

## 8.

# Einiges über die Berechnung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen mittelst ohne Ende fortlaufender Reihen.

(Von dem Herrn Dr. Waltinowsky in Triest.)

Es sei  $x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots = \psi(y)$  und  $\frac{y}{\psi(y)} = \varphi(y)$ , so ist nach der bekannten Umkehrungsformel:

$$y = \varphi(0)x + \frac{1}{2}\varphi_1(0)x^2 + \frac{1}{3}\varphi_2(0)\frac{x^3}{1.2} + \dots + \frac{1}{r+1}\varphi_r(0)\frac{x^{r+1}}{1.2\dots r} + \dots;$$

wo  $\varphi_r(0) = \frac{d^r[\varphi(z)^{r+1}]}{dz^r}$  für  $z = 0$  ist.

Ist  $a_1 = B_{m-1}$ ,  $a_m = 1$  und  $a_2, a_3 \dots a_{m-1}, a_{m+1} \dots = 0$ , so wird

$$x = B_{m-1}y + y^m = \psi(y) \text{ und } \varphi(y) = \frac{1}{B_{m-1} + y^{m-1}}.$$

Da  $\varphi(z) = \frac{1}{B_{m-1} + z^{m-1}}$ , also  $\varphi(z)^{r+1} = (B_{m-1} + z^{m-1})^{-(r+1)}$  ist, so findet sich

$$\begin{aligned} \varphi(z)^{r+1} &= B_{m-1}^{-(r+1)} + \binom{-(r+1)}{1} B_{m-1}^{-(r+2)} \cdot z^{m-1} + \binom{-(r+1)}{2} B_{m-1}^{-(r+3)} \cdot z^{2(m-1)} + \dots \\ &\dots + \binom{-(r+1)}{p} B_{m-1}^{-(r+p+1)} \cdot z^{p(m-1)} + \dots \end{aligned}$$

und  $\varphi(0) = 1.2.3 \dots (r-1)r \binom{-(r+1)}{p} B_{m-1}^{-(r+p+1)}$ , wo  $r = p(m-1)$  sein muss.

Auf diese Weise wird

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= \frac{1}{B_{m-1}} \cdot x + \frac{1}{m} \binom{-m}{1} \frac{x^m}{B_{m-1}^{m+1}} + \frac{1}{2(m-1)+1} \binom{-(2(m-1)+1)}{2} \frac{x^{2(m-1)+1}}{B_{m-1}^{2m+1}} + \dots \\ &+ \frac{1}{p(m-1)+1} \cdot \binom{-(p(m-1)+1)}{p} \frac{x^{p(m-1)+1}}{B_{m-1}^{pm+1}} + \dots \end{aligned}$$

Um zu untersuchen, in welchen Fällen diese Reihe convergirt, nehmen wir den Quotienten  $\frac{U_{p+1}}{U_p}$  bei unendlichem Wachsen von  $p$ , wo also  $U_p$  das  $p$ te und  $U_{p+1}$  das  $p+1$ te Glied dieser Reihe bedeutet. Es findet sich:

$$\begin{aligned} \frac{U_{p+1}}{U_p} &= - \frac{((p-1)(m-1)+1) \cdot (p(m-1)+1)(p(m-1)+2) \dots}{(p(m-1)+p)(p(m-1)+p)x^{m-1}} \\ \lim. \frac{U_{p+1}}{U_p} &= - \frac{(p(m-1)+1)(p(m-1)+2) \dots (p(m-1)+p-1) \cdot m \cdot x^{m-1}}{(p(m-1)-m+2)(p(m-1)-m+3) \dots (p(m-1)-m+p) B_{m-1}^m} \\ &= - \frac{(p(m-1)-m+p+1)(p(m-1)-m+p+2) \dots (p(m-1)+p-1) \cdot m \cdot x^{m-1}}{(p(m-1)-m+2)(p(m-1)-m+3) \dots p(m-1) \cdot B_{m-1}^m} \\ &= - \frac{(pm-(m-1))(pm-(m-2)) \dots (pm-1) \cdot m \cdot x^{m-1}}{(p(m-1)-(m-2))(p(m-1)-(m-3)) \dots p(m-1) \cdot B_{m-1}^m} \\ \lim. \frac{U_{p+1}}{U_p} &= - \frac{m^{m-1}}{(m-1)^{m-1}} \cdot m \cdot \frac{x^{m-1}}{B_{m-1}^m} = - \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} \cdot \frac{x^{m-1}}{B_{m-1}^m}, \text{ welches über die Con-} \\ &\text{vergenz den nöthigen Aufschluss giebt.} \end{aligned}$$

Schreibt man in (1)  $-B_m$  statt  $x$ , wodurch also  $\gamma_m + B_{m-1}\gamma + B_m = 0$  wird, so ergibt sich

$$(2) \quad y = -\frac{B_m}{B_{m-1}^m} + (-1)^{m+1} \frac{B_m^m}{B_{m+1}^{m+1}} + (-1)^{2m+1} m \cdot \frac{B_m^{2(m-1)+1}}{B_{m+1}^{2m+1}} + \dots \\ + (-1)^{pm+1} \frac{1}{p(m-1)+1} \cdot \frac{(p(m-1)+1)(p(m-1)+2) \dots (p(m-1)+p) B_m^{p(m-1)+1}}{1 \cdot 2 \dots p B_{m+1}^{pm+1}} + \dots,$$

wo  $(-1)^m \frac{m^m B_m^{m-1}}{(m-1)^{m-1} B_{m-1}^m}$  auf die bekannte Weise über die Tauglichkeit dieser Reihe zur Berechnung von  $y$  entscheidet.

Es sei z. B.  $y^5 + 4y + 2 = 0$ , so erhält man:

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{2^5}{4^6} - 5 \cdot \frac{2^9}{4^{11}} + 35 \cdot \frac{2^{13}}{4^{16}} - \dots$$

Nimmt man nur die drei ersten Glieder, so wird  $y = 0,492\,797\,8$ ; welches noch in der vierten Decimalstelle richtig ist.

Es sei nun  $x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots + a_m y^m = \psi(y)$ ,  $\frac{y}{\psi(y)} = \varphi(y)$ ,

$$\text{also } \varphi(z) = \frac{1}{a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1}};$$

$$\varphi(z)^{r+1} = (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1})^{-(r+1)} = A_1 + A_2 z + \dots + A_{r+1} z^r + \dots,$$

so wird

$$(4) \quad y = \frac{-1}{A_1} x + \frac{-2}{A_2} A_2 x^2 + \frac{-3}{A_3} A_3 x^3 + \dots + \frac{1}{r+1} A_{r+1} z^{r+1} + \dots,$$

wo, wie bekannt,

$$\begin{aligned}
A_1^{-1} &= \frac{1}{a_1}, \\
\frac{1}{2} \cdot A_2^{-2} &= -\frac{a_2}{a_1^3}, \\
\frac{1}{3} \cdot A_3^{-3} &= \frac{2 \cdot a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4}, \\
\frac{1}{4} \cdot A_4^{-4} &= -5 \cdot \frac{a_2^3}{a_1^7} + 5 \cdot \frac{a_2 \cdot a_3}{a_1^6} - \frac{a_4}{a_1^5}, \\
\frac{1}{5} \cdot A_5^{-5} &= 14 \cdot \frac{a_2^4}{a_1^9} - 21 \cdot \frac{a_2^2 a_3}{a_1^8} + 6 \cdot \frac{a_2 a_4}{a_1^7} + 3 \cdot \frac{a_3^2}{a_1^7} - \frac{a_5}{a_1^6}, \\
\frac{1}{6} \cdot A_6^{-6} &= 42 \cdot \frac{a_2^5}{a_1^{11}} + 84 \cdot \frac{a_2^3 a_3}{a_1^{10}} - 28 \cdot \frac{a_2^2 a_4}{a_1^9} - 28 \cdot \frac{a_2^2 a_3^2}{a_1^9} + 7 \cdot \frac{a_2 a_6}{a_1^8} + 7 \cdot \frac{a_3 \cdot a_4}{a_1^8} - \frac{a_6}{a_1^7} \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

ist. Nun ist für  $r > m$ :

$$A_r^n = \frac{(n-(r-2))a_2 \bar{A}_{r-1}^n + (2n-(r-3))a_3 \bar{A}_{r-2}^n + (3n-(r-4))a_4 \bar{A}_{r-3}^n + \dots + ((m-1)n-(r-m))a_m \bar{A}_{r-m+1}^n}{(r-1)a_1},$$

also

$$\bar{A}_r^{-n} = - \frac{(n+r-2)a_2 \bar{A}_{r-1}^{-n} + (2n+r-3)a_3 \bar{A}_{r-2}^{-n} + (3n+r-4)a_4 \bar{A}_{r-3}^{-n} + \dots + ((m-1)n+r-m)a_m \bar{A}_{r-m+1}^{-n}}{(r-1)a_1},$$

daher

$$(\alpha) \quad \bar{A}_r^{-r} = - \frac{2a_2 \bar{A}_{r-1}^{-r} + 3a_3 \bar{A}_{r-2}^{-r} + 4a_4 \bar{A}_{r-3}^{-r} + \dots + m \cdot a_m \bar{A}_{r-m+1}^{-r}}{a_1}.$$

Da  $(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1})^{-(r+1)} \cdot (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1}) = (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1})^{-r}$  und

$$(\bar{A}_1^{-r+1} + \bar{A}_2^{-r+1} z + \dots + \bar{A}_r^{-r+1} z^{r-1} + \dots) \cdot (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1})$$

$= \bar{A}_1^{-r} + \bar{A}_2^{-r} z + \dots + \bar{A}_r^{-r} z^{r-1} + \dots$  ist, so findet sich

$$(\beta) \quad a_1 \bar{A}_r^{-r+1} + a_2 \bar{A}_{r-1}^{-r+1} + a_3 \bar{A}_{r-2}^{-r+1} + a_4 \bar{A}_{r-3}^{-r+1} + \dots + a_{m-1} \bar{A}_{r-m+2}^{-r+1} + a_m \bar{A}_{r-m+1}^{-r+1} = \bar{A}_r^{-r}.$$

Schreibt man in  $(\alpha)$   $r+1$  statt  $r$ , so ergibt sich

$$(\gamma) \quad \bar{A}_{r+1}^{-(r+1)} = - \frac{2a_1 \bar{A}_r^{-(r+1)} + 3a_3 \bar{A}_{r-1}^{-(r+1)} + 4a_4 \bar{A}_{r-2}^{-(r+1)} + \dots + m \cdot a_m \bar{A}_{r-m+2}^{-(r+1)}}{a_1},$$

also vermöge  $(\gamma)$  und  $(\beta)$ :

$$\frac{\bar{A}_{r+1}^{-(r+1)}}{\bar{A}_r^{-r}} = - \frac{2a_2 \bar{A}_r^{-r+1} + 3a_3 \bar{A}_{r-1}^{-r+1} + 4a_4 \bar{A}_{r-2}^{-r+1} + \dots + m \cdot a_m \bar{A}_{r-m+2}^{-r+1}}{a_1 (a_1 \bar{A}_r^{-r+1} + a_2 \bar{A}_{r-1}^{-r+1} + a_3 \bar{A}_{r-2}^{-r+1} + \dots + a_m \bar{A}_{r-m+1}^{-r+1})}$$

$$(\delta) \quad \frac{A_{r+1}}{A_r} = - \frac{2a_2 + 3a_3 \frac{A_{r-1}}{A_r} + 4a_4 \frac{A_{r-2}}{A_r} + 5a_5 \frac{A_{r-3}}{A_r} + \dots + m \cdot a_m \frac{A_{r-m+2}}{A_r}}{a_1 \left( a_1 + a_2 \frac{A_{r-1}}{A_r} + a_3 \frac{A_{r-2}}{A_r} + a_4 \frac{A_{r-3}}{A_r} + \dots + a_m \frac{A_{r-m+1}}{A_r} \right)}.$$

Die allgemeine Form der einzelnen Glieder von

$(a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_m z^{m-1})^{-(r+1)}$  ist:

$$(\varepsilon) \quad \binom{-(r+1)}{p_1} \binom{p_1}{p_1} \binom{p_2}{p_3} \dots \binom{p_{m-2}}{p_{m-1}} a_1^{-(r+p_1+1)} a_2^{p_1-p_2} a_3^{p_2-p_3} \dots a_{m-1}^{p_{m-2}-p_{m-1}} \cdot a_m^{p_{m-1}} z^{p_1+p_2+p_3+\dots+p_{m-1}},$$

wo  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{m-1}$  ganze, positive, an die Bedingung  $p_2 \leq p_1, p_3 \leq p_2, \dots, p_{m-2} \leq p_{m-3}, p_{m-1} \leq p_{m-2}$  gebundene Zahlen vorstellen, und jene der Glieder, welche  $z$  mit dem Exponenten  $s$  haben, eben dieselben, unter der Bedingung jedoch, dass noch überdies  $p_1 \leq s$  und  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{m-1} = s$  sein müsse.

Nun sei  $a_1$  negativ und sämtliche Grössen  $a_2, a_3, \dots, a_m$  seien positiv, so werden die den Coefficienten von  $z^s$  in  $(a_1 + a_2 z + \dots + a_m z^{m-1})^{-(r+1)}$  bildenden Bestandtheile sämtlich dasselbe Zeichen erhalten; und zwar wird das Zeichen positiv sein, wenn  $r+1$  gerade, und negativ, wenn  $r+1$  ungerade ist; woraus auch folgt, dass bei dieser Annahme  $\frac{A_{r+1}}{A_r}$  immer negativ sein muss. Aus

eben diesem Grunde erhalten die Brüche

$\frac{A_{r-1}}{A_r}, \frac{A_{r-2}}{A_r}, \dots, \frac{A_{r-m+1}}{A_r}$  sämtlich das Zeichen  $+$  und  $\frac{A_r}{A_r}$ , oder der Ausdruck innerhalb der Klammern im Nenner von  $(\delta)$ , ist negativ.

Die durch  $A_s$  und  $\bar{A}_s$  vorgestellten Grössen weichen, wie man aus der allgemeinen Form der sie bildenden Bestandtheile sieht, nur insofern von einander ab, als in ersterer  $-(r+1)$  an die Stelle von  $-r$  in letzterer zu stehen kommt. Der Unterschied dieser Bestandtheile liegt also nur in den Factoren  $\binom{-(r+1)}{p_1} a_1^{-(r+p_1+1)}$ , welche in  $A_s$ , und  $\binom{-r}{p_1} a_1^{-(r+p_1)}$ , welche in  $\bar{A}_s$ , vorkommen. Dividirt man  $\binom{-r}{p_1} a_1^{-(r+p_1)}$  durch  $\binom{-(r+1)}{p_1} a_1^{-(r+p_1+1)}$ , so findet sich  $\frac{r}{r+p_1} \cdot a_1$ , welches mit  $p_1$  verschiedene Werthe annimmt. Ist  $s = r$ , so kann  $p_1$  nie grösser als  $r-1$  und nie kleiner als  $\frac{r-1}{m-1}$  werden. Es fällt also

bei dem unendlichen Wachsen von  $r$ ,  $\frac{\overline{A}_r}{A_r}$ , oder der Ausdruck innerhalb der

Klammern im Nenner von  $(\delta)$ , zwischen die Werthe  $\frac{a_1}{2}$  und  $\frac{m-1}{m} \cdot a_1$ . Aber

$a_1 + a_2 \frac{\overline{A}_{r-1}}{\overline{A}_r} + a_3 \frac{\overline{A}_{r-2}}{\overline{A}_r} + \dots + \frac{\overline{A}_{r-m+1}}{\overline{A}_r}$  ist negativ: also muss die aus po-

sitiven Gliedern bestehende Grösse  $a_2 \frac{\overline{A}_{r-1}}{\overline{A}_r} + a_3 \frac{\overline{A}_{r-2}}{\overline{A}_r} + a_4 \frac{\overline{A}_{r-3}}{\overline{A}_r} + \dots$

$+ a_m \frac{\overline{A}_{r-m+1}}{\overline{A}_r} < \frac{-a_1}{2}$ , mithin um so mehr noch

$$\frac{\overline{A}_{r+1}}{\overline{A}_r} < \frac{-a_1}{2a_2}, \quad \frac{\overline{A}_{r-1}}{\overline{A}_r} < \frac{-a_1}{2a_3}, \quad \dots \quad \frac{\overline{A}_{r-m+2}}{\overline{A}_r} < \frac{-a_1}{2 \cdot a_{m-1}}$$

sein. Dies Alles gehörig berücksichtigt, findet sich leicht, dass

$$\frac{\overline{A}_{r+1}}{\overline{A}_r} < (4a_2 - 3a_1a_3a_2^{-1} - 4a_1a_4a_3^{-1} - 5a_1a_5a_4^{-1} - \dots - ma_1a_ma_{m-1}^{-1})a_1^{-2} \quad (5),$$

aber  $> \frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2}$  sein müsse, insofern vorausgesetzt wird, dass  $m > 2$  sei,

Der numerische Werth des Quotienten  $\frac{\frac{1}{r+1} \overline{A}_{r+1} \cdot x^{r+1}}{\frac{1}{r} \overline{A}_r \cdot x^r}$  fällt also, wenn  $a_1$

negativ ist,  $a_2, a_3, \dots, a_m$  aber positiv sind und  $r$  unendlich wächst, zwischen  $(4a_2 - 3a_1a_3a_2^{-1} - 4a_1a_4a_3^{-1} - 5a_1a_5a_4^{-1} - \dots - m \cdot a_1a_ma_{m-1}^{-1})a_1^{-2}x$  und  $\frac{2ma_1}{(m-1)a_1^2} \cdot x$ . Ist also erstere Grösse kleiner als 1, so convergirt die Reihe (4.)

sicher, und ist  $\frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2}x > 1$ , so divergirt sie gewiss.

Aber es giebt keinen ungünstigeren Fall für die Convergenz der Reihe (4.) bei denselben numerischen Werthen von  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$  und  $x$ , wenn

man von dem Zeichen von  $\frac{\overline{A}_{r+1}}{\overline{A}_r} \cdot x$  abstrahirt, als der eben vorausgesetzte.

Denn in diesem Falle bekommen alle, die Grösse  $\overline{A}_n$  zusammensetzenden Glieder dasselbe Zeichen und geben ihr daher den grössten numerischen Werth, dessen sie bei speciellen Annahmen für die Zeichen von  $a_1, a_2, \dots, a_m$  über-

haupt fähig ist. Convergiert also die Reihe (4.), wenn  $a_1$  negativ und  $a_2 \dots a_m$  positiv sind, ohne Rücksicht auf das Zeichen von  $\frac{A_{r+1}}{A_r} \cdot x$ , so convergiert sie auch in allen andern Fällen: immer vorausgesetzt, dass die numerischen Werthe von  $a_1, a_2, \dots a_m$  und  $x$  dieselben bleiben.

Um die Convergenz der Reihe (4.) wenigstens einigermaßen zu beurtheilen, hat man also nur den Ausdruck (5.) unter der Bedingung zu bilden, dass seine sämtlichen Glieder das Zeichen  $+$  bekommen, so dass sie sich alle summiren; und findet sich dann, dass diese mit dem numerischen Werth von  $x$  multiplicirte Grösse kleiner als 1 wird, so convergiert die Reihe sicher. Von der in dem besonders hervorgehobenen Fall gewiss eintretenden Divergenz, wenn  $\frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2} \cdot x$  numerisch grösser als 1 sein sollte, kann man jedoch nicht auf die Divergenz auch für alle andere Fälle schliessen.

Es lässt sich noch folgende Betrachtung anstellen.

Die Formel ( $\beta$ ) giebt

$$A_r = a_1 A_r + a_2 A_{r-1} + a_3 A_{r-2} + \dots + a_{m-1} A_{r-m+2} + a_m A_{r-m+1};$$

sodann ist

$$a_1 A_r = - \left[ \left(2 + \frac{1}{r-1}\right) a_2 A_{r-1} + \left(3 + \frac{2}{r-1}\right) a_3 A_{r-2} + \dots + \left(m-1 + \frac{m-2}{r-1}\right) a_{m-1} A_{r-m+2} + \left(m + \frac{m-1}{r-1}\right) a_m A_{r-m+1} \right],$$

folglich

$$(\eta) \quad A = - \left(1 + \frac{1}{r-1}\right) (a_2 A_{r-1} + 2 a_3 A_{r-2} + 3 a_4 A_{r-3} + \dots + (m-2) a_{m-1} A_{r-m+2} + (m-1) a_m A_{r-m+1}).$$

Ferner ist nach ( $\alpha$ ):

$$A_{r+1} = - \frac{1}{a_1} (2a_2 A_r + 3a_3 A_{r-1} + 4a_4 A_{r-2} + \dots + m a_m A_{r-m+2});$$

also nach Elimination von  $2a_2 A_r$ :

$$(\vartheta) \quad A_{r+1} = - \frac{1}{a_1} \left[ \left(3a_3 - 2 \left(2 + \frac{1}{r-1}\right) \frac{a_2^2}{a_1}\right) A_{r-1} + \dots + \left(m a_m - 2 \left(m-1 + \frac{m-2}{r-1}\right) \frac{a_2 a_{m-1}}{a_1}\right) A_{r-m+2} - 2 \left(m + \frac{m-1}{r-1}\right) \frac{a_2 a_m}{a_1} A_{r-m+1} \right].$$

Endlich ist, wegen ( $\vartheta$ ) und ( $\eta$ ):

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{r-1})a_1^2} \cdot \frac{[3a_1a_3 - 2(2 + \frac{1}{r-1})a_2^2]A_{r-1} + \dots + [ma_1a_m - 2(m-1 + \frac{m-2}{r-1})a_2a_{m-1}]A_{r-m+2} - 2(m + \frac{m-1}{r-1})a_2a_mA_{r-m+1}}{a_2A_{r-1} + \dots + (m-2)a_{m-1}A_{r-m+2} + (m-1)a_mA_{r-m+1}}$$

Stellt man sich  $a_1$  als negativ,  $a_2, a_3, \dots, a_m$  als positiv und  $r$  unendlich wachsend vor, so wird offenbar  $\frac{A_{r+1}}{A_r}$  numerisch kleiner sein, als der grösste Werth unter den Ausdrücken:

$$\frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{(3a_1a_3 - 4a_2^2)}{a_2}, \frac{1(4a_1a_4 - 6a_2a_3)}{a_1^2 \cdot 2 \cdot a_3}, \dots, \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{(ma_1a_m - 2(m-1)a_2a_{m-1})}{(m-2)a_{m-1}}, \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{2ma_2a_m}{(m-1)a_m}.$$

Das heisst: um so mehr ist numerisch  $\frac{A_{r+1}}{A_r} < \frac{4a_2}{a_1^2} - \frac{3}{a_1} \cdot \varphi$ , wo  $\varphi$  den grössten

Werth bezeichnet, welchen  $\frac{a_n}{a_{n-1}}$  erreichen kann, wenn man für den Zeiger  $n$  nach und nach die Zahlen 3, 4, 5, ...,  $m-1, m$ , setzt.

Ist also  $(\frac{4a_2}{a_1^2} - \frac{3}{a_1} \cdot \varphi)x$  numerisch kleiner als 1, so convergirt die Reihe (4.) gewiss, wenn  $a_1$  negativ ist und  $a_2, a_3, \dots, a_m$  positiv sind. In andern Fällen, d. h. wenn nicht gerade diese specielle Zeichen-Combination des Coefficienten  $a_1, a_2, \dots, a_m$  Statt findet, hat man den Gliedern im Ausdrucke  $(\frac{4a_2}{a_1^2} + \frac{3}{a_1} \cdot \varphi)x$  durchaus das Zeichen + zu geben; und findet man, dass dann derselbe kleiner als 1 ist, so convergirt die Reihe (4.) gewiss. Jedoch kann man nicht auf die Divergenz schliessen, wenn  $(\frac{4a_2}{a_1^2} + \frac{3}{a_1} \cdot \varphi)x > 1$  sein sollte.

Handelt es sich nur um die Bildung des Ausdrucks  $(\frac{4a_2}{a_1^2} + \frac{3}{a_1} \cdot \varphi)x$  (in welchem, wie gesagt, allen Grössen das Zeichen + zu geben ist), damit, wenn er kleiner als 1 sein sollte, auf die Convergenz von (4.) mit Sicherheit geschlossen werden dürfe, so kann man sich, wenn eine oder mehrere der Grössen  $a_2, a_3, a_4, \dots, a_m$  gleich Null oder sehr klein sein sollten, statt derselben beliebige positive Grössen gesetzt vorstellen, und  $\varphi$  so berechnen, als ob diese Grössen statt 0 oder  $\frac{1}{\infty}$  in  $a_m y^m + a_{m-1} y^{m-1} + \dots + a_2 y^2 + a_1 y - x = 0$  wirklich vorgekommen wären. Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet sogleich, wenn man bedenkt, dass die Reihe (4.), wie sie für  $y$  aus der vorgelegten





$$-\psi = (-1)^m b_m \omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_{m-1} \omega_m \quad \text{und}$$

$$b_1 = (-1)^{m-1} b_m (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{m-1} + \dots + \omega_1 \omega_3 \dots \omega_{m-1} \cdot \omega_m + \omega_2 \cdot \omega_3 \dots \omega_{m-1} \omega_m).$$

Die Reihe (4.), nun auf  $\omega, \psi, b_1, b_2, \dots, b_m$  statt  $y, x, a_1, a_2, \dots, a_m$  bezogen, wird gewiss convergiren, wenn  $(\frac{4\gamma}{b_1^2} + \frac{3}{b_1})\psi < 1$  sein sollte (hier ist  $\gamma$  und  $b_1$  ebenfalls positiv zu nehmen, und  $\gamma$  ist der numerisch grösste unter den Coefficienten  $b_2, b_3, b_4 \dots b_m$ ). Rückt jetzt  $\beta$  sehr nahe an  $y_1$ , so wird  $\omega_1$  sehr klein,  $b_1$  nähert sich immer mehr und mehr der Grösse  $(-1)^{m-1} b_m \omega_2 \cdot \omega_3 \dots \dots \omega_{m-1} \cdot \omega_m$  und  $(\frac{4\gamma}{b_1^2} + \frac{3}{b_1})\psi$  wird  $= (L + 3)\omega_1$ , wo  $L$  eine positiv zu nehmende, numerisch von  $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m$  abhängende und wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit von  $y_1, y_2, \dots, y_m$  immer endliche Grösse bezeichnet. Je näher also  $\beta$  an  $y_1$  gerückt ist, desto sicherer wird die Convergenz der Reihe für  $\omega$  Statt finden.

Wenn daher nicht schon die Gleichung  $Y=0$  so beschaffen ist, dass die Convergenz der Reihe für  $\gamma$  Statt findet, so transformire man die Gleichung in eine andere, indem man  $y=\omega+\beta$  setzt, und suche mit  $\beta$  so nahe an eine der reellen Wurzeln von  $Y=0$  zu gelangen, dass die Convergenz der Reihe für  $\omega$  eintritt und man dadurch in den Stand gesetzt werde,  $\omega$  mit beliebiger Schärfe zu berechnen.

Findet die Convergenz der Reihe für  $\gamma$  Statt, so dürfte es im Allgemeinen zweckmässig sein, nur 5 oder 6 Glieder derselben zu nehmen und die so gefundene Grösse statt  $\beta$  zu der eben erwähnten Transformation zu verwenden und dann  $\omega$  mittelst obiger Reihe zu berechnen. Dies zur Erleichterung der Rechnung in vielen Fällen.

Dasselbe gilt auch für die Reihe für  $\omega$ , wenn sie convergiren sollte. Auch hier nehme man nur 5 oder 6 Glieder, addire die so gefundene Grösse zu  $\beta$ , und wende die Summe statt  $\beta$  zu der Transformation der Gleichung  $Y=0$  in  $O=0$  an.

Die Gleichung  $y^3 - 2y - 5 = 0$ , auf welche *Newton* seine Methode angewandt hat, ist z. B. so beschaffen, dass die obige Reihe (hier die Reihe (2.)) nicht convergirt. Setzt man jedoch  $y=\omega+\beta$ , und lässt  $\beta=2$  sein, so wird  $10\omega + 6\omega^2 + \omega^3 = 1$ , und die Reihe für  $\omega$  convergirt. Es findet sich  $\omega = 0,1 - 0,006 + 0,00062 - 0,000078 + 0,000010884 - 0,00000161952 + \dots$ , d. h. wenn man nicht weiter geht,  $\omega = 0,09455126 \dots$  oder  $y = 2,09455126 \dots$ , welches noch in der sechsten Decimalstelle richtig ist.

Oefters leistet auch die Substitution von  $\frac{1}{z}$  für  $y$  in  $Y=0$  gute Dienste, indem zuweilen, wenn auch die Reihe für  $y$  divergirte, die Reihe für  $z$  convergirt. Als Beispiel diene die Gleichung:  $y^3 + 27 \cdot y^2 - 4\frac{1}{2}y + 1 = 0$ . Da hier  $a_1$  negativ ist,  $a_2$  und  $a_3$  positiv sind und  $\frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2} > 1$  ist, so ist kein Zweifel über die Divergenz der Reihe für  $y$ . Durch die Substitution wird  $z^3 - 4\frac{1}{2} \cdot z^2 + 27 \cdot z + 1 = 0$ , und die Reihe für  $z$  convergirt. Es findet sich  $z = -\frac{1}{27} + \frac{9}{2 \cdot 27^3} \dots$ , also, ohne weiter zu gehen,  $z = -\frac{1}{27} + \frac{161}{162 \times 27}$ , oder  $y = -27 \cdot \frac{162}{161}$ . Wirklich liegt eine Wurzel zwischen  $-27$  und  $-28$ .

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass die Reihe (2.), wie sie aus einer Gleichung vom dritten Grade für  $y$  folgt, gewiss convergirt, wenn die *Cardan'sche* Formel zur Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung unbrauchbar ist.

Ist  $y^3 + B_2y + B_3 = 0$  diese Gleichung, so convergirt die Reihe (2.) für  $y$ , wenn numerisch  $\frac{27}{4} \cdot \frac{B_3^2}{B_2^3} < 1$  ist, und die *Cardan'sche* Formel wird unbrauchbar, wenn  $B_2$  negativ und wenn numerisch  $\frac{27}{4} \cdot \frac{B_3^2}{B_2^3} < 1$  ist, wodurch die eben gemachte Behauptung gerechtfertigt ist. Nennt man  $y_1$  die durch die Reihe (2.) berechnete Wurzel von  $y^3 + B_2y + B_3 = 0$ , so sind die beiden andern Wurzeln derselben  $= \frac{1}{2}(-y_1 + \sqrt{-4B_2 + 3y_1^2})$  und  $\frac{1}{2}(-y_1 - \sqrt{-4B_2 + 3y_1^2})$ .

Es sei z. B.  $y^3 - y + \frac{1}{8} = 0$  die gegebene Gleichung, so wird  $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{8^3} + \frac{3}{8^5} + \frac{12}{8^7} + \frac{55}{8^9} + \dots$  und wenn man sich mit diesen fünf Gliedern begnügt,  $y_1 = 0,127\ 050\ 807 \dots$ , und die beiden andern Wurzeln sind  $0,930\ 402 \dots$  und  $-1,057\ 453\ 8 \dots$ .

Triest im April 1845.