;*

2) *superficie contenente un fascio di curve ellittiche* ($p_a = -1$, $p_g \geqq 0$);

3) *superficie iperellittica semplice o multipla* ($p_a = -1$, $p_g = 1$).

Risulterà poi dall'ultimo lavoro citato del sig. ENRIQUES che il fascio, di cui si parla nel caso 2), ha esattamente il genere p_g, e che la relativa superficie contiene un secondo fascio, ellittico, di curve.

Roma, 28 aprile 1905.

G. CASTELNUOVO.

---

*) *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 1-33 (adunanza del 5 marzo 1905)].

**) Si veda, ad es., la Memoria del sig. PAINLEVÉ inserita nel t. XXVII (1903) degli Acta Mathematica.

***) Si veda la Nota: *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse* [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 61-72 (adunanza del 14 maggio 1905)].