

# Ueber einen Algorithmus zur Berechnung der $n^{\text{ten}}$ Wurzel aus $a$ .

Von

CARL SCHMIDT in Mainz.

In den Bänden 29 und 31 der mathematischen Annalen sind von den Herren Netto und Isenkrahe Beispiele für iterirte Functionen, ihre Convergenzbedingungen und theilweise auch ihre Convergenzbereiche im Gebiete der realen Variablen betrachtet worden. Ich will im Folgenden ein neues Beispiel behandeln, nämlich den Algorithmus

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{n-1}{n} x + \frac{a}{n x^{n-1}}, \\x_2 &= \frac{n-1}{n} x_1 + \frac{a}{n x_1^{n-1}}, \\&\dots \dots \dots\end{aligned}$$

der auf die  $n^{\text{te}}$  Wurzel von  $a$  führt. Dieses Beispiel dürfte ein gewisses Interesse darbieten. Denn die iterirte Function ist sehr einfach rational und die Convergenz ist sehr stark. Ausserdem wird die Variable nicht nur auf reale Werthe beschränkt. Für den Fall der Quadratwurzel ( $n=2$ ) ist das Ergebniss überraschend einfach. Dann zerfällt die Ebene der complexen Zahlen in zwei Convergenzbereiche, die durch eine gerade Linie von einander getrennt sind. Diese gerade Linie enthält alle diejenigen  $x$ , welche gleichweit von den beiden Punkten, die die Quadratwurzeln aus  $a$  darstellen, entfernt sind; sie ist also die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie der beiden Punkte.\*) Liegt  $x$  auf dieser Linie, so convergirt der Algorithmus nicht. In jedem andern Falle convergirt er gegen denjenigen Werth von  $\sqrt[n]{a}$ , der dem Anfangswerthe  $x$  am nächsten liegt. Der Grenzwertb lässt sich auch als eine unendliche Reihe von rationalen Functionen von  $x$  darstellen, nämlich in der Form

$$x + (x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \dots$$

\*) Ich will mich im Folgenden immer der bequemen und anschaulichen aus der geometrischen Darstellung der complexen Zahlen entspringenden Ausdrucksweise bedienen.

Und so ergibt sich hier wieder ein Beispiel für die bekannte Thatsache, dass eine unendliche Reihe von rationalen Functionen in verschiedenen Convergenzbezirken verschiedene analytische Functionen darstellen kann, nämlich hier die beiden verschiedenen constanten Werthe von  $\sqrt[n]{a}$ .

## I.

Es sei  $a = \alpha \cdot e^{i\omega}$ , und  $x$  liege auf demjenigen Strahle, der den Nullpunkt mit dem Punkte

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}}$$

verbindet, so dass

$$x = \xi \cdot \sqrt[n]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}}$$

gesetzt werden kann, wobei  $\xi$  eine positive reale Zahl ist. Dann ist nach einigen leichten Umformungen

$$x_1 = \sqrt[n]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}} \left( \frac{n-1}{n} \xi + \frac{1}{n \xi^{n-1}} \right).$$

Daraus folgt, dass  $x_1$  und ebenso alle folgenden  $x$  auf demselben Strahle liegen, und setzt man nun für alle  $\lambda$

$$x_\lambda = \xi_\lambda \cdot \sqrt[n]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}},$$

so ergibt sich für die positiven realen  $\xi$  der einfache Algorithmus

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{n-1}{n} \xi_\lambda + \frac{1}{n \xi_\lambda^{n-1}}$$

d. h. es genügt den Fall zu betrachten, wo  $\alpha = 1$  und  $x$  positiv real ist.

## II.

Betrachtet man den Verlauf der Function

$$\frac{n-1}{n} x + \frac{1}{n x^{n-1}}$$

für positive reale  $x$ , so ergibt sich, dass sie in dem Intervalle  $0 \dots 1$  der Variablen  $x$  von  $+\infty$  bis 1 fällt, bei  $x = 1$  das Minimum 1 hat und in dem Intervalle  $1 \dots \infty$  wieder von 1 bis  $+\infty$  steigt. Es genügt demnach, solche  $x$  zu betrachten, die grösser als 1 sind; denn ist der Anfangswerth  $x$  kleiner als 1, so sind doch alle folgenden  $x$  grösser als 1. Ist nun  $x > 1$ , so ist  $\frac{1}{x^{n-1}} < x$ , folglich  $x_1 < x$ . Die  $x$  bilden also eine abnehmende Reihe, deren Glieder immer grösser als 1 bleiben; folglich muss die Reihe einen endlichen Grenzwert haben. Dieser Grenzwert muss der Gleichung

$$x = \frac{n-1}{n} x + \frac{1}{n x^{n-1}}$$

oder

$$x^n = 1$$

genügen, kann also nur gleich 1 sein.

Um die Stärke der Convergenz festzustellen, berechnen wir  $x_1 - 1$ .

$$x_1 - 1 = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{nx^{n-1}} = (x-1)^2 \frac{(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 1}{nx^{n-1}}.$$

Da  $x > 1$  ist, so ist der Factor auf der rechten Seite kleiner als

$$\frac{(n-1) + (n-2) + \dots + 1}{n} = \frac{n-1}{2},$$

so dass

$$\frac{n-1}{2} (x_1 - 1) < \left[ \frac{n-1}{2} (x - 1) \right]^2$$

ist und demnach

$$\frac{n-1}{2} (x_2 - 1) < \left[ \frac{n-1}{2} (x - 1) \right]^4,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{n-1}{2} (x_\lambda - 1) < \left[ \frac{n-1}{2} (x - 1) \right]^{2^\lambda}.$$

In dem allgemeineren Falle, wo  $a$  nicht gleich 1 ist, ergibt sich

$$\frac{n-1}{2} \frac{x_2 - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} < \left[ \frac{n-1}{2} \frac{x - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \right]^{2^\lambda}.$$

Ist also der Anfangswerth  $x$  schon so nahe an  $\sqrt[n]{a}$  gewählt, dass das Verhältniss des Fehlers oder der Differenz  $x - \sqrt[n]{a}$  zu dem Werthe von  $\sqrt[n]{a}$  kleiner als  $\frac{2}{n-1} \cdot 0,1$  ist, so ist schon für  $x_3$  das entsprechende Verhältniss

$$\frac{x_3 - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} < \frac{2}{n-1} \cdot 0,00000001.$$

## III.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wo  $x$  auf einem Strahle liegt, der vom Nullpunkt ausgeht und den Winkel zweier benachbarten  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln aus  $a$  halbirt. Es sei also

$$x = \xi \cdot \sqrt[n]{a} e^{\frac{i\omega}{n}} \cdot e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}},$$

wobei  $\xi$  eine positive reale Zahl ist. Dann ist nach einigen Umformungen

$$x_1 = \sqrt[n]{a} \cdot e^{\frac{i\omega}{n}} \cdot e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}} \left( \frac{n-1}{n} \xi - \frac{1}{n \xi^{n-1}} \right).$$

Setzt man also

$$x_1 = \xi_1 \sqrt[n]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{n}} \cdot e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}},$$

so wird

$$\xi_1 = \frac{n-1}{n} \xi - \frac{1}{n \xi^{n-1}}$$

real, d. h.  $x_1$  liegt auf demselben Strahle oder seiner Verlängerung über den Nullpunkt, und dasselbe gilt auch von den folgenden  $x$ . Es ist also

$$x_2 = \xi_2 \cdot \sqrt[n]{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{n}} e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}},$$

wobei  $\xi_2$  positiv oder negativ real ist, und die  $\xi$  durch folgenden Algorithmus zusammenhängen

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{n-1}{n} \xi_\lambda - \frac{1}{n \xi_\lambda^{n-1}}.$$

Wenn nun die Reihe der  $\xi$  einen endlichen Grenzwert hat, so muss er der Gleichung

$$\xi = \frac{n-1}{n} \xi - \frac{1}{n \xi^{n-1}}$$

oder

$$\xi^n = -1$$

genügen. Da nun diese Gleichung bei geradem  $n$  keine reale Wurzel hat, so folgt, dass bei geradem  $n$  auf dem genannten Strahle keine Convergenz stattfinden kann.

Bei ungeradem  $n$  genügt der Gleichung der Werth  $\xi = -1$ , und in der That convergirt dann die Reihe der  $\xi$ , wenn eine unendliche Anzahl von wohlbestimmten Anfangswerthen ausgeschlossen wird, gegen den Grenzwert  $-1$ , und mithin die Reihe der  $x$  gegen diejenige  $n^{\text{te}}$  Wurzel aus  $\alpha$ , welche auf der Verlängerung des Strahls liegt. Die Function  $\frac{n-1}{n} x - \frac{1}{n x^{n-1}}$  der Variablen  $x$  steigt, wenn  $x$  von 0 bis  $+\infty$  wächst, stetig von  $-\infty$  bis  $+\infty$  und wird bei  $x = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$  gleich 0. Ist nun der Anfangswerth  $\xi$  grösser als  $\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ , so muss doch, weil

$$\xi_1 = \frac{n-1}{n} \xi - \frac{1}{n \xi^{n-1}}$$

ist,  $\xi_1 < \frac{n-1}{n} \cdot \xi$ , und  $\xi_2 < \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \xi$  sein u. s. w., so lange die  $\xi$  positiv sind. Daher muss schliesslich ein Glied der Reihe entweder gleich  $\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$  oder kleiner werden. Im ersten Falle wird das folgende  $\xi$  gleich 0, das weiter folgende gleich  $-\infty$ , und jetzt muss der Algorithmus abgebrochen werden. Im anderen Falle werden alle

folgenden  $\xi$  negativ und haben den Grenzwert  $-1$ , denn setzt man jetzt an Stelle von  $\xi_\lambda$  in den Gleichungen  $-\xi_\lambda$ , so erhält man den früher betrachteten Algorithmus

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{n-1}{n} \xi_\lambda + \frac{1}{n \xi_\lambda^{n-1}}.$$

Auszuschliessen sind also nur diejenigen Werthe, welche schliesslich auf  $\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$  führen, nämlich

$$1) \xi' = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}},$$

2) diejenige Stelle  $\xi''$ , welche der Gleichung

$$\xi' = \frac{n-1}{n} \xi'' - \frac{1}{n \xi''^{n-1}}$$

genügt,

3) diejenige Stelle  $\xi'''$ , welche der Gleichung

$$\xi'' = \frac{n-1}{n} \xi''' - \frac{1}{n \xi'''^{n-1}}$$

genügt u. s. f.

#### IV.

Es soll jetzt der Convergencebereich im Gebiete der complexen Zahlen für den Fall der Quadratwurzel ( $n=2$ ) festgestellt werden. Es sei zunächst  $a=1$ , da der allgemeine Fall durch eine einfache Substitution auf diesen besonderen Fall zurückgeführt werden kann. Dann ist

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{1}{x_1} \right),$$

. . . . .

Liegt der Anfangswerth  $x$  auf der imaginären Axe, so findet nach III. keine Convergence statt. Es sei jetzt der reale Theil von  $x$  positiv, dann ist zu beweisen, dass der Algorithmus gegen  $+1$  convergirt. Setzt man  $x_\lambda = r_\lambda \cdot e^{i\varphi_\lambda}$ , so liegt  $\varphi$  zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$ . Nun ist

$$r_1 \cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right),$$

$$r_1 \sin \varphi_1 = \frac{\sin \varphi}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right).$$

Infolge der ersten Gleichung ist  $\cos \varphi_1$  positiv, daher liegt  $\varphi_1$  ebenfalls zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$ , und dasselbe gilt natürlich von allen folgenden  $\varphi$ .

Da

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \operatorname{tang} \varphi \cdot \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

ist, so ist  $\varphi_1$  dem absoluten Werthe nach kleiner als  $\varphi$ . Die absoluten Beträge der  $\varphi$  bilden also eine abnehmende Reihe und müssen einem Grenzwert zu streben. Daher müssen die Brüche von der Form

$\frac{\cos \varphi_\lambda}{\cos \varphi_{\lambda+1}}$ , die alle kleiner als 1 sind, dem Grenzwert 1 zustreben. Ist

$A$  ein beliebig nahe an 1 gewählter echter Bruch, so kann man den Index  $\lambda$  so gross nehmen, dass von nun an alle Brüche von der Form

$\frac{\cos \varphi_\lambda}{\cos \varphi_{\lambda+1}} > A$  sind.

Da nun

$$r_{\lambda+1} = \frac{\cos \varphi_\lambda}{\cos \varphi_{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{2} \left( r_\lambda + \frac{1}{r_\lambda} \right)$$

ist, so ist von der bestimmten Stelle an

$$1) \quad r_{\lambda+1} < \frac{1}{2} \left( r_\lambda + \frac{1}{r_\lambda} \right),$$

$$2) \quad r_{\lambda+1} > A \cdot \frac{1}{2} \left( r_\lambda + \frac{1}{r_\lambda} \right).$$

In Folge der 2. Bedingung bleiben alle  $r_\lambda$  grösser als  $A$ . In Folge der 1. Bedingung müssen die  $r_\lambda$  von einer gewissen Stelle an kleiner als  $\frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{A} \right)$  bleiben. Denn wenn die  $r_\lambda$  auch anfangs noch grösser als diese Zahl sind, so müssen sie doch in Folge der ersten Bedingung, so lange sie grösser als 1 sind, beständig abnehmen und der Zahl 1 als Grenzwert zu streben. Daher muss schliesslich ein bestimmtes  $r_\lambda$  kleiner als  $\frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{A} \right)$  werden, und von nun an sind alle  $r$  kleiner als diese Zahl. Wird aber in Folge der Rechnung ein  $r$  einmal kleiner als 1, so bleibt es doch wegen der 2. Bedingung grösser als  $A$ , und das weiter folgende  $r$  muss wegen der 1. Bedingung kleiner als  $\frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{A} \right)$  sein. Da die  $r_\lambda$  von einer gewissen Stelle an grösser als  $A$  und kleiner als  $\frac{1}{2} \left( A + \frac{1}{A} \right)$  bleiben und  $A$  beliebig nahe an 1 gewählt werden konnte, so ist

$$\lim r_\lambda = 1.$$

Daher haben die Brüche von der Form

$$\frac{r_\lambda^2 - 1}{r_\lambda^2 + 1}$$

den Grenzwert 0, und wegen der Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi_{\lambda+1} = \operatorname{tang} \varphi_{\lambda} \cdot \frac{r_{\lambda}^2 - 1}{r_{\lambda}^2 + 1}$$

ist  $\lim \varphi_{\lambda} = 0$ .

Damit ist bewiesen, dass die Reihe der  $x$  dem Grenzwert  $+1$  zustrebt.

Ist der reale Theil von  $x$  negativ, so multiplicire man alle Gleichungen des Algorithmus mit  $-1$  und betrachte die Reihe der  $(-x)$ . Diese hat nach dem Vorhergehenden den Grenzwert 1, also hat die Reihe der  $x$  den Grenzwert  $-1$ .

Der allgemeine Fall, dargestellt durch die Gleichungen

$$x_{\lambda+1} = \frac{1}{2} x_{\lambda} + \frac{a}{2x_{\lambda}}$$

wird durch die Substitution

$$x_{\lambda} = \xi_{\lambda} \cdot \sqrt{a},$$

wobei  $\sqrt{a} = \sqrt{a} \cdot e^{\frac{i\omega}{2}}$  sein soll, auf den im Vorhergehenden betrachteten besonderen Fall zurückgeführt, denn es entstehen nach Division durch  $\sqrt{a}$  die Gleichungen

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{1}{2} \left( \xi_{\lambda} + \frac{1}{\xi_{\lambda}} \right),$$

und da nun

$$\lim \xi = \pm 1$$

ist, so ist der Grenzwert der  $x$  in der einen Halbebene gleich  $\sqrt{a}$ , in der andern gleich  $-\sqrt{a}$ , während auf der trennenden Geraden keine Convergenz stattfindet.

Ich will zum Schluss nur noch kurz nachweisen, dass ein ähnliches Verhalten nicht mehr stattfinden kann, sobald  $n$  grösser als 2 ist. Die Strahlen, welche die Winkel der benachbarten  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln aus  $a$  halbiren, theilen die Ebene in  $n$  Winkelräume ein. Zwei aufeinander folgende Werthe von  $x$  brauchen jetzt nicht mehr, wie bei  $n = 2$ , in demselben Winkelraum zu liegen. Die zwischen ihnen bestehende Gleichung

$$x_1 = \frac{n-1}{n} x + \frac{a}{n x^{n-1}}$$

ist nämlich für  $x$  vom  $n^{\text{ten}}$  Grade und hat demnach  $n$  Wurzeln. Ist  $x_1 = 0$ , so ist

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{n-1}}.$$

Diese  $n$  Werthe liegen auf den  $n$  vorhin genannten Strahlen. Da nun  $x$  eine stetige Function von  $x_1$  ist, so müssen die  $n$  Werthe von  $x$ , falls  $x_1$  unendlich klein wird, in beliebige Nähe der  $n$  Werthe von  $\sqrt[n]{-\frac{\alpha}{n-1}}$  rücken; es können also höchstens zwei mit  $x_1$  in demselben Winkelraum liegen, die übrigen  $n - 2$  Werthe müssen in anderen Winkelräumen sich befinden.

Mainz, im April 1894.

---