Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist.

Von

H. Weber in Königsberg in Pr.

Der Satz, mit dem sich der vorliegende Aufsatz beschäftigt, wurde zuerst von Dirichlet bewiesen auf Grund der Methoden, die bereits früher zum Beweis des analogen Satzes bezüglich der arithmetischen Progressionen geführt hatten, und dieser Beweis findet sich bis zu einem gewissen Punkte ausgeführt in den Monatsberichten der Berliner Academie vom März 1840 und im Crelle'schen Journal Bd. 21 für den besonderen Fall, dass die Determinante der quadratischen Form eine negative Primzahl $-p$ ist, welche abgesehen vom Zeichen die Form $4n+3$ hat, und ausserdem regulär ist. Von diesen Beschränkungen macht man sich leicht frei durch Anwendung des allgemeinen Satzes über Abel'sche Gruppen (§ 1), der zuerst von Schering, später aber, wie unter dem Text näher angeführt, noch von andern auf verschiedenen Wegen bewiesen wurde, auf den ich mich also einfach hätte berufen können. Trotzdem zog ich es vor, des Zusammenhangs und leichteren Verständnisses wegen noch einen möglichst einfachen und auf das Nothwendige beschränkten Beweis dieses wichtigen Satzes, der in den verschiedensten Theilen der Zahlentheorie und Algebra eine so wichtige Rolle spielt, voranzuschicken.

Abgesehen von dieser Erweiterung für beliebige Determinanten ist es aber noch ein anderer Punkt des Beweises, der der Ergänzung bedarf. Es heisst nämlich in dem citirten Aufsatz von Dirichlet: „Untersucht man nun die unter dem Logarithmenzeichen vorkommenden Ausdrücke in dieser Voraussetzung, so findet man durch sehr einfache Betrachtungen, die jedoch hier nicht ausgeführt werden können, dass L_0 unendlich wird, dass hingegen L_t, wenn t nicht den Werth 0 hat, sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert." Dieser Punkt, der gerade den Kern des Beweises bildet, findet sich bei Dirichlet nirgends ausgeführt, und auch die späteren Arbeiten, die diesen Gegenstand betreffen, von Schering (l. c.) und Mertens

(Ueber einige asymptotische Gesetze in der Zahlentheorie. Journ. f. Mathematik Bd. 77) enthalten keine Andeutung darüber. Diese Lücke für negative sowohl als positive Determinanten auszufüllen, und zugleich eine zusammenhängende Darstellung des ganzen Beweisverfahrens zu geben, ist der Zweck der folgenden Arbeit.

Einen auf wesentlich anderer Grundlage ruhenden Beweis des Satzes hat Kronecker angedeutet, der jedoch zur Zeit nur auf negative Determinanten anwendbar erscheint, indem er die Grenzwerthe der sämmtlichen Reihen L direct als Classenzahlen in den Körpern derjenigen algebraischen Zahlen darstellt, die der complexen Multiplication der elliptischen Functionen entstammen, in analoger Weise wie Kummer die entsprechenden Reihen für die arithmetischen Progressionen auf die Classenzahlen in den Kreistheilungskörpern zurückgeführt hat. (Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, October 1857, und Februar 1880.)

§ 1.

Hülfssätze über Gruppen.

Definition. Ein System G von h Elementen irgend welcher Art, $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$ heisst eine *Gruppe vom Grade h*, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

I. Durch irgend eine Vorschrift, welche als Composition oder Multiplication bezeichnet wird, leitet man aus zwei Elementen des Systems ein neues Element desselben Systems her. In Zeichen

$$\Theta_r \Theta_s = \Theta_t .$$

II. Es ist stets

$$(\Theta_r \Theta_s)\Theta_t = \Theta_r(\Theta_s \Theta_t) = \Theta_r \Theta_s \Theta_t .$$

III. Aus $\Theta\Theta_r = \Theta\Theta_s$ und aus $\Theta_r\Theta = \Theta_s\Theta$ folgt $\Theta_r = \Theta_s$.

Aus dieser Definition ergeben sich durch die einfachsten Schlüsse die folgenden Sätze:

1. Es giebt in G ein und *nur* ein Element Θ_0, welches der Bedingung genügt, dass für jedes Element Θ_ι

$$\Theta_\iota \Theta_0 = \Theta_0 \Theta_\iota = \Theta_\iota .$$

Ist nämlich Θ ein beliebiges Element in G, so sind nach III die Elemente

$$\Theta\Theta_1, \ \Theta\Theta_2, \ \cdots, \ \Theta\Theta_h$$

alle von einander verschieden und müssen daher mit der Gesammtheit aller Elemente G identisch sein. Es ist darunter also auch das Element Θ selbst enthalten, und folglich giebt es ein und *nur* ein Element Θ_0, welches der Bedingung $\Theta\Theta_0 = \Theta$ genügt. Hieraus folgt aber, wenn Θ_ι ein beliebiges Element ist, $\Theta_\iota\Theta\Theta_0 = \Theta_\iota\Theta$, oder, da nach III

$\Theta_\iota \Theta$ zugleich mit Θ_ι alle Elemente der Gruppe G durchläuft, für jeden Index ι

(1) $$\Theta_\iota \Theta_0 = \Theta_\iota .$$

Ebenso beweist man die Existenz eines Elementes Θ_0', welches der Bedingung

(2) $$\Theta_0' \Theta_\iota = \Theta_\iota$$

genügt; und wenn man in (1) $\Theta_\iota = \Theta_0'$, in (2) $\Theta_\iota = \Theta_0$ setzt, so folgt

$$\Theta_0' \Theta_0 = \Theta_0 = \Theta_0' .$$

2. Ist von den beiden Elementen Θ, Θ' das eine beliebig gegeben, so lässt sich das andere so bestimmen, dass

$$\Theta \Theta' = \Theta' \Theta = \Theta_0 .$$

Denn ist Θ gegeben, so schliesst man wie in 1., dass in der Reihe $\Theta \Theta_1, \Theta \Theta_2, \cdots, \Theta \Theta_h$ alle Elemente von G, und jedes nur einmal, vorkommen. Es ist daher für *ein bestimmtes* Element Θ'

$$\Theta \Theta' = \Theta_0 .$$

Hieraus aber folgt (mit Rücksicht auf 1.)

$$\Theta' \Theta \Theta' = \Theta' \Theta_0 = \Theta_0 \Theta',$$

also auch. nach III.

$$\Theta' \Theta = \Theta_0 .$$

Das Element Θ_0 soll das *Hauptelement* der Gruppe G genannt und als *Einheit* bezeichnet werden ($\Theta_0 = 1$). Θ' heisst das zu Θ *reciproke* Element ($\Theta' = \Theta^{-1}$). Hieraus erklären sich von selbst die Potenzen Θ^m eines jeden Elementes für positive, negative und verschwindende ganzzahlige Exponenten, für welche die Sätze gelten:

$$\Theta^0 = 1, \quad \Theta^m \Theta^n = \Theta^{m+n} \ (\Theta^m)^n = \Theta^{mn} .$$

Da die Anzahl der Elemente in G eine endliche ist, so muss unter den aufeinanderfolgenden Potenzen eines jeden derselben

$$\Theta^0, \Theta, \Theta^2, \Theta^3, \cdots$$

dasselbe Element nothwendig sich wiederholen. Ist also $\Theta^m = \Theta^n$, so folgt $\Theta^{m-n} = 1$. Ist m der kleinste positive Exponent, für welchen $\Theta^m = 1$ ist, so sind die Elemente

$$1, \Theta, \Theta^2, \cdots, \Theta^{m-1},$$

deren Inbegriff die *Periode* von Θ genannt wird, alle von einander verschieden und es ist dann und *nur* dann $\Theta^\mu = \Theta^{\mu'}$, wenn $\mu \equiv \mu'$ (mod. m), also Θ^μ dann und nur dann $= 1$, wenn μ durch m theilbar ist. Die Zahl m heisst der *Grad* des Elementes Θ. Das Hauptelement $\Theta_0 = 1$ ist das einzige der Gruppe, dessen Grad $= 1$ ist. Für alle andern ist derselbe grösser als 1.

3. Der Grad eines jeden Elementes Θ ist ein Theiler des Grades h der Gruppe.

Der Satz ist richtig für den Fall, dass durch die Periode von Θ

$$(\Theta) \qquad \Theta^0, \Theta^1, \Theta^2, \cdots, \Theta^{m-1}$$

die ganze Gruppe G erschöpft wird. Ist dies nicht der Fall, und Θ_1 ein in (Θ) nicht enthaltenes Element, so sind auch die Elemente

$$(\Theta_1) \qquad \Theta_1\Theta^0, \Theta_1\Theta^1, \Theta_1\Theta^2, \cdots, \Theta_1\Theta^{m-1}$$

sowohl unter einander als von den Elementen (Θ) verschieden. Ist auch hiermit die Gruppe G noch nicht erschöpft und Θ_2 ein in (Θ) und (Θ_1) nicht enthaltenes Element, so sind auch die Elemente

$$(\Theta_2) \qquad \Theta_2\Theta^0, \Theta_2\Theta^1, \Theta_2\Theta^2, \cdots, \Theta_2\Theta^{m-1}$$

sowohl unter einander als von den Elementen (Θ), (Θ_1) verschieden. Auf diese Weise lässt sich fortfahren, bis die ganze Gruppe G in lauter Reihen von je m Elementen zerlegt ist, woraus die Richtigkeit des Satzes erhellt.

Ist m der Grad eines Elementes Θ, und m_1 irgend ein Theiler von m, so existiren in G auch Elemente vom Grade m_1; denn es ist $\Theta^{\frac{m}{m_1}}$ ein solches.

Definition. Die Gruppe G heisst eine *Abel'sche Gruppe*, wenn sie ausser den Bedingungen I, II, III noch der Bedingung genügt:

IV. Für je zwei Elemente Θ_r, Θ_s der Gruppe ist

$$\Theta_r\Theta_s = \Theta_s\Theta_r,$$

woraus sich dann, wie in den Elementen der Arithmetik, der Satz von der unbeschränkten Vertauschbarkeit der Factoren irgend eines Productes von Elementen ergiebt.

Die folgenden Sätze beziehen sich nur auf Abel'sche Gruppen.

4. Ist h der Grad einer Abel'schen Gruppe G und r irgend eine in h aufgehende Primzahl, so giebt es in G Elemente, deren Grad durch r theilbar ist, und folglich (nach 3.) auch Elemente, deren Grad $= r$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen, seien $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$ die sämmtlichen Elemente von G, und $m_1, m_2, \cdots, m_h$ ihre Grade. In der Form

$$(3) \qquad \Theta = \Theta_1^{\mu_1}\Theta_2^{\mu_2}\cdots\Theta_h^{\mu_h},$$

worin die Exponenten $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$ vollständige Restsysteme nach den Moduln $m_1, m_2, \cdots, m_h$ durchlaufen, ist dann sicher jedes Element von G enthalten, und man sieht auch leicht, dass jedes Element gleich oft, etwa $n$mal in dieser Form darstellbar ist; denn man erhält aus *einer* Darstellung eines beliebigen Elementes Θ in der Form (3) alle übrigen durch Multiplication mit den sämmtlichen Darstellungen des Hauptelementes „1". Die Gesammtzahl aller Darstellungen der Form (3) ist aber das Product $m_1 m_2 \cdots m_h$, und mithin ist

$$m_1 m_2 \cdots m_h = nh.$$

Ist also r eine in h aufgehende Primzahl, so muss mindestens einer der Factoren $m_1, m_2, \cdots, m_h$ durch r theilbar sein; w. z. b. w.

5. Der Grad eines Productes von Elementen $\Theta_1, \Theta_2, \cdots$ einer Abel'schen Gruppe ist stets ein Theiler des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Grade von $\Theta_1, \Theta_2, \cdots$; denn ist m dies kleinste gemeinschaftliche Vielfache, so ist

$$\left(\Theta_1 \Theta_2 \cdots\right)^m = \Theta_1^m \Theta_2^m \cdots = 1.$$

6. Ist $h = ab$, und a, b relativ prim, so giebt es in G genau a Elemente A, deren Grad ein Theiler von a, und b Elemente B, deren Grad ein Theiler von b ist, und in der Form AB sind sämmtliche Elemente von G, und jedes nur einmal, enthalten.

Beweis. Der Inbegriff $\mathfrak{A}$ aller Elemente A bildet wegen 5. eine Abel'sche Gruppe; ebenso der Inbegriff $\mathfrak{B}$ aller Elemente B. Sind a', b' die Grade dieser Gruppen, so ist a' relativ prim zu b, und b' zu a; denn ist r eine in a' und b aufgehende Primzahl, so giebt es nach 4. in $\mathfrak{A}$ Elemente vom Grade r, was der Definition von $\mathfrak{A}$ widerspricht.

Bestimmt man nun die ganzen Zahlen x, y so, dass

$$ax + by = 1$$

wird, so ist für ein beliebiges Element Θ

$$\Theta = \Theta^{ax}\Theta^{by} = BA,$$

da Θ^{ax} in $\mathfrak{B}$, Θ^{by} in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Es lässt sich also jedes Element Θ in der Form AB darstellen. Eine solche Darstellung ist aber auch nur auf eine Art möglich, denn aus $AB = A'B'$ folgt, indem man zur Potenz by erhebt, $A = A'$ und mithin auch $B = B'$. Demnach ist

$$h = ab = a'b',$$

und folglich da a mit b' und b mit a' keinen Theiler gemein hat:

$$a = a', \quad b = b', \qquad \text{w. z. b. w.}$$

7. Ist der Grad h einer Abel'schen Gruppe $\mathfrak{P}$ eine Potenz einer Primzahl p, und mithin auch der Grad eines jeden Elementes von $\mathfrak{P}$ eine Potenz von p, so kann man in $\mathfrak{P}$ die Elemente $P_1, P_2, P_3, \cdots$ von den Graden $p_1, p_2, p_3, \cdots$ so auswählen, dass in der Form

$$P = P_1^{\nu_1} P_2^{\nu_2} P_3^{\nu_3} \cdots \tag{4}$$

jedes Element von $\mathfrak{P}$ enthalten ist, und nur ein einziges mal, wenn $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ je einem vollständigen Restsystem nach den Moduln $p_1, p_2, p_3, \cdots$ entnommen werden.

Beweis. Man wähle aus $\mathfrak{P}$ die Elemente $P_1, P_2, P_3, \cdots$ von den Graden $p_1, p_2, p_3, \cdots$ so aus, dass in der Form

$$P = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} P_3^{\mu_3} \cdots \tag{5}$$

jedes Element von $\mathfrak{P}$ *mindestens* einmal enthalten ist. Dies ist stets möglich, da man nöthigenfalls für $P_1, P_2, P_3, \cdots$ selbst alle Elemente von $\mathfrak{P}$ mit Ausnahme des Hauptelementes nehmen kann.

Wie in 4. schliesst man, dass die Anzahl der Darstellungen in der Form (5) für alle Elemente gleich und so gross als die Anzahl der Darstellungen des Elementes „1" in der Form (5) ist. Sei s diese Zahl, dann ist

$$hs = p_1 p_2 p_3 \cdots$$

Es sei nun

$$1 = P_1^{n_1} P_2^{n_2} P_3^{n_3} \cdots$$

irgend eine Darstellung des Hauptelements in der Form (5), in welcher nicht alle Exponenten, auf ihre kleinsten Reste nach den Moduln $p_1, p_2, p_3, \cdots$ reducirt, verschwinden; ferner sei

$$n_1 = \pi_1 a_1, \quad n_2 = \pi_2 a_2, \quad n_3 = \pi_3 a_3, \cdots$$

worin $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots$ Potenzen von p, $a_1, a_2, a_3, \cdots$ durch p nicht theilbar sind. Endlich ordne man die Indices so an, dass die Exponenten der höchsten Potenzen von p, welche in $n_1, n_2, n_3, \cdots$ aufgehen, nicht abnehmen. Es ist dann sicher $0 < \pi_1 < p_1$ und $\pi_2, \pi_3, \cdots$ durch π_1 theilbar. Setzt man nun

$$P_1' = P_1^{a_1} P_2^{\frac{\pi_2}{\pi_1} a_2} P_3^{\frac{\pi_3}{\pi_1} a_3} \cdots,$$

so ist $P_1'^{\pi_1} = 1$ und also der Grad p_1' von P_1' niedriger als der von P_1. Andererseits ist auch, da a_1 relativ prim zu p_1 ist, P_1 selbst und mithin jedes Element von $\mathfrak{P}$ durch die Potenzen von $P_1', P_2, P_3, \cdots$ darstellbar in der Form

$$P = P_1'^{\mu_1'} P_2^{\mu_2} P_3^{\mu_3} \cdots,$$

und die Anzahl dieser Darstellungen ist

$$s' = \frac{p_1' p_2 p_3 \cdots}{h} < s.$$

Indem man auf diese Weise fortfährt, die Anzahl der Darstellungen zu verkleinern, gelangt man schliesslich dazu, an Stelle der Elemente $P_1, P_2, P_3, \cdots$ eine Reihe von Elementen $P_1', P_2' P_3' \cdots$ zu setzen von der Art, dass in der Form

$$P = P_1'^{\nu_1} P_2'^{\nu_2} P_3'^{\nu_3} \cdots$$

jedes Element von $\mathfrak{P}$ und jedes nur einmal enthalten ist. Das aber ist der zu beweisende Satz.

8. Aus 6. und 7. ergiebt sich nun ohne Weiteres der *Hauptsatz*.

In einer Abel'schen Gruppe G vom Grade h kann man stets die Elemente $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ von den Graden $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ so auswählen, dass in der Form

$$\Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$$

jedes Element Θ *von* G *und jedes nur einmal enthalten ist, wenn* $s_1, s_2, \cdots, s_\nu$ *je einem vollständigen Restsystem nach den Moduln* $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ *entnommen werden.*

Zugleich ergiebt sich

$$h = n_1 n_2 \cdots n_\nu{}^{*)}.$$

Ein solches System von Elementen, wie $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ wollen wir eine *Basis* der Gruppe nennen.

9. Ordnet man den ν Elementen $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ einer solchen Basis ν Einheitswurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ von den Graden $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ zu, so entspricht auch jedem Element $\Theta = \Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$ der Gruppe eine bestimmte h^{te} Einheitswurzel ω nach der Vorschrift

$$\omega = \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \cdots \omega_\nu^{s_\nu}. \tag{6}$$

Wir bezeichnen diese Einheitswurzel mit $\chi(\Theta)$, und nennen dieselbe den *Charakter* des Elementes Θ.**) Derselbe genügt stets der Bedingung

$$\chi(\Theta)\,\chi(\Theta') = \chi(\Theta\Theta'). \tag{7}$$

Da man jeder der Einheitswurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ ihre $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ verschiedenen Werthe beilegen kann, so erhält man $n_1 n_2 \cdots n_\nu = h$ solcher Charaktere $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu$. Ist umgekehrt $\chi(\Theta)$ eine durch das Element Θ eindeutig bestimmte Function, welche der Bedingung (7) genügt, so ist dieselbe nothwendig unter diesen h Charakteren enthalten. Denn aus (7) folgt zunächst, wenn man für Θ' das Hauptelement Θ_0 setzt

$$\chi(\Theta_0) = 1.$$

Da sich ferner aus (7) ergiebt:

$$(\chi(\Theta))^n = \chi(\Theta^n)$$

so folgt, wenn n der Grad von Θ ist, dass $\chi(\Theta)$ eine n^{te} Einheitswurzel sein muss. Ist daher $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ eine Basis der Gruppe G, so schliesst man hieraus, dass

$$\chi(\Theta_1) = \omega_1,\ \chi(\Theta_2) = \omega_2,\ \cdots,\ \chi(\Theta_\nu) = \omega_\nu$$

---

*) Aus unserer Ableitung dieses Satzes geht hervor, dass man die Elemente $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ so annehmen kann, dass ihre Grade $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ Primzahlpotenzen sind; man kann aber auch mehrere dieser Elemente, deren Grade relativ prim sind, zu einem zusammenfassen, und auf diese Weise z. B. erreichen, dass von den Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ jede durch die folgende theilbar ist. Man vergl. über diesen Satz: Schering „die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen". Abhandlungen der Ges. d. Wissensch. zu Göttingen Bd. 14. 1868. Kronecker, Monatsbericht der Berliner Academie vom 1. December 1870. Frobenius und Stickelberger „Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen" Journal f. Mathematik Bd. 86. 1878.

**) Vergl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind 3. Auflage Ste. 581. Ich werde in der Folge dieses Werk mit D citiren.

Einheitswurzeln der Grade $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ sind, und, wenn

$$\Theta = \Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$$

ist:

$$\chi(\Theta) = \omega = \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \cdots \omega_\nu^{s_\nu} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

10. Aus der Definition der Charaktere ergiebt sich sofort, dass wenn χ_1, χ_2 irgend zwei derselben sind, ein durch diese vollkommen bestimmter Charakter χ_3 existirt, so dass für jedes Element Θ

$$(8) \qquad \chi_1(\Theta)\, \chi_2(\Theta) = \chi_3(\Theta)$$

ist. Den auf diese Weise bestimmten Charakter χ_3 kann man passend als das Product der beiden Charaktere χ_1, χ_2 bezeichnen, und es ergiebt sich daraus, dass die h Charaktere selbst wieder eine Abel'sche Gruppe bilden. Das Hauptelement χ_0 dieser Gruppe ist derjenige Charakter, welcher für *alle* Elemente Θ den Werth $+1$ besitzt, den wir den *Hauptcharakter* nennen. *Entgegengesetzte Charaktere* χ, χ^{-1} sind solche, deren Product der Hauptcharakter ist, deren einer daher für jedes Element Θ der reciproke Werth des andern ist.

Um die Gruppe der Charaktere nach dem Satz (8) darzustellen, bezeichne man mit χ_1 denjenigen Charakter, den man erhält, wenn man für ω_1 eine *primitive* n^{te} Einheitswurzel und für $\omega_2, \cdots, \omega_\nu$ die positive Einheit setzt. Entsprechende Bedeutung gebe man den Charakteren $\chi_2, \cdots, \chi_\nu$. Dann ist jeder Charakter χ in der Form darstellbar:

$$(9) \qquad \chi = \chi_1^{t_1} \chi_2^{t_2} \cdots \chi_\nu^{t_\nu}$$

wenn $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$ vollständige Restsysteme nach den Moduln $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ durchlaufen. Die Grade der Elemente $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu$ (in der Gruppe der Charaktere) sind $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$.

11. Aus der Definition der Charaktere ergeben sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Einheitswurzeln leicht die beiden Sätze:

Für jeden Charakter χ ist

$$(10) \qquad \chi(\Theta_1) + \chi(\Theta_2) + \cdots + \chi(\Theta_h) = 0,$$

ausgenommen für den Hauptcharakter χ_0, für welchen

$$(11) \qquad \chi_0(\Theta_1) + \chi_0(\Theta_2) + \cdots + \chi_0(\Theta_h) = h.$$

Für jedes Element Θ ist:

$$(12) \qquad \chi_1(\Theta) + \chi_2(\Theta) + \cdots + \chi_h(\Theta) = 0,$$

ausgenommen für das Hauptelement Θ_0, für welches

$$(13) \qquad \chi_1(\Theta_0) + \chi_2(\Theta_0) + \cdots + \chi_h(\Theta_0) = h.$$

12. Diejenigen Elemente der Gruppe G, welche der Bedingung $\Theta = \Theta^{-1}$ oder $\Theta^2 = 1$ genügen, zu denen auch das Hauptelement

gehört, heissen *ambige Elemente*. Soll das Element $\Theta = \Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$ zu den ambigen gehören, so ist erforderlich und hinreichend, dass

$$2s_1 \equiv 0 \text{ (mod. } n_1), \; 2s_2 \equiv 0 \text{ (mod. } n_2), \cdots, 2s_\nu \equiv \text{ (mod. } n_\nu).$$

Nehmen wir also an, es seien $n_1, n_2, \cdots, n_{\lambda-1}$ gerade, $n_\lambda, \cdots, n_\nu$ ungerade, so sind die ambigen Elemente alle in der Form enthalten

$$\Theta_1^{\frac{n_1 \pm n_1}{4}} \Theta_2^{\frac{n_2 \pm n_2}{4}} \cdots \Theta_{\lambda-1}^{\frac{n_{\lambda-1} \pm n_{\lambda-1}}{4}}$$

und die Anzahl derselben ist also $2^{\lambda-1}$. Die Charaktere eines ambigen Elementes sind sämmtlich $= +1$.

Ebenso nennen wir *ambige Charaktere* diejenigen, welche mit ihren entgegengesetzten identisch sind, und die also für jedes Element den Werth $+1$ haben. Die ambigen Charaktere sind nach (9) in der Form darstellbar

$$\chi_1^{\frac{n_1 \pm n_1}{4}} \chi_2^{\frac{n_2 \pm n_2}{4}} \cdots \chi_{\lambda-1}^{\frac{n_{\lambda-1} \pm n_{\lambda-1}}{4}}$$

und ihre Anzahl ist daher ebenfalls $2^{\lambda-1}$. Zugleich erhellt hieraus, dass für einen ambigen Charakter χ

$$\chi(\Theta_\lambda) = \cdots = \chi(\Theta_\nu) = +1$$

ist.

Auf den ambigen Charakteren beruht die Eintheilung der Gruppe G in *Geschlechter*, indem man alle solche Elemente Θ in ein Geschlecht vereinigt, für welche die ambigen Charaktere dasselbe Werthsystem haben. Man erhält die sämmtlichen Elemente eines Geschlechts, wenn man in

$$\Theta_1^{2s_1+\varepsilon_1} \Theta_2^{2s_2+\varepsilon_2} \cdots \Theta_{\lambda-1}^{2s_{\lambda-1}+\varepsilon_{\lambda-1}} \Theta_\lambda^{s_\lambda} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$$

für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{\lambda-1}$ eine bestimmte Combination der Zahlen 0, 1 setzt, und $s_1, s_2, \cdots, s_{\lambda-1}, s_\lambda \cdots s_\nu$ je ein vollständiges Restsystem nach den Moduln $\frac{1}{2} n_1, \frac{1}{2} n_2, \cdots, \frac{1}{2} n_{\lambda-1}, n_\lambda, \cdots, n_\nu$ durchlaufen lässt. Die Anzahl der verschiedenen Geschlechter ist also $2^{\lambda-1}$, und in jedem derselben sind $2^{1-\lambda} h$ Elemente enthalten. Das aus der Combination $\varepsilon_1 = 0, \; \varepsilon_2 = 0, \cdots, \varepsilon_{\lambda-1} = 0$ hervorgehende Geschlecht heisst das *Hauptgeschlecht*. Die Elemente des Hauptgeschlechts bilden für sich eine Abel'sche Gruppe vom Grade $2^{1-\lambda} h$.

Man kann auch die Geschlechter unter sich wieder zusammensetzen und erhält so eine Abel'sche Gruppe vom Grade $2^{\lambda-1}$, welche aus lauter ambigen Elementen besteht.

§ 2.

Die Classen quadratischer Formen einer bestimmten Determinante D.

1. Wir betrachten nun die h Classen eigentlich primitiver quadratischer Formen einer bestimmten nicht quadratischen Determinante D, $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$, und beschränken uns im Falle einer negativen Determinante ein für allemal auf die Betrachtung solcher Classen, welche nur positive Formen enthalten. Diese Classen, als Elemente betrachtet, bilden, wenn man sie nach den Gauss'schen Gesetzen der Composition zusammensetzt, eine Abel'sche Gruppe vom Grade h (D. § 147.).

Eine positive Zahl m, relativ prim zu $2D$, ist bekanntlich dann und nur dann durch Formen der Determinante D eigentlich darstellbar, wenn D quadratischer Rest von m ist, und zu jeder Wurzel n der Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } m) \tag{1}$$

gehört eine gewisse Gruppe*) solcher Darstellungen durch die Formen einer Classe, welche durch die Form

$$\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$$

vertreten werden kann. (D. § 86.)

Ist zunächst f eine nicht in $2D$ aufgehende Primzahl, von welcher D quadratischer Rest ist, so entsprechen den beiden Wurzeln der Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } f)$$

zwei Gruppen von Darstellungen, welche in zwei entgegengesetzte Classen Θ, Θ^{-1} gehören. (Ist Θ eine ambige Classe, so sind beide Classen identisch).

Zu irgend einer Potenz von f, f^r gehören ebenfalls zwei Gruppen von Darstellungen, und zwar durch Formen der beiden Classen $\Theta^{\pm r}$.

Sind $f_1, f_2, \cdots, f_\mu$ ebensolche Primzahlen wie f, und $\Theta_1^{\pm 1}, \Theta_2^{\pm 1}, \cdots, \Theta_\mu^{\pm 1}$ die dieselben darstellenden Formenclassen, so giebt es für

$$m = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_\mu^{r_\mu}$$

genau 2^μ Gruppen von Darstellungen, die man auf folgende Weise erhält:

Es seien $\pm n_1, \pm n_2, \pm \cdots \pm n_\mu$ die Wurzeln der Congruenzen

$$x_1^2 \equiv D (\text{mod. } f_1^{r_1}), \quad x^2 \equiv D (\text{mod. } f_2^{r_2}) \cdots x^2 \equiv D (\text{mod. } f_\mu^{r_\mu}).$$

Die 2^μ Wurzeln der Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } m)$$

findet man dann aus den linearen Congruenzen

*) Das Wort Gruppe hat hier natürlich einen andern Sinn als in § 1.

$$n \equiv \varepsilon_1 n_1 (\text{mod.}\, f_1^{r_1}) \equiv \varepsilon_2 n_2 (\text{mod.}\, f_2^{r_2}) \equiv \cdots \equiv \varepsilon_\mu n_\mu (\text{mod.}\, f_\mu^{r_\mu}),$$
$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \cdots \varepsilon_\mu = \pm 1$$

und die zu n gehörige Gruppe von Darstellungen kann durch die Form stattfinden:

$$\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right),$$

welche zusammengesetzt ist aus den Formen

$$\left(f_1^{r_1}, \varepsilon_1 n_1, \frac{n_1^2 - D}{f_1^{r_1}}\right), \quad \left(f_2^{r_2}, \varepsilon_2 n_2, \frac{n_2^2 - D}{f_2^{r_2}}\right), \cdots \left(f_\mu^{r_\mu}, \varepsilon_\mu n_\mu, \frac{n_\mu^2 - D}{f_\mu^{r_\mu}}\right)$$

und also in die Classe

$$\Theta_1^{\varepsilon_1 r_1} \Theta_2^{\varepsilon_2 r_2} \cdots \Theta_\mu^{\varepsilon_\mu r_\mu}$$

gehört.

2. Bezeichnen wir jetzt mit $q, q', q'' \cdots$ die sämmtlichen in D aufgehenden von einander verschiedenen ungeraden Primzahlen, so haben die Gauss'schen Charaktere, deren Anzahl λ sei, nämlich die Symbole:

$$\left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \text{ wenn } D \equiv 1 \text{ (mod. 4)},$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad \text{,,} \quad D \equiv 3 \text{ (mod. 4)},$$

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad \text{,,} \quad D \equiv 2 \text{ (mod. 8)},$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad \text{,,} \quad D \equiv 6 \text{ (mod. 8)},$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad \text{,,} \quad D \equiv 4 \text{ (mod. 8)},$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad \text{,,} \quad D \equiv 0 \text{ (mod. 8)}$$

für alle solche Zahlen m, welche durch eine und dieselbe Formenclasse Θ darstellbar sind, dieselben Werthe. Irgend eines der 2^λ Producte aus mehreren von ihnen (das Product 1 mitgerechnet) hat daher einen nur von der Formenclasse Θ abhängigen Werth und kann also mit $\varphi(\Theta)$ bezeichnet werden. Unter den Functionen $\varphi(\Theta)$ giebt es zwei und *nur* zwei, welche für alle Formenclassen Θ den Werth $+1$ haben (D. § 123 ff.) und daher sind auch immer je zwei und *nur* je zwei von den Functionen $\varphi(\Theta)$ für alle Formenclassen Θ identisch. Behält man von einem solchen Paar nur die eine Function bei, so bleiben $2^{\lambda-1}$ derselben, von denen irgend zwei gewiss für wenigstens eine der Formenclassen Θ verschiedene Werthe haben. Nun genügen aber die Functionen φ der Bedingung

$$\varphi(\Theta)\,\varphi(\Theta') = \varphi(\Theta\Theta');$$

denn wählt man, was stets möglich ist, die durch die Classen Θ, Θ' darstellbaren Zahlen m, m', so dass sie relativ prim zu einander sind, so ist das Product mm' durch die Classe $\Theta\Theta'$ darstellbar.

Daraus folgt aber nach § 1., 9. dass die Functionen $\varphi(\Theta)$ alle unter den dort erklärten Charakteren $\chi(\Theta)$ enthalten sein müssen, und da ihre Werthe sämmtlich ± 1 sind, so gehören dieselben zu den *ambigen Charakteren.*

Nun ist die Zahl der ambigen Formenclassen nach Gauss (Disq. Ar. Art. 257., D § 153.) $2^{\lambda-1}$, und daher hat λ hier genau dieselbe Bedeutung wie in § 1., 12. Die Anzahl der von einander verschiedenen Functionen $\varphi(\Theta)$ ist also genau so gross, wie die Anzahl der ambigen Charaktere $\chi(\Theta)$, und daher muss jede der Functionen $\varphi(\Theta)$ mit einem der ambigen Charaktere $\chi(\Theta)$ identisch sein und umgekehrt. Wenn also m wie oben irgend eine durch die Formen der Classe Θ eigentlich darstellbare zu $2D$ theilerfremde positive Zahl bedeutet, so kann man für jeden ambigen Charakter χ die positiven oder negativen Einheiten δ, ε und einen positiven Divisor Q von D so bestimmen, dass

$$\chi(\Theta) = \delta^{\frac{m-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{Q}\right) \tag{2}$$

wird, wobei ε nur für eine gerade Determinante den Werth -1 haben kann. Nach dem Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste lässt sich aber der Ausdruck (2) stets in eine der vier Formen setzen

$$\left(\frac{\pm Q}{m}\right),\quad \left(\frac{\pm 2Q}{m}\right)$$

und zwar so, dass die beiden letzten Formen nur bei gerader Determinante D vorkommen. Man kann daher die Determinante D stets so in zwei (positive oder negative) Factoren $D_1 D_2$ zerlegen, dass

$$\chi(\Theta) = \left(\frac{D_1}{m}\right) = \left(\frac{D_2}{m}\right) \tag{3}$$

wird.

3) Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl m, die sich in einer Gruppe finden, ist so gross wie die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1.$$

Damit man nun auch bei positiven Determinanten nicht unendlich viele solche Darstellungen erhält, müssen die darstellenden Zahlen x, y gewissen Bedingungen unterworfen werden, durch die aus jeder Gruppe von Darstellungen eine einzige isolirt wird. Wir ertheilen den unbestimmten ganzen Zahlen x, y in einer der zur Determinante D gehörigen eigentlich primitiven Formen

$$\psi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

in der wir überdies a als *positiv* voraussetzen können, alle möglichen Werthe, welche

1⁰ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben,

2⁰ der Form $\psi(x, y)$ einen positiven zu $2D$ theilerfremden Werth verschaffen,

3⁰ im Falle *positiver Determinanten* den Bedingungen genügen

$$y \overline{\gtrless} 0, \quad x > \frac{T - bU}{aU} y = \gamma y,$$

wenn T, U die kleinsten positiven Lösungen der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

sind. Setzt man in diesem Falle

$$\psi(x, y) = a(x - \alpha y)(x - \beta y),$$

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{a},$$

so ist

$$\alpha < \beta < \gamma$$

und folglich $\psi(x, y)$ von selbst positiv.

Nach diesen Festsetzungen enthält jede Gruppe noch $\varkappa$ Darstellungen, wenn

$\varkappa = 1$ für positive Determinanten,

$\varkappa = 4$ für $D = -1$,

$\varkappa = 2$ für die übrigen negativen Determinanten (D. § 87., 88).

4. Es sei nun

$$\psi_1(x, y), \quad \psi_2(x, y), \cdots \psi_h(x, y)$$

ein vollständiges Repräsentantensystem der h zur Determinante D gehörigen eigentlich primitiven Formenclassen

$$\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$$

und wir betrachten, wenn χ einen beliebigen der h Charaktere bedeutet, die Summe:

$$L' = \chi(\Theta_1)\, \Sigma' \psi_1^{-s} + \chi(\Theta_2) \Sigma' \psi_2^{-s} + \cdots + \chi(\Theta_h)\, \Sigma' \psi_h^{-s},$$

in welcher die Summen Σ' sich auf sämmtliche den Bedingungen 1⁰, 2⁰, 3⁰ genügenden Werthe der ganzen Zahlen x, y erstrecken. Für jeden Werth des Exponenten s, der > 1 ist, hat diese Summe einen bestimmten, von der Anordnung der Glieder unabhängigen Werth.

Bedeutet m wie oben jede zu $2D$ theilerfremde positive ganze Zahl, von welcher D quadratischer Rest ist, so kann man die Glieder der Summe L' zu Partialsummen von der Form zusammenfassen

$$\varkappa m^{-s} \Sigma \chi(\Theta),$$

worin sich die Summe Σ auf alle diejenigen (gleichen oder verschiedenen) Formenclassen Θ erstreckt, denen (nach 1.) eine Gruppe von Darstellungen der Zahl m entspricht.

Ist andererseits f eine der in den Zahlen m aufgehenden Primzahlen, welche (nach 1.) durch die Formenclassen $\Theta^{\pm 1}$ darstellbar ist, so ergiebt sich durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von f^{-s}

$$\frac{1-f^{-2s}}{(1-f^{-s}\chi(\Theta))\,(1-f^{-s}(\chi(\Theta^{-1}))}$$
$$=1+f^{-s}\big(\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})\big)+f^{-2s}\big(\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})\big)+\cdots.$$

Bildet man das mit Π zu bezeichnende Product dieses Ausdrucks über sämmtliche Primzahlen f, so erhält man durch Ausmultipliciren der Reihen auf der rechten Seite eine Reihe, welche die sämmtlichen Glieder $m^{-s}\Sigma\chi(\Theta)$ umfasst. Daraus folgt also

$$L' = \varkappa \prod \frac{1-f^{-2s}}{(1-\chi(\Theta)f^{-s})\,(1-\chi(\Theta^{-s})\,f^{-s})}.$$

Bezeichnet man mit g alle diejenigen in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen, von denen D quadratischer Nichtrest ist, mit n alle positiven zu $2D$ theilerfremden Zahlen, so ist bekanntlich

$$\prod \frac{1}{1-g^{-2s}} \prod \frac{1}{1-f^{-2s}} = \sum \frac{1}{n^{2s}}$$

und hiernach lässt sich die vorhergehende Formel folgendermassen darstellen:

$$\text{(I)} \qquad \varkappa \prod \frac{1}{1-g^{-2s}} \prod \frac{1}{(1-\chi(\Theta)\,f^{-s})\,(1-\chi(\Theta^{-1})f^{-s})}$$
$$=\chi(\Theta_1)\,\Sigma\psi_1^{-s}+\chi(\Theta_2)\,\Sigma\psi_2^{-s}+\cdots+\chi(\Theta_h)\,\Sigma\psi_h^{-s}=L,$$

worin sich nunmehr die Summen Σ auf der rechten Seite auf alle den Bedingungen 2^0, 3^0 genügenden Zahlen x, y erstrecken, also auch auf solche Combinationen dieser Zahlen, die einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Aus dieser Formel leiten wir noch eine zweite ab durch Entwicklung ihres Logarithmus mit Benutzung der Gleichung

$$-\log(1-\chi(\Theta)\,f^{-s}) = \frac{\chi(\Theta)}{f^s}+\frac{1}{2}\,\frac{\chi(\Theta^2)}{f^{2s}}+\frac{1}{3}\,\frac{\chi(\Theta^3)}{f^{3s}}+\cdots$$

Man erhält, wenn man zur Abkürzung

$$\varkappa \prod \frac{1}{1-g^{-2s}} = G$$

setzt:

$$\text{(II)} \sum \frac{\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})}{f^s} + \frac{1}{2} \sum \frac{\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})}{f^{2s}} + \frac{1}{3} \sum \frac{\chi(\Theta^3)+\chi(\Theta^{-3})}{f^{3s}} + \cdots = -\log G + \log L,$$

worin sich die Summen links auf sämmtliche Primzahlen f erstrecken.

Jede der Formeln (I), (II) repräsentirt h verschiedene Formeln, entsprechend den h verschiedenen Charakteren $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h$. Bezeichnet man dem entsprechend die h Summen L mit $L' L'', \cdots, L^{(h)}$, so ergiebt die Addition der sämmtlichen Formeln (II) mit Rücksicht auf § 1., 11):

$$\text{(III)} \qquad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{f^{2s}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{f^{3s}} + \cdots$$
$$= -\frac{1}{2} \log G + \frac{1}{2h} (\log L' + \log L'' + \cdots + \log L^{(h)}),$$

worin auf der linken Seite die erste, zweite, dritte u. s. w. Summe sich auf diejenigen Primzahlen f erstreckt, deren erste, zweite, dritte u. s. w. Potenzen durch die *Hauptclasse* der Determinante D darstellbar sind. Multiplicirt man dagegen die Gleichung (II) mit dem Charakter $\chi(\Theta_\varkappa)$ einer beliebigen von der Hauptclasse verschiedenen Classe $\Theta_\varkappa$ und bildet wieder die Summe aller Formeln (II), so erhält man in gleicher Weise:

$$\text{(IV)} \qquad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{f^{2s}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{f^{3s}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{\varepsilon h} \left(\chi_1(\Theta_\varkappa)\, L' + \chi_2(\Theta_\varkappa)\, L'' + \cdots + \chi_h(\Theta_\varkappa)\, L^{(h)}\right),$$

worin sich die erste, zweite, dritte u. s. w. Summe auf der linken Seite auf diejenigen Primzahlen bezieht, deren erste, zweite, dritte u. s. w. Potenzen durch die Formen der Classe $\Theta_\varkappa$ darstellbar sind, und $\varepsilon = 2$ oder $= 1$ ist, jenachem Θ zu den ambigen Classen gehört oder nicht.

Der zu führende Beweis wird also erbracht sein, wenn gezeigt ist, dass die erste Summe auf der linken Seite der Gleichungen (III), (IV) unendlich viele Glieder enthält, und dies folgt, wenn nachgewiesen ist, dass diese Summe für $s = 1$ einen unendlichen Grenzwerth hat.

§ 3.

Der Kern des Beweises.

Die Summen $L', L'', \cdots L^{(h)}$, welche in den Formeln (III), (IV) des vorigen Paragraphen vorkommen, zerfallen in drei Arten, nämlich

1⁰ die eine Reihe L_0, welche aus (I) hervorgeht, wenn χ der *Hauptcharakter* ist, 2⁰ Die Reihen L_1, welche aus (I) entstehen, wenn χ einen der vom Hauptcharakter verschiedenen ambigen Charaktere bedeutet,

3⁰ die Reihen L_2, welche den übrigen Charakteren entsprechen, in welchen also die Functionen $\chi(\Theta_1)$, $\chi(\Theta_2)$, $\cdots \chi(\Theta_h)$ gewiss wenigstens zum Theil imaginär sind.

Jede dieser letzteren Reihen kommt in den Formeln (III), (IV) zweimal vor, da, wie die Formel (I) lehrt, zweien entgegengesetzten Charakteren derselbe, und zwar *reelle*, Werth der Summe L entspricht.

Es handelt sich nun um die Untersuchung der Grenzwerthe, welchen sich diese drei Arten von Reihen für $s = 1$ nähern.

Aus der Theorie der quadratischen Formen ist bekannt, dass die in den L vorkommenden Summen $\Sigma\psi^{-s}$ die Eigenschaft haben, dass

$$(s-1)\,\Sigma\psi^{-s}$$

für $s = 1$ sich einem endlichen, nur von der Determinante D abhängigen Grenzwerth g nähert*).

1. Hieraus ergiebt sich zunächst für die Reihe L_0, wenn man

$$s = 1 + \varrho$$

setzt.

(V)
$$\lim_{\varrho=0} \varrho L_0 = hg,$$

d. h. die Reihe L_0 wird für $\varrho = 0$ unendlich gross wie $\frac{gh}{\varrho}$.

2. Die Untersuchung der Grenzwerthe der Reihen L_1, L_2 beruht auf einem Fundamentalsatze der Differentialrechnung, dessen Beweis ich hier, da es auf eine genaue Festsetzung des Gültigkeitsbereichs wesentlich ankommt, kurz reproduciren will**).

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall

(1)
$$a \leqq x < b$$

stetige Function von x, und es sei ferner für *jedes* x in dem Intervall

(2)
$$a < x < b$$

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x)$$

ein bestimmter endlicher Werth.

---

*) Vgl. D. § 95., 98. Der Werth von g ist für negative Determinanten $\frac{\pi\varphi(-2D)}{-2D\sqrt{-D}}$ für positive Determinanten

$$\frac{\varphi(2D)}{4D\sqrt{D}} \log(T+U\sqrt{D}) = \frac{\varphi(2D)}{2D\sqrt{D}} \log\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}.$$

Es ergeben sich diese Resultate auch aus den unten folgenden Betrachtungen.

**) Man vgl. den Beweis von O. Bonnet in Serret, Cours de calcul différential et intégral T. I, p. 15, auch Harnack, die Elemente der Differential- und Integralrechnung § 37.

Ist nun x_1 irgend ein Werth von x im Intervall (2) so ist nach Voraussetzung

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = A$$

ein endlicher Werth. Setzt man also

$$\varphi(x) = \big(f(x) - Ax\big) - \big(f(a) - Aa\big),$$

so ist $\varphi(x)$ stetig in dem Intervall

(3) $$a \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} x_1$$

und es ist ausserdem $\varphi(a) = \varphi(x_1) = 0$. Ist daher $\varphi(x)$ nicht constant $= 0$, so giebt es in dem Intervall

(4) $$a < x' < x_1$$

einen Werth x', für welchen $\varphi(x')$ einen positiven Maximumwerth oder einen negativen Minimumwerth erhält. Daraus folgt, dass in allen Fällen (auch für ein constantes $\varphi(x)$) die beiden Ausdrücke

$$\frac{\varphi(x'+h) - \varphi(x')}{h}, \qquad \frac{\varphi(x'-h) - \varphi(x')}{-h}$$

für ein hinlänglich kleines h niemals dasselbe Vorzeichen haben können. Da sie aber nach Voraussetzung für $h = 0$ beide denselben Grenzwerth $f'(x') - A$ besitzen, so folgt, dass dieser verschwinden muss. Ersetzt man also A wieder durch seinen Werth, so folgt hieraus

$$f(x_1) = f(a) + (x_1 - a) f'(x'), \qquad a < x' < x_1.$$

Ueber das Verhalten von $f'(x)$ für $x = a$ ist hierbei keine Voraussetzung gemacht. Fügen wir aber noch die Annahme hinzu, dass

$$\operatorname*{Lim}_{x=a} f'(x) = f'(a)$$

ein bestimmter endlicher Werth sei, so folgt hieraus

$$f'(a) = \operatorname*{Lim}_{x_1=a} \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}.$$

3. Aus bekannten Sätzen (D § 143f.) folgt, dass die unendliche Reihe

$$\sum \frac{1}{\psi^{1+\varrho}}$$

für jedes *positive* ϱ eine *endliche und stetige* Function von ϱ ist, welche einen gleichfalls *endlichen und stetigen* Differentialquotienten

$$-\sum \frac{\log \psi}{\psi^{1+\varrho}}$$

besitzt. Das Gleiche gilt daher auch von den aus solchen Functionen zusammengesetzten Summen L.

Es soll nun weiter unten nachgewiesen werden, dass die beiden Ausdrücke

VI. $$\sum \frac{1}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}; \qquad -\sum \frac{\log \psi}{\psi^{1+\varrho}} + \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ *endliche Grenzwerthe* besitzen. Setzen wir dies für den Augenblick voraus und setzen:

$$\sum \frac{1}{\psi_\varkappa^{1+\varrho}} = \frac{g}{\varrho} + \Phi_\varkappa(\varrho)$$

so ist $\Phi_\varkappa(\varrho)$ eine für jedes $\varrho \gtreqless 0$ endliche und stetige Function und besitzt nach dem Hülfssatz 2. einen in dem gleichen Umfang endlichen und stetigen Differentialquotienten $\Phi'_\varkappa(\varrho)$.

Nun ist für die Summen $L(\varrho)$ der *zweiten* und *dritten Art* mit Rücksicht auf § 1, 11.

$$L(\varrho) = \chi(\Theta_1)\Phi_1(\varrho) + \chi(\Theta_2)\Phi_2(\varrho) + \cdots + \chi(\Theta_h)\Phi_h(\varrho)$$

und daher sind auch diese $L(\varrho)$ endliche und stetige Functionen von ϱ mit ebensolchen Differentialquotienten $L'(\varrho)$ für jedes $\varrho \gtreqless 0$, und nach Satz 2. ist

(5) $$L(\varrho) = L(0) + \varrho L'(\vartheta\varrho), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$
$$L'(0) \text{ endlich.}$$

Es wird nun zunächst nachgewiesen werden, dass der Grenzwerth der Summen der *zweiten Art*, $L_1(0)$, *von Null verschieden* ist. Ist dies geschehen, so ergiebt sich dasselbe für die Reihen der dritten Art L_3 aus der Gleichung (III). Wäre nämlich für eine dieser Summen $L_2(0) = 0$, so würde (nach (5)) $\log L_2(\varrho)$ für $\varrho = 0$ negativ unendlich wie $\log \varrho$, während $\log L_0(\varrho)$ positiv unendlich wird wie $-\log \varrho$. Da aber, wie schon oben bemerkt, jedes Glied von der Form $\log L_2$ auf der rechten Seite von III zweimal vorkommt, und da überdies, wie aus elementaren Sätzen folgt, $\log G$ für $s = 1$ endlich bleibt*), so würde mit abnehmendem ϱ die rechte Seite von III zuletzt negativ und zwar über alle Grenzen gross, was der wesentlich positiven linken Seite widerspricht.

---

*) Es ist nämlich

$$\log G - \log \varkappa = \sum \frac{1}{g^{2s}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{g^{4s}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{g^{6s}} + \cdots$$
$$< \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^6} + \cdots$$

und

$$\frac{1}{n^4} \leqq \frac{1}{4}\,\frac{1}{n^2}, \qquad \frac{1}{n^6} \leqq \frac{1}{16}\,\frac{1}{n^2}, \ldots$$

folglich

$$\log G - \log \varkappa < \frac{4}{3} \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da hiernach also auf der rechten Seite der Gleichungen III, IV nur das einzige mit $\log L_0$ multiplicirte Glied für $\varrho = 0$ unendlich wird, so muss auch die linke Seite dieser Gleichungen unendlich werden; und da überdies

$$Q = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{f^{2s}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{f^{3s}} + \cdots < \frac{1}{2}\sum_{2,\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{2,\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{2,\infty} \frac{1}{n^4} + \cdots$$

$$\frac{1}{n^3} \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}, \qquad \frac{1}{n^4} \overline{\overline{<}} \frac{1}{4}\,\frac{1}{n^2}, \ldots$$

also

$$Q < \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^2}$$

und mithin für $s = 1$ endlich bleibt, so folgt, dass die erste Summe auf der linken Seite der Gleichungen III, IV

$$\sum \frac{1}{f^s}$$

für $s = 1$ unendlich gross werden muss, also gewiss aus unendlich vielen Gliedern besteht, w. z. b. w.

§ 4.

Die Summen L_1 der zweiten Art.

Um unsern Beweis zu vervollständigen, haben wir zunächst zu zeigen, dass die Summen der zweiten Art, $L_1(\varrho)$, für $\varrho = 0$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth haben. Den ambigen Charakteren $\chi(\Theta)$ haben wir in § 2. 2. den Ausdruck gegeben:

$$\chi(\Theta) = \left(\frac{D_1}{m}\right) = \left(\frac{D_2}{m}\right),$$

wenn m eine beliebige durch die Formen der Classe Θ darstellbare Zahl und $D_1 D_2 = D$ ist, und zwar ist, wenn χ nicht der Hauptcharakter ist, wie hier vorausgesetzt, weder D_1 noch D_2 ein Quadrat.

Hiernach ergiebt sich aus den Formeln D. § 125 Ste. 325 für die entsprechende Summe L_1 der Ausdruck:

$$L_1 = \varkappa \sum \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n^s} \sum \left(\frac{D_2}{n}\right) \frac{1}{n^s}, \tag{1}$$

wenn sich die Summen auf der rechten Seite auf sämmtliche positive Zahlen erstrecken, die relativ prim zu $2D$ sind.

Ist nun q eine Primzahl, die in $2D$ aber nicht in $2D_1$ aufgeht, und versteht man unter n' alle diejenigen Zahlen, welche aus n durch Hinzunahme der durch q theilbaren entstehen, so ist

$$\sum \left(\frac{D_1}{n'}\right) \frac{1}{n'^s} = \sum \left(\frac{D_1}{n}\right) \frac{1}{n^s} + \sum \left(\frac{D_1}{qn'}\right) \frac{1}{(qn')^s},$$

also:

$$\sum \left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \left(1 - \left(\frac{D_1}{q}\right)\frac{1}{q^s}\right)\sum \left(\frac{D_1}{n'}\right)\frac{1}{n'^s}.$$

Verfährt man ebenso mit den übrigen Primzahlen q, die in $2D$, aber nicht in $2D_1$ aufgehen, und behandelt analog den zweiten Factor des Ausdrucks (1), so ergiebt sich

$$L_1 = \varkappa \prod\left(1 - \left(\frac{D_1}{q'}\right)\frac{1}{q'^s}\right)\prod\left(1 - \left(\frac{D_2}{q''}\right)\frac{1}{q''^s}\right)\sum\left(\frac{D_1}{n'}\right)\frac{1}{n'^s}\sum\left(\frac{D_1}{n''}\right)\frac{1}{n''^s}. \tag{2}$$

Hierin bezieht sich das erste Productzeichen auf die in D_2 aber nicht in D_1 aufgehenden ungeraden Primzahlen q', das zweite auf die in D_2 aber nicht in D_1 aufgehenden q''; und diese beiden Producte haben daher für jedes positive s, also auch für $s = 1$ von Null verschiedene Werthe. In den beiden Summenzeichen durchlaufen n', n'' die sämmtlichen positiven zu $2D_1$ resp. $2D_2$ theilerfremden Zahlen. Die Grenzwerthe der beiden letzteren Summen für $s = 1$ sind aber, von endlichen nicht verschwindenden Factoren abgesehen, die Classenzahlen der quadratischen Formen für die Determinanten D_1, D_2 und also von Null verschieden. (D. Stn. 242, 247). Demnach besitzt auch L_1 einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth. w. z. b. w.

§ 5.

Die Functionen $\Sigma\psi^{-s}$, $\Sigma\log\psi\cdot\psi^{-s}$.

Nach den Ausführungen des § 3 kommt es zur Erledigung des Beweises nur noch auf die Grenzwerthe der beiden Functionen

$$\sum \frac{1}{\psi^{1+\varrho}}, \qquad \sum \frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}}$$

für verschwindende Werthe von ϱ an.

Um diese zu untersuchen befreien wir uns zunächst von der Beschränkung, welche für die variablen ganzen Zahlen x, y darin liegt, dass nur solche Werthe in Betracht kommen sollen, für welche

$$\psi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

einen zu $2D$ theilerfremden Werth erhält. Hierzu nehmen wir an, die Repräsentanten der Formenclassen seien so gewählt, dass a positiv und relativ prim zu $2D$ sei, was stets möglich ist. (Gauss D. A. art. 228, D. § 93); Dann können wir ferner b durch D theilbar und im Falle eines ungeraden D ungerade annehmen, was dann zur Folge hat, dass c durch D theilbar und gerade ist. Hiernach bezieht sich die obige Beschränkung nur noch auf die für x zu setzenden Zahlen und verlangt von diesen, dass sie durch keine der in $2D$ aufgehenden Primzahlen $q, q', q'', \cdots$ theilbar seien.

Wenn wir von dem System sämmtlicher ganzen Zahlen x alle Zahlen von der Form qx wegnehmen, so bleiben diejenigen übrig, welche nicht durch q theilbar sind. Fügen wir zu diesen hinzu alle Zahlen von der Form $qq'x$ und nehmen alle Zahlen von der Form $q'x$ weg, so bleiben diejenigen übrig, welche weder durch q noch durch q' theilbar sind, u. s. f. Bedeutet allgemein x' das System aller Zahlen, welche relativ prim zu irgend einer Zahl d sind, und ist q eine in d nicht aufgehende Primzahl, so erhält man alle zu dq theilerfremden Zahlen, wenn man von den System der Zahlen x' alle Zahlen von der Form qx' wegnimmt.

Sind hierbei, wie in dem Fall der positiven Determinanten, die Zahlen x' noch an eine Bedingung von der Form gebunden

$$x' > \gamma' y$$

so hat man nur diejenigen Zahlen qx' davon wegzunehmen, für welche

$$x' > \frac{\gamma'}{q} y$$

ist. Nach diesen Bemerkungen lässt sich die Function $\Sigma\psi(x, y)^{-s}$ zerlegen in eine Summe von ähnlichen Functionen in der Weise

$$\overset{d}{\Sigma} \pm \Sigma\psi(dx, y)^{-s}$$

worin sich das erste Summenzeichen auf alle Producte d von verschiedenen in $2D$ aufgehenden Primzahlen erstreckt, und das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Anzahl der Primfactoren von d gerade oder ungerade ist. Das andere Summenzeichen bezieht sich für den Fall negativer Determinanten auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe x, y mit alleiniger Ausnahme der Werthcombination $x = 0$, $y = 0$; im Falle positiver Determinante kommen noch die Bedingungen hinzu

$$y \geqq 0, \quad x > \frac{\gamma}{d} y$$

während

$$\psi(dx, y) = ad^2x^2 + 2bdx + cy^2 = ad^2\left(x - \frac{\alpha}{d} y\right)\left(x - \frac{\beta}{d} y\right),$$

so dass, wenn man $\frac{\alpha}{d}$, $\frac{\beta}{d}$, $\frac{\gamma}{d}$ mit α', β', γ', bezeichnet, auch jetzt die Bedingung besteht

$$\alpha' < \beta' < \gamma'.$$

Hierdurch ist also unsere Aufgabe auf den allgemeinen Nachweis zurückgeführt, dass die beiden Ausdrücke

$$\sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-1-\varrho} - \frac{g}{\varrho}$$

$$\sum \frac{\lg\,(ax^2 + 2bxy + cy^2)}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

oder abgekürzt

$$\sum \frac{1}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}, \qquad \sum \frac{\log \psi}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ und irgend ein endliches g endliche Grenzwerthe haben, wenn, falls $b^2 - ac$ negativ ist, x, y alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Werthcombination 0, 0 zu durchlaufen haben, während für ein positives $b^2 - ac$ die Variablen x, y alle ganzzahligen Werthe annehmen, welche den Bedingungen genügen

$$y \geqq 0, \quad x > \gamma y$$

worin $\gamma > \beta > \alpha$, wenn α, β die reellen Wurzeln der Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ sind. Der Coefficient a wird in beiden Fällen als positiv vorausgesetzt. Die Forderung, dass a, b, c ganze Zahlen seien, ebenso die besondere Bedeutung, die γ bisher hatte, kommen für die folgende Untersuchung nicht weiter in Betracht.

Wir reduciren die Aufgabe zunächst noch auf eine andere, indem wir von den bekannten Formeln Gebrauch machen

$$\int_0^\infty e^{-t\psi} t^\varrho \, dt = \frac{\Gamma(1+\varrho)}{\psi^{1+\varrho}}$$

$$\int_0^\infty e^{-t\psi} t^\varrho \log t \, dt = \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{\Gamma(1+\varrho)\log\psi}{\psi^{1+\varrho}}$$

wodurch man, wenn zur Abkürzung

$$J_\varrho = \int_0^\infty t^\varrho \, dt \, \Sigma e^{-t\psi}, \qquad J'_\varrho = \int_0^\infty t^\varrho \log t \, dt \, \Sigma e^{-t\psi}$$

gesetzt wird, und die Summen in demselben Sinne wie oben verstanden werden, erhält:

$$\sum \psi^{-1-\varrho} = \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} J_\varrho$$

$$\sum \frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}} = \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{(\Gamma(1+\varrho))^2} J_\varrho - \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} J'_\varrho$$

oder auch

$$\sum \psi^{-1-\varrho} - \frac{g}{\varrho} = \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) + \frac{g}{\varrho}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} - 1\right)$$

$$\sum \frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2} = \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{(\Gamma(1+\varrho))^2}\left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) - \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\left(J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}\right)$$
$$- \frac{g}{\varrho^2}\left(1 - \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} - \varrho \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{(\Gamma(1+\varrho))^2}\right).$$

Daraus ergiebt sich in Folge bekannter Eigenschaften der Gammafunction, dass man nur noch zu zeigen hat, dass die beiden Ausdrücke

$$J_\varrho - \frac{g}{\varrho}, \qquad J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ endliche Grenzwerthe haben. Bei dieser Betrachtung muss aber der Fall negativer Determinanten von dem der positiven Determinanten getrennt werden.

a) Negative Determinanten.*)

Um die Untersuchung der Integrale J_ϱ, J'_ϱ zunächst für negative Determinanten durchzuführen, setzen wir

(1) $$\Sigma e^{-\psi(x,y)} = \Theta(a, b, c)$$

(2) $$\Sigma e^{-t\psi(x,y)} = \Theta(ta, tb, ct) = \Theta(t).$$

Die Function $\Theta(t)$ ist für positive t endlich und stetig und nimmt mit wachsendem t fortwährend ab, und zwar so, dass $e^{\lambda t}\Theta(t)$ für ein angebbares positives constantes λ für $t = \infty$ verschwindet, (man kann für λ jeden Werth setzen, der kleiner ist als der kleinste Werth der positiven Function $\psi(x, y)$).

Das Verhalten dieser Function für $t = 0$ ergiebt sich aus der Transformationstheorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Es findet sich nämlich bei Rosenhain (Mém. sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, Théorème III, Mém. prés. d. l. Ac. d. Paris T. XI.) eine Formel, die sich mit Benutzung von

$$\Theta(a, b, c) = \Theta(c, -b, a)$$

so schreiben lässt

$$\Theta(a, b, c) + 1 = \frac{\pi}{\sqrt{-D}}\left\{\Theta\left(\frac{\pi^2 a}{-D}, \frac{\pi^2 b}{-D}, \frac{\pi^2 c}{-D}\right) + 1\right\}$$

oder wenn

(3) $$\frac{\pi}{\sqrt{-D}} = g$$

gesetzt wird

$$\Theta(t) = -1 + \frac{g}{t} + \frac{g}{t}\Theta\left(\frac{g^2}{t}\right).$$

Darnach erhält man

$$\int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt = \int_g^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt + \int_0^g t^\varrho\left\{-1 + \frac{g}{t} + \frac{g}{t}\Theta\left(\frac{g^2}{t}\right)\right\} dt.$$

Substituirt man für t in dem ersten Integral rechts gt, in dem zweiten $\frac{g}{t}$, so findet man

*) Kronecker hat in einer sehr wichtigen Abhandlung (Monatsberichte der Berliner Academie vom 22. Januar 1863) den Grenzwerth des Unterschieds zweier Summen $\sum \frac{1}{\psi^s}$ für zwei verschiedene Formen ψ, die zu derselben negativen Determinante, aber zu verschiedenen Classen gehören, durch solche *einfache* Thetafunctionen, für welche die complexe Multiplication stattfindet, ausgedrückt. Für unsern Zweck, bei dem es nur auf den Nachweis der Endlichkeit der Grenzwerthe ankommt, genügt die unten folgende Bestimmung, deren Grundgedanke, nämlich die Anwendung der zweifach unendlichen Thetareihen mir von meinen Freund R. Dedekind mitgetheilt worden ist.

$$(4)\quad J_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt = g^{1+\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{1+\varrho} + \int_1^\infty \Theta(gt)\,(t^\varrho + t^{-1-\varrho})\right) dt$$

und auf demselben Wege (oder auch durch Differentiation der Formel (4) nach ϱ):

$$(5)\ J'_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho \log t\, dt = g^{1+\varrho} \log g \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{1+\varrho} + \int_1^\infty \Theta(gt)(t^\varrho + t^{-1-\varrho}) dt\right.$$

$$+ g^{1+\varrho}\left\{\frac{1}{(1+\varrho)^2} - \frac{1}{\varrho^2} + \int_1^\infty \Theta(gt)(t^\varrho - t^{-1-\varrho}) \log t\, dt,\right.$$

zwei Formeln, die für alle positiven Werthe von ϱ gelten. Hieraus ergeben sich die gesuchten endlichen Grenzwerthe, wenn man beachtet, dass die beiden Integrale $\int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s\, dt$, $\int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s \log t\, dt$ für alle *positiven* und *negativen* Werthe von s durchaus stetige Functionen von s sind.*)

$$(6)\qquad \lim_{\varrho=0}\left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) = g\log g - g + g\int_1^\infty \Theta(gt)\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$(7)\qquad \lim_{\varrho=0}\left(J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}\right) = g - g\log g + \frac{1}{2} g (\log g)^2$$

$$+ g\int_1^\infty \Theta(gt)\left(1 - \frac{1}{t}\right) \log t\, dt$$

$$+ g\log g \int_1^\infty \Theta(gt)\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt.$$

*) Um dies z. B. für die erste der beiden Functionen zu zeigen, setze man

$$\int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s\, dt = f(s), \quad f(s+\varepsilon) - f(s) = \int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s (t^\varepsilon - 1)\, dt.$$

Setzt man für $t \gtreqless 1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$t^\varepsilon - 1 = \varepsilon \log t \cdot A,$$

so ist

$$A = 1 + \frac{\varepsilon \log t}{2} + \frac{\varepsilon^2 (\log t)^2}{2 \cdot 3} + \cdots \leqq t^\varepsilon \leqq t^{\varepsilon_0}$$

also

$$f(s+\varepsilon) - f(s) < \varepsilon \int_1^\infty \Theta(gt)\, t^{s+\varepsilon_0}\, dt$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt. Ebenso kann man mit dem zweiten der obigen Integrale verfahren.

b) Positive Determinanten.

In ähnlicher Weise lässt sich nun die Untersuchung für positive Determinanten führen, nur dass man sich hier nicht mehr auf bekannte Eigenschaften der Thetafunctionen stützen kann. Wir setzen für diesen Fall

$$\Theta(t) = \sum_{0,\infty}^{y} \sum_{x > \gamma y}^{x} e^{-ta(x-\alpha y)(x-\beta y)} \tag{8}$$

$$\alpha < \beta < \gamma.$$

Die Reihe, durch welche diese Function definirt ist, besteht aus lauter positiven Gliedern, welche mit wachsendem t abnehmen, und wenn es daher gelingt, den Werth der Reihe für irgend ein t in endliche Grenzen einzuschliessen, so folgt daraus die *Convergenz* und *Stetigkeit* derselben für jedes grössere t. Es folgt dann zugleich, dass für $t = \infty$ die Function $\Theta(t)$ verschwindet, und zwar so, dass auch noch $e^{\lambda t}\Theta(t)$ für ein positives constantes λ mit wachsendem t beständig abnimmt und sich der Grenze Null nähert. Wir suchen eine solche Einschliessung in Grenzen zu ermitteln, welche zugleich über das Verhalten von $\Theta(t)$ für $t = 0$ Aufschluss giebt.

Halten wir zunächst einen bestimmten Werth von y fest, so ist, so lange $x > \gamma y$,

$$f(x) = f(x, y) = e^{-ta(x-\alpha y)(x-\beta y)}$$

für positive a und t eine mit wachsendem x abnehmende Function, und daher ist

$$f(x+1) < \int_x^{x+1} f(x, y)\, dx < f(x).$$

Bedeutet also x_0 den kleinsten ganzzahligen Werth $> \gamma y$, so folgt:

$$f(x_0+1) + f(x_0+2) + \cdots < \int_{x_0}^{\infty} f(x, y)\, dx < f(x_0) + f(x_0+1) + \cdots$$

also, da auch

$$\int_{\gamma y}^{x_0} f(x, y)\, dx < f(\gamma y, y); \quad f(x_0) < f(\gamma y, y)$$

$$\int_{\gamma y}^{\infty} f(x,y)\, dx - f(\gamma y, y) < f(x_0) + f(x_0+1) + \cdots < \int_{\gamma y}^{\infty} f(x,y)\, dx + f(\gamma y, y). \tag{9}$$

Nun ist:

$$\varphi(y) = \int_{\gamma y}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-at(x+(\gamma-\alpha)y)(x+(\gamma-\beta)y)}\, dx$$

eine mit wachsendem y abnehmende Function und daher wie oben

(10) $$\int_0^\infty \varphi(y)dy < \varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots < \int_0^\infty \varphi(y)\,dy + \varphi(0).$$

Summirt man nun die Ungleichungen (9), für alle ganzzahligen Werthe von y, die $\overline{\gtrless} 0$ sind, so ergeben sich aus (10) für $\Theta(t)$ die beiden Grenzen

(11) $$\begin{cases} \Theta(t) < \displaystyle\int_0^\infty\int_{\gamma y}^\infty e^{-at(x-\alpha y)(x-\beta y)}\,dx\,dy + \int_0^\infty e^{-tax^2}\,dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{0,\infty} e^{-ty^2 a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \\ \Theta(t) > \displaystyle\int_0^\infty\int_{\gamma y}^\infty e^{-at(x-\alpha y)(x-\beta y)}\,dx\,dy - \sum_{0,\infty}^{y} e^{-ty^2 a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty\int_{\gamma y}^\infty e^{-at(x-\alpha y)(x-\beta y)}\,dx\,dy = \frac{1}{2at(\beta-\alpha)}\log\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \frac{g}{t}$$

worin

(12) $$g = \frac{1}{2a(\beta-\alpha)}\log\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta},$$

ferner:

$$\int_0^\infty e^{-atx^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{at}}$$

und wenn

$$\sum_{-\infty,\infty}^{x} e^{-x^2 a} = \vartheta(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\vartheta\left(\frac{\pi^2}{a}\right) \qquad \text{(Jacobi Fund. Ste. 184)}$$

gesetzt wird.

$$\sum_{0,\infty}^{y} e^{-tay^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \frac{1}{2}\vartheta\big(ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\big) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}\sqrt{a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\vartheta\left(\frac{\pi^2}{ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right) + \frac{1}{2}.$$

Setzt man daher

(13) $$\Theta(t) = \frac{g}{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\Phi(t)$$

so ergeben sich für $\Phi(t)$ die Grenzen

(14) $$\begin{cases} \Phi(t) < \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\vartheta\left(\dfrac{\pi^2}{ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right) + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{t} \\ \Phi(t) > \dfrac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\vartheta\left(\dfrac{\pi^2}{ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right) - \dfrac{1}{2}\sqrt{t}. \end{cases}$$

Ist t kleiner als ein bestimmter endlicher Werth, etwa < 1, so ergeben sich aus (14) endliche Grenzen, in denen $\Phi(t)$ eingeschlossen bleibt.

Ist $t > 1$, so setzen wir

$$\Theta(t) = e^{-\lambda t}\Psi(t) \tag{15}$$

worin, wie oben bemerkt, λ positiv so angenommen werden kann, dass $\Psi(t)$ mit wachsendem t abnimmt und sich der Grenze Null nähert, also beständig zwischen 0 und $e^{\lambda}\Theta(1)$ eingeschlossen bleibt.

Hiernach können wir setzen

$$J_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt = \int_0^1 \left(\frac{g}{t} + \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\right) t^\varrho\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, t^\varrho\, dt$$

$$J_\varrho = \frac{g}{\varrho} + \int_0^1 \Phi(t)\, t^{\varrho - \frac{1}{2}}\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, t^\varrho\, dt \tag{16}$$

und ebenso

$$J'_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho \log t\, dt = -\frac{g}{\varrho^2} + \int_0^1 \Phi(t)\, t^{\varrho - \frac{1}{2}} \log t\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, t^\varrho \log t\, dt. \tag{17}$$

Die beiden letzten Integrale auf der rechten Seite der Formeln (16), (17) sind für jedes positive und negative ϱ convergent, und genau wie oben beweist man, dass sie stetige Functionen von ϱ sind. Die beiden zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrale in denselben Formeln sind convergent, so lange $\varrho > -\frac{1}{2}$ ist, und die Stetigkeit derselben in dem gleichen Umfang ergiebt sich aus der Ungleichung

$$1 - t^\varepsilon \leqq -\varepsilon \log t \quad (t \leqq 1).$$

Demnach erhält man durch den Grenzübergang die beiden endlichen Werthe

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=0} \left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) = \int_0^1 \Phi(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, dt \tag{18}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=0} \left(J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}\right) = \int_0^1 \Phi(t) \log t \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t) \log t\, dt, \tag{19}$$

wodurch der gesuchte Beweis in allen Punkten geführt ist.

§ 6.

Formen zweiter Art und quadratische Determinanten.

Um die Frage nach der Darstellbarkeit von Primzahlen durch quadratische Formen zu vervollständigen, bleiben noch zwei Fälle übrig. Zunächst ist zu zeigen, dass auch die Form

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

wenn a, b, c ohne gemeinsamen Theiler sind, bei ungeradem b unendlich viele Primzahlen darstellen kann, oder, was dasselbe ist, dass die primitive Form zweiter Art $(2a, b, 2c)$ unendlich viele doppelte Primzahlen darzustellen fähig ist. Dies aber ergiebt sich unmittelbar aus den Sätzen von Gauss über die Composition der Ordnungen; denn jede primitive Classe zweiter Art entsteht wenigstens einmal durch Composition einer Classe der ersten Art mit der *einfachsten* Classe der zweiten Art; welche durch die Form repräsentirt ist

$$\left(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2}\right).$$

Durch diese Form kann aber offenbar die Zahl 2 dargestellt werden, und wenn daher die Formen der ersten Art Primzahlen darzustellen fähig sind, so können die Formen zweiter Art doppelte Primzahlen darstellen.

Endlich bleibt noch der Fall übrig, wo die Determinante D ein Quadrat ist, der sich auf die Frage nach der Darstellung von Primzahlen durch die Glieder einer arithmetischen Progression zurückführen lässt. Wir betrachten hier Formen erster und zweiter Art gemeinschaftlich, und nehmen also an, in

$$\psi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{1}$$

seien a, b, c ohne gemeinschaftlichen Theiler und $\Delta = b^2 - 4ac$ das Quadrat einer ganzen Zahl. Es ist dann

$$\psi = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\, y\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\, y\right), \tag{2}$$

und die beiden Zahlen $b \pm \sqrt{\Delta}$ sind gerade, da ihre Summe und ihr Product gerade ist. Ferner ist

$$\frac{(b + \sqrt{\Delta})\,(b - \sqrt{\Delta})}{4a} = c, \tag{3}$$

also eine ganze Zahl. Setzt man daher

$$\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a'} = c', \qquad \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a''} = c'' \tag{4}$$

$$b = a'c' + a''c'' \tag{5}$$

so dass a', a'', c', c'' ganze Zahlen sind, und $a'a'' = a$, $c'c'' = c$, so folgt

$$\psi = (a''x + c'y)\,(a'x + c''y). \tag{6}$$

Nun sind wegen (5) a', c'', ebenso a'', c' ohne gemeinschaftlichen Theiler, und man kann daher x, y so bestimmen, dass

$$a''x + c'y = \pm 1, \quad x = x_0 + c'\xi, \quad y = y_0 - a''\xi$$

alsdann wird der zweite Factor in (6)

$$a'x_0 + c''y_0 + \xi(c'a' - c''a'') = \delta\xi + \omega$$

und es ist nur noch zu zeigen, dass die beiden Zahlen δ und ω relativ prim sind; denn dann sind in der Linearform $\delta\xi + \omega$ unendlich viele Primzahlen enthalten. Es ist aber

$$\begin{aligned} a'\,x_0 + c''y_0 &= \omega \\ a''x_0 + c'\,y_0 &= \pm 1 \\ c'\,a' - c''a'' &= \delta \end{aligned}$$

also:

$$\delta x_0 = \omega c' \pm c'', \qquad \delta y_0 = -\omega a'' \mp a'$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt, da ein gemeinschaftlicher Theiler von δ und ω auch Theiler von a', c'' und mithin von a, b, c sein würde. Die einzige Ausnahme bildet $\delta = 0$, in welchem Falle $a' = a''$, $c' = c''$, also ψ ein Quadrat und $\Delta = 0$ wird.

Königsberg in Pr., Mai 1882.