

Ein Satz über Kegelschnitte mit einigen Anwendungen auf die perspektive Affinität.

Von

Fritz Carlson in Upsala.

§ 1.

Wir betrachten ein Büschel Kegelschnitte κ mit den zwei Grundpunkten a, b ; die anderen beiden mögen in O zusammenfallen, so daß alle κ eine feste Gerade OH in O berühren. Eine beliebige Gerade l schneidet die Kegelschnitte des Büschels in Punktpaaren einer Involution, deren Doppelpunkte von den zwei l berührenden Kegelschnitten κ geliefert werden. Der Schnittpunkt H der Verbindungsgerade ab mit der Tangente in O hat dieselbe Polare OII in bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels; sie liegt zu OH harmonisch bezüglich Oa, Ob . Es seien κ_s, κ_t zwei Kegelschnitte im Büschel κ und $\sigma_1 \tau_1, \sigma_2 \tau_2$ die gemeinsamen Tangenten, wo σ_1, σ_2 die Berührungspunkte auf κ_s, τ_1, τ_2 die auf κ_t sind. Die Tangenten schneiden sich auf OII ; es sei II der Schnittpunkt. Oa, Ob liegen zu $O\sigma_1, O\tau_1$ und zu $O\sigma_2, O\tau_2$ harmonisch; ferner sind OH, OII zu $O\sigma_1, O\sigma_2$ und zu $O\tau_1, O\tau_2$ harmonisch konjugiert. Es sei k_0 ein Kegelschnitt, der Oa, Ob in A', B' berührt; die Polare $A'B'$ von O werde mit o bezeichnet. Wir projizieren von O aus die Punkte von κ_s, κ_t auf k_0 und auf o . Ein Punkt s von κ_s wird nach S' auf o , und nach S und S^* auf k_0 projiziert, wo dann S, S^* zu O und S' konjugiert sind. In ähnlicher Weise werde die Projektion eines Punktes auf o wie z. B. II mit II' bezeichnet.

Eine Gerade l schneidet κ_s in s_1, s_2 ; κ_t in t_1, t_2 . Die Punktpaare $S'_1, S'_2; T'_1, T'_2; A', B'$ gehören derselben Involution an. Die Kegelschnitte durch $T_1, T_1^*; T_2, T_2^*$ schneiden auf o eine Involution aus; ihr gehören die Paare $A', B'; T'_1, T'_2$ an. Folglich gibt es einen (und nur einen) Kegelschnitt k durch $T_1, T_1^*; T_2, T_2^*; S'_1, S'_2$. Lassen wir l variieren, so erhalten wir ein Kegelschnittssystem k , von dem wir zeigen wollen, daß *alle* k durch zwei feste Punkte gehen. Es muß jedoch dabei das Büschel

ausgenommen werden, dessen Kegelschnitte k_0 in A', B' berühren. Um unsere Behauptung zu beweisen, nehmen wir die Punkte T_1, T_1^* fest an, so daß die Gerade l sich um einen festen Punkt x auf κ_i dreht. Die Paare S'_1, S'_2 bilden eine feste Involution, und ein beliebiger von den hier auftretenden Kegelschnitten k ist aus S'_1, S'_2 und T_1 bestimmt. Zwei solche Kegelschnitte schneiden sich in $T_1, T_1^*; Q, Q^*$. Weil nun die Kegelschnitte durch diese vier Punkte auf o die eben betrachtete Involution ausschneiden, sind sie mit den Kegelschnitten k identisch. Wenn l durch O geht, zerfällt k in das Geradenpaar Ox, OH ; also müssen Q, Q^* auf OH liegen. Lassen wir nun die Gerade l sich um einen anderen festen Punkt y auf κ_i drehen, so erhalten wir ein zweites Büschel von Kegelschnitten k , das auch zwei Grundpunkte auf OH hat. Die beiden Büschel, die zu x und y gehören, haben einen Kegelschnitt, den von $l = xy$ bestimmten, gemein. Also müssen die Punkte Q, Q^* fest sein. Sie können auf folgende Weise erhalten werden: Wenn l mit $\sigma_1 \tau_1$ zusammenfällt, geht k in die beiden Tangenten über, die aus Σ'_1 an k_0 gelegt werden können und die OH in Q, Q^* schneiden. Ebenso liefert $l = \sigma_2 \tau_2$ die beiden Tangenten an k_0 von Σ'_2 aus; $T_1 T_1^* T_2 T_2^*$ ist ein in k_0 eingeschriebenes Viereck, die Tangenten in diesen Punkten an k_0 bilden ein um k_0 umschriebenes Viereck. Die Diagonalen des letzteren sind OII, o und OH ; sie verbinden die Diagonalpunkte II', Q', O des ersteren und bilden ein Polardreieck von k_0 .

Wir können nun umgekehrt von O, o, k_0 und Q ausgehen und haben dann den folgenden Satz:

Sei k_0 ein fester Kegelschnitt, o die Polare eines Punktes O in bezug auf k_0 . Unter k seien die Kegelschnitte verstanden, die durch einen festen Punkt Q gehen und in bezug auf welche o die Polare von O ist. a, b seien zwei beliebige Punkte auf den Tangenten von O aus an k_0 , κ das Büschel, dessen Kegelschnitte OQ in O berühren und durch a, b gehen. Dann lassen sich die κ in Paare κ_s, κ_t mit folgender Eigenschaft ordnen: Ein Kegelschnitt k schneidet o in zwei, k_0 in vier Punkten. Die ersteren werden aus O in s_1, s_2 auf κ_s , die letzteren in t_1, t_2 auf κ_t projiziert. Dann liegen, für jeden k , die vier Punkte s, t in einer Geraden.

Um eine für das folgende zweckmäßige Bestimmung von κ_s, κ_t zu erhalten, bemerken wir, daß diese Kegelschnitte perspektiv liegen mit II als Zentrum, ab als Achse und C_s, O als entsprechenden Punkten, wenn C_s den zweiten Schnittpunkt von OII mit κ_s bezeichnet. Wird also κ_s beliebig, aber OQ in O berührend gewählt, so ist die Achse ab und C_s bestimmt; es genügt folglich II zu bestimmen. Die harmonischen Polaren durch Q in bezug auf k_0 schneiden eine Involution auf o aus, deren

Doppelpunkte Σ'_1, Σ'_2 sind. Wird diese Involution aus O auf κ_s projiziert, so ist II ihr Zentrum. Weil schon OII bekannt ist, genügt es ein Punktepaar dieser Involution aufzusuchen.

Der Satz läßt verschiedene Anwendungen zu. Hier wollen wir den folgenden Fall betrachten. Es sei π eine Ebene und P ein Punkt in π , $PQ = q$ eine Gerade außerhalb π . Ein Kegel K mit der Spitze P , mit π als Symmetrieebene und q als Erzeugender schneidet π in zwei Erzeugenden s'_1, s'_2 und hat zwei Reihen zu π senkrechter Kreisschnitte; die Spurlinien der beiden Kreisschnitte durch P in der Ebene π seien t'_1, t'_2 . K ist offenbar durch Angabe von s'_1, s'_2 oder durch Angabe von t'_1, t'_2 bestimmt, und zwar kann eines von diesen Geradenpaaren beliebig gewählt werden. Man erhält in dieser Weise eine gewisse Beziehung zwischen den Geraden s' und t' durch P und zwar der Art, daß ein Paar s'_1, s'_2 ein Paar t'_1, t'_2 ein-eindeutig bestimmt. Diese Beziehung hat auf Grund der geometrischen Bedeutung der Geradenpaare s' und t' gewisse Eigenschaften, die es ermöglichen, ihr eine sehr einfache geometrische Erzeugung zu geben. Um diese zu erhalten, betrachten wir die Schnitte der unendlich-fernen Ebene mit π, K, q , den Geradenpaaren s', t' und der Normalen PO von π . Sie seien mit o , bzw. $k, Q, S'_1, S'_2, T'_1, T'_2$ und O bezeichnet. K ist offenbar durch P und k bestimmt; die Kegelschnitte k gehen durch Q , und o ist die Polare von O in bezug auf alle k . k_0 sei der absolute Kegelschnitt. Die Schnittpunkte von k mit o sind S'_1, S'_2 ; die Schnittpunkte von k und k_0 werden aus O durch OT'_1, OT'_2 projiziert. Wir können nun die Kegelschnitte κ_s, κ_t des oben bewiesenen Satzes einführen. Betrachten wir zwei korrespondierende Geradenpaare s', t' , so schneiden die zu π senkrechten Ebenen durch diese Geraden κ_s bzw. κ_t in den Punkten $s_1, s_2; t_1, t_2$ einer Geraden. Und die Konstruktionen in der unendlich fernen Ebene können in folgender Weise nach π verlegt werden: Wir projizieren κ_s, κ_t von P aus; die projizierenden Kegel berühren sich längs der Erzeugenden PO , und die gemeinsame Tangentialebene ist die orthogonal-projizierende Ebene von q , deren Spurlinie in π mit q' bezeichnet sei. Schneiden wir diese Kegel mit einer zu π parallelen Ebene, und werden die Schnittkurven auf π orthogonal projiziert, so erhalten wir zwei Kegelschnitte κ'_s, κ'_t , die q' in P berühren; zwei korrespondierende Geradenpaare s', t' durch P schneiden κ'_s bzw. κ'_t in Punkten einer Geraden. Damit ist die gewünschte Erzeugung der Beziehung zwischen s' und t' erreicht, und es erübrigt, die Konstruktion von κ'_s, κ'_t anzugeben. Für die Vereinfachung der Erzeugung ist die Bemerkung von besonderem Werte, daß man für κ'_s, κ'_t Kreise wählen kann. Denn im Satze S. 139 können a, b nach A', B' verlegt werden; weil hier A', B' die Kreispunkte von π sind, werden die Kegel durch κ_s, κ_t durch die zu π parallelen Ebenen in Kreise

wenn r_s, r_t die Halbmesser sind. Es ist also

$$\frac{r_s}{r_t} = \left(\frac{\Pi' X}{P \Pi'} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \gamma},$$

$$r_t = r_s \cos^2 \gamma.$$

Folglich:

P sei ein Punkt der Ebene π , $q = PQ$ eine Gerade, in π nicht enthalten und zu π nicht normal, q' deren Orthogonalprojektion auf π , K die Kegel, die P als Spitze, π als Symmetrieebene und q als Erzeugende haben. Dann lassen sich die Kreise κ' , die q' in P berühren, in Paaren κ'_s, κ'_t so ordnen, daß die Erzeugenden von K in π den Kreis κ'_s , die Kreisschnitte von K durch P und zu π senkrecht den Kreis κ'_t in Punkten schneiden, die in einer Geraden liegen. Und zwar kann der Mittelpunkt M'_s von κ'_s beliebig gewählt werden; er bestimmt den Mittelpunkt M'_t von κ'_t , indem man das Lot von M'_s auf die Umlegung $q^{(0)}$ fällt und vom Fußpunkte dieses Lotes ein Lot auf $P M'_s$ fällt, das dann M'_t ausschneidet.

Es wäre nun möglich, nachdem dies Resultat gewonnen ist, es nachträglich auf elementar-geometrischem Wege zu verifizieren; was ich jedoch hier nicht ausführe. Ich möchte aber noch die Bemerkung hinzufügen, daß die Beziehung zwischen den Geradenpaaren s' und t' ein spezieller Fall einer allgemeinen Beziehung zwischen zwei ∞^1 -Systemen von der Art ist, daß jedes Paar von Elementen des einen Systems ein Paar des anderen ein-eindeutig bestimmt. Auf diese allgemeine Beziehung und deren geometrische Erzeugung werde ich in einer späteren Note zurückkommen.

Je nachdem die Sekante l den Kreis κ'_t reell schneidet oder nicht, sind die zu π senkrechten Kreisschnitte reell oder imaginär. Wenn l κ'_t berührt, erhält man die Umdrehungskegel, die q enthalten und symmetrisch zu π liegen. Für die Mittelpunktsflächen zweiten Grades, die K als Asymptotenkegel haben, ergibt sich die Bedeutung der Geradenpaare s' und t' sofort. Ferner ist der obige Satz für die Konstruktion der Fokalstrahlen eines Kegels verwendbar. Denn wenn der unendlich ferne Kegelschnitt k in bezug auf k_0 reziproziert wird, geht K in den Normalenkegel \bar{K} über, t'_1, t'_2 in die Fokalstrahlen \bar{t}_1, \bar{t}_2 und \bar{s}_1, \bar{s}_2 behalten ihre Bedeutung. Die den Kreisen κ'_s, κ'_t entsprechenden Kegelschnitte $\bar{\kappa}_s, \bar{\kappa}_t$ ergeben sich leicht, wenn man z. B. den Kreis mit der Mitte P und dem Radius $\sqrt{-1}$ zum Fundamentalkegelschnitt wählt. Ich fasse nur das Resultat zusammen: \bar{K} sind die Kegel, die π als Symmetrieebene und den Punkt P in π als Spitze haben, und die eine gegebene Ebene \bar{q} berühren. Die Erzeugenden eines Kegels \bar{K} in π seien \bar{s}_1, \bar{s}_2 ; die Fokalstrahlen desselben Kegels in π seien \bar{t}_1, \bar{t}_2 . Dann lassen sich die Parabeln $\bar{\kappa}$, die die Spurlinie q' von \bar{q}

in π als gemeinsame Achse, den Punkt P als gemeinsamen Brennpunkt haben, in Paare \bar{x}_s, \bar{x}_t so ordnen, daß die Tangenten an \bar{x}_s , die zu \bar{s}_1, \bar{s}_2 parallel sind, und die zu \bar{t}_1, \bar{t}_2 parallelen Tangenten an \bar{x}_t sich in einem Punkt schneiden. Die Parameter von \bar{x}_s, \bar{x}_t verhalten sich wie $\cos^2 \gamma : 1$, wenn γ der Winkel zwischen π und \bar{q} ist. Die Umdrehungskegel \bar{K} ergeben sich folglich, wenn der Schnittpunkt der erwähnten Tangenten an \bar{x}_s die Parabel \bar{x}_t durchläuft.

§ 2.

Von der oben erhaltenen Konstruktion der Geradenpaare s' und t' wollen wir eine spezielle Anwendung machen. Es handelt sich um die *räumliche Erzeugung der Beziehung zweier affinen ebenen Systeme mittels Parallelprojektion*. Zur Orientierung mögen einige Bemerkungen über die affine Verwandtschaft vorausgeschickt werden.

Zwei ebene projektive Systeme sind affin, wenn die unendlich fernen Geraden sich entsprechen. Liegen die Systeme in derselben Ebene, so ist also die unendlich ferne Gerade dieser Ebene eine Doppelgerade in der projektiven Beziehung. Weil dann schon zwei entsprechende Geraden gegeben sind, wird die Beziehung durch Angabe zweier Dreiecke bestimmt. Bei zwei entsprechenden Geraden entsprechen sich die unendlich fernen Punkte; die Geraden tragen daher ähnliche Punktreihen A, B, C, \dots ; A', B', C', \dots . Es muß also $AB:A'B'$ konstant sein; zu jeder Richtung a des einen Systems gibt es eine Zahl $\nu = \nu(a)$, die das konstante Verhältnis zwischen einer Strecke von dieser Richtung und der entsprechenden Strecke angibt. Ich erinnere ferner daran, daß die Flächeninhalte entsprechender Figuren ein konstantes Verhältnis σ haben, was sich übrigens aus den Bemerkungen unten ergeben wird. Die Doppelemente können bei der Affinität, wie bei der allgemeinen Projektivität, in verschiedener Weise auftreten. Sie können speziell in unendlicher Anzahl vorhanden sein. Es gibt dann eine Gerade p , die nur Doppelpunkte trägt, und einen Punkt O , der nur Doppelstrahlen trägt. Es kann dabei O außerhalb oder auf p liegen. Die Systeme sind dann *perspektiv* mit p als Perspektivitätsachse und O als Zentrum. Wenn p endlich, O unendlich ist, liegt die eigentliche perspektive Lage vor; die Beziehung ist dann offenbar von p und irgend zwei entsprechenden Punkten bestimmt. Wird in diesem Falle die Ebene des einen Systems um p um einen beliebigen Winkel gedreht, so kann das eine System aus dem anderen durch Parallelprojektion abgeleitet werden. Umgekehrt gibt die Parallelprojektion eines ebenen Systems und dessen Umlegung in die Bildebene immer affine Systeme in perspektiver Lage. Die Bedingung dafür, daß zwei affine ebene Systeme in perspektive Lage gebracht werden können, ist offenbar die, daß es eine

reelle Richtung mit $\nu = 1$ gibt. Nun bildet gerade die Affinität den Ausnahmefall bei dem allgemeinen Satz von Poncelet, daß zwei ebene projektive Systeme in reelle perspektive Lage gebracht werden können. Man kann sich dies klarmachen, wenn man z. B. einen Kreis des einen Systems und die entsprechende Ellipse betrachtet. Wird das eine System so verschoben, daß die Mittelpunkte dieser Kurven sich decken, so müssen sich der Kreis und die Ellipse reell schneiden, wenn eine reelle perspektive Lage möglich ist. Es ergibt sich hieraus, daß eine reelle affine Transformation nicht immer auf eine reelle perspektive Transformation zurückgeführt werden kann (es muß vielmehr eine gewisse *Ungleichung* erfüllt sein; vgl. z. B. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung usw. (1880), S. 412 ff.), daß sie aber immer aus einer Ähnlichkeitstransformation und einer perspektiven Transformation zusammengesetzt werden kann. Daraus läßt sich z. B. das oben erwähnte Vorhandensein der Konstante σ erschließen.

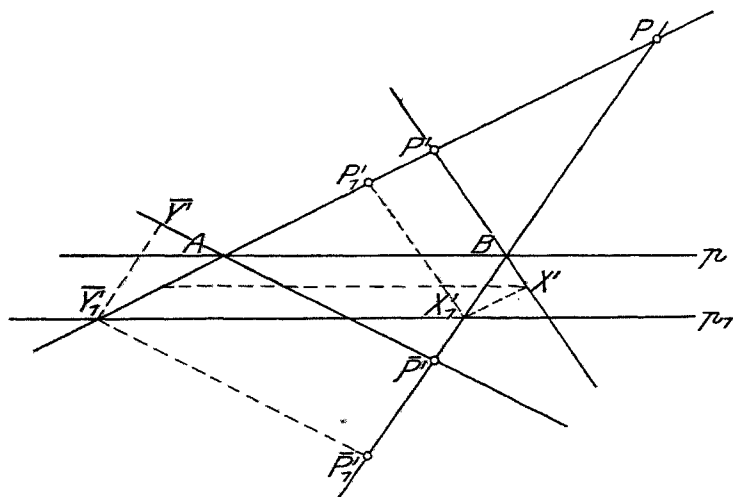


Fig. 2.

Nach dieser Rekapitulation einiger Sätze der elementaren projektiven Geometrie wollen wir eine besondere Definition der perspektiven Affinität herleiten. p sei die Perspektivitätsachse, P und P' zwei entsprechende Punkte (Fig. 2). Die Systeme wollen wir mit (P) und (P') bezeichnen; (P) soll festliegen, (P') dagegen werde in der Ebene π des Systems (P) verschoben und gespiegelt. Bei der Spiegelung von (P') an p geht (P') in das symmetrische System (\bar{P}') über, das mit (P) perspektiv liegt mit p als Achse und dem unendlich fernen Punkt von PP' als Zentrum. Die *Affinitätsrichtungen* PP' , $P\bar{P}'$ seien mit s_1, s_2 bezeichnet, wenn sie als

dem Systeme (P) angehörig betrachtet werden; ihnen entsprechen in (P') $s'_1 = s_1$, $s'_2 = P'B$. Einer zu p parallelen Strecke in (P) entspricht eine gleich lange in (P') und (\bar{P}') . Wird daher (P') in der Richtung s_1 oder (\bar{P}') in der Richtung s_2 verschoben, so wird die perspektive Lage beibehalten, und die Affinitätsrichtungen werden nicht geändert. Bei der Verschiebung liegt immer ein Punkt X' auf $P'B$ mit seinem entsprechenden auf PB , bzw. ein Punkt \bar{Y}' auf $\bar{P}'A$ mit dem entsprechenden auf PA vereinigt. Es sei (Fig. 3) C der Schnittpunkt der Mittennormale von PP' mit p ; dann ist $PC = P'C = \bar{P}'C$. PC kann daher als Perspektivitätsachse gewählt werden und, um die Systeme in perspektive Lage mit PC als Achse zu bringen, hat man (P') bzw. (\bar{P}') um C zu drehen. Weil nun $AB'P'C = AB'\bar{P}'C = ABPC$, so gelangt B' , bei der Drehung von (P') , nach B'_1 auf PB . Die Affinitäts-

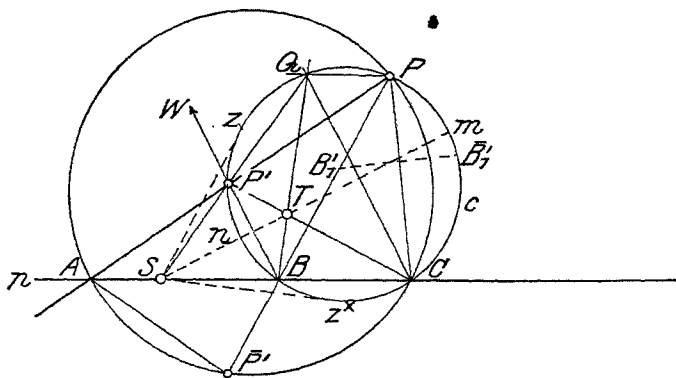


Fig. 3.

richtung in der neuen perspektiven Lage von (P) und (P') ist mithin s_2 . Bei der Drehung von (\bar{P}') gelangt \bar{B}' nach \bar{B}_1' , dem zu B_1' symmetrischen Punkt bezüglich PC . Nun liegen die Punkte P, P', B, C auf einem Kreise c ; der Symmetrie halber geht c durch \bar{B}_1' . Die Affinitätsrichtung $B\bar{B}_1'$ ist folglich s_1 . Die Richtungen AB und PC , die Strecken tragen, denen gleich lange entsprechen, nennen wir *Affinitätsachsen*; wir wollen sie mit r_1, r_2 bezeichnen. Es kann deren drei nicht geben, es sei denn, daß die Systeme kongruent (symmetrisch) sind. Wird in der Fig. 3 $PQ \parallel p$ gezogen, so ist $AQPP' = ABPC$; übrigens liegen die Punkte A, C, P, \bar{P}' auf einem Kreise. *Es gibt zwei Affinitätsachsen und zwei zugehörige Affinitätsrichtungen, von den Verschiebungen abgesehen also vier perspektive Lagen von (P) und (P') , (\bar{P}') . Die Achsen und die Affinitätsrichtungen haben dieselben Bissektrizen.*

Gehen wir umgekehrt von zwei Paaren von Richtungen $s_1, s_2; r_1, r_2$ aus, die dieselben Bissektrizen haben, so können s_1, s_2 als die Affinitäts-

richtungen, r_1, r_2 als die Affinitätsachsen einer perspektiven Affinität betrachtet werden, die dann eindeutig bestimmt ist. Denn in perspektiver Lage mit $p \parallel r_1$ als Perspektivitätsachse entspricht z. B. s_1 sich selbst. Ist P beliebig und wird $PA \parallel s_1$, $A\bar{P}'$ symmetrisch zu AP bezüglich p und $P\bar{P}' \parallel s_2$ gezogen, so ist \bar{P}' und mithin P' bestimmt. *Eine perspektive Affinität kann durch Angabe der beiden Affinitätsachsen in dem einen System und der beiden Affinitätsrichtungen definiert werden.* Für die Achsen ist die oben eingeführte Verhältniszahl $\nu = 1$; für die Affinitätsrichtungen ist $\nu = \sigma$, was sich z. B. aus der Betrachtung eines Parallelogramms in (P) ergibt, dessen Seiten die Richtungen r_1, s_1 haben.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen haben wir die Punkte A und C endlich angenommen. Sie können unendlich fern werden, und man erhält dann spezielle Affinitäten, indem sich *die vier Richtungen s und r auf zwei reduzieren*, was in dem oben betrachteten Fall nicht möglich ist. Wenn A unendlich fern ist, fallen s_1 und r_1, s_2 und r_2 zusammen; σ ist dann und offenbar nur dann $= 1$ (*flächentreue Affinität*). Wenn C unendlich fern ist, muß s_1 auf r_1 senkrecht stehen; dann fallen s_1 und s_2, r_1 und r_2 zusammen (*orthogonale Affinität*).

Indem wir jetzt zur perspektiven Lage von (P) und (P') mit der Perspektivitätsachse $p \parallel r_1$ zurückkehren, drehen wir die Ebene π' von (P') um einen beliebigen Winkel um p . (P') wird dann aus (P) durch Parallelprojektion in der Richtung $PP' = g$ oder auch (P) aus (P') erzeugt. Es sei $ABC \dots$ ein Polygon in (P) ; die zu g parallelen Strahlen durch seine Ecken bestimmen ein Prisma \mathfrak{P} , aus dem das entsprechende Polygon $A'B'C' \dots$ von π' ausgeschnitten wird. Zunächst suchen wir auf \mathfrak{P} alle ebenen Schnitte auf, die mit $A'B'C' \dots$ in der Weise kongruent sind, daß die bei der Kongruenz entsprechenden Ecken auf denselben Kantenlinien liegen. Jedes derartige Polygon und nur ein solches bestimmt mit $ABC \dots$ diejenige Affinität zwischen (P) und (P') , von der wir ausgegangen sind, und die durch die Paare s, r definiert ist. Die mit π' parallelen Ebenen liefern solche Schnitte und schneiden π in Parallelen zu r_1 . Wir erhalten ferner solche Schnitte durch die Ebenen, die zu π' in bezug auf eine zu g senkrechte Ebene symmetrisch sind. Diese müssen dann π in Parallelen zu r_2 schneiden. Die verschiedenen perspektiven Lagen in π von (P) und $(P'), (\bar{P}')$, die wir oben betrachteten, entsprechen also den Parallelverschiebungen von π' in der Richtung g und den Spiegelungen von π' an zu g senkrechten Ebenen. Es kann nun aber g und mithin \mathfrak{P} variiert werden. Bei der Drehung von π' um p erzeugt g einen Kegel K , der P als Spitze und den Kreis über dem Durchmesser $P'\bar{P}'$ als Basiskurve hat. Man erhält dann ∞^1 Prismen \mathfrak{P} ,

deren Kantenlinien zu den Erzeugenden von K parallel sind. Die ebenen Schnitte $A_1 B_1 C_1 \dots, A_2 B_2 C_2 \dots$ irgend zweier von diesen Prismen sind mittels $ABC \dots$ affin, und die entsprechenden Punkte A_1, A_2 liegen auf Kantenlinien durch A . Nun können, wie unten gezeigt wird, diese Schnitte in unendlich vielen Weisen so gewählt werden, daß die genannte Affinität in Kongruenz übergeht. Unter diesen kongruenten Schnitten findet sich der oben mit $A'B'C' \dots$ bezeichnete, und dieser ist der einzige, der für alle Prismen gemeinsam ist; dabei sind immer die mit $ABC \dots$ kongruenten Schnitte außer Betracht gelassen worden. Der Kegel K definiert daher die Affinität zwischen (P) und (P') in der Weise, daß (P') aus dem für alle \mathfrak{P} gemeinsamen Schnitt bestimmt ist. Dies ergibt sich auch sofort, wenn wir die Beziehung von K zu den Paaren r, s näher betrachten. π ist eine Symmetrieebene von K ; s_1, s_2 sind die Erzeugenden in π . Der Basiskreis über $P'\bar{P}'$ steht auf p_1 senkrecht. Nun sind die Kreisschnitte von K bekanntlich Wechselschnitte zu den Erzeugenden in π , und weil r_1, r_2 dieselbe Eigenschaft haben, muß der zweite Kreisschnitt auf r_2 senkrecht stehen. *Jeder Kegel zweiter Ordnung K definiert also eine reelle perspektive Affinität. Wird dieselbe in die zu den reellen Kreisschnitten senkrechte Symmetrieebene π verlegt, so liefern die Erzeugenden in π die Affinitätsrichtungen, die Normalen zu den Kreisschnitten die Affinitätsachsen und die Erzeugenden von K die Richtungen, in denen das eine System in dem anderen parallelprojiziert werden kann.* Es muß jedenfalls vorausgesetzt werden, daß K eigentlich und auch kein Umdrehungskegel ist. Im letzteren Falle artet die Affinität aus; bei einer orthogonalen Affinität geht K in eine zu π senkrechte (Doppel-) Ebene über.

Die Anwendung des Satzes S. 139 ist nun unmittelbar. Wir betrachten das System (P) in π und eine nicht zu π senkrechte Richtung $PQ = q$. Die Aufgabe, die mit (P) affinen Systeme (P') zu bestimmen, die in (P) in der Richtung q parallelprojiziert werden können, erhält die folgende Lösung. Nach § 1 werden die Kreise κ_s, κ_t (wir lassen hier die Akzente weg) konstruiert; jeder Sekante l entspricht dann eine bestimmte Affinität der verlangten Eigenschaft, indem ihre Schnittpunkte mit κ_s bzw. κ_t von P aus projiziert die Affinitätsrichtungen bzw. die Normalen der Affinitätsachsen liefern. Die letzteren sind reell, wenn l den Kreis κ_t reell schneidet; geht l durch P , so erhält man eine unbestimmte orthogonale Affinität mit der Achse senkrecht zu q' . Die angegebene Konstruktion liefert in erster Linie die Normalen der Achsen. l schneide κ_s in s_1, s_2 , so daß $Ps_1 = s_1, Ps_2 = s_2$. Π ist der Ähnlichkeitspunkt zweier Systeme, die wir mit (κ_s) und (κ_t) bezeichnen können. *Wird l als zum Systeme (κ_t) gehörig betrachtet, $l = l_t$, so schneidet die*

entsprechende Gerade l_s den Kreis κ_s in r_1, r_2 , so daß $Pr_1 = r_1, Pr_2 = r_2$ die Achsen sind. Denn Pr_2 in (κ_s) entspricht $C_i t_1$ in (κ_i) , wenn t_1, t_2 die Schnittpunkte von l und κ_i sind, und diese Geraden sind parallel. Es ist also $Pr_2 \perp Pt_2$, wie die Behauptung besagt. Dies liefert sofort die Antwort auf die Frage, wenn s_1, s_2 mit r_1 bzw. r_2 zusammenfallen. Die flächentreuen Affinitäten werden also von den Sekanten l durch den Ähnlichkeitspunkt Π geliefert¹⁾. Wir können uns die allgemeinere Aufgabe stellen, die Affinitäten mit gegebenem Flächenverhältnis σ zu bestimmen. Aus der Fig. 3 ergibt sich leicht

$$(1) \quad \sigma = \sin \alpha : \sin \beta,$$

wenn α der Winkel (r_1, r_2) oder (t_1, t_2) und β der Winkel (s_1, s_2) ist. Es müssen also die Sehnen von l in κ_s und κ_i ein konstantes Verhältnis haben und mithin l die gemeinsame Tangente an zwei mit κ_s bzw. κ_i konzentrischen Kreisen sein. Diese Kreise werden einander ein-eindeutig zugeordnet, wie sofort klar ist. Wir wollen die Einhüllende E von l bestimmen und beweisen zu diesem Zwecke zunächst den Hilfssatz:

Es seien c_1, c_2 zwei Büschel Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Grundpunkten a, b . Die Kegelschnitte c_1 haben in a, b feste Tangenten, ebenso die c_2 . Ordnen wir die Kegelschnitte der beiden Büschel einander projektiv zu, so umhüllen die gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte eine Kurve vierter Klasse. Wenn in den beiden tangentiellen Büscheln der Kegelschnitt a, b sich selbst entspricht, so zerfällt die Einhüllende in zwei Kegelschnitte a, b und E . Denn die Tangenten der Einhüllenden von einem Punkte U aus sind die gemeinsamen Strahlen zugeordneter Paare in den beiden aufeinander projektiv bezogenen Involutionen von Tangenten aus U an den c_1 und den c_2 . Es gibt deren vier. Wenn der Kegelschnitt a, b sich selbst entspricht, gehören Ua, Ub für jede Lage von U zu diesen Tangenten. Der Kegelschnitt a, b bildet also einen Teil der Einhüllenden; der Rest ist der Kegelschnitt E .

Wir wählen nun für a, b die Kreispunkte und als Tangenten von c_1, c_2 in diesen Punkten die nach ihnen gehenden Strahlen von M_s bzw. M_i aus. Dann stellen c_1, c_2 die Büschel der zu κ_s, κ_i konzentrischen Kreise dar, die, wenn σ gegeben ist, projektiv aufeinander bezogen sind und zwar so, daß der Kegelschnitt a, b sich selbst entspricht. Die Gerade l umhüllt folglich einen Kegelschnitt E . Unabhängig von dem Werte von σ entsprechen sich immer $c_1 = \kappa_s, c_2 = \kappa_i$. E gehört also dem von κ_s und κ_i definierten tangentiellen Büschel an. Demnach:

¹⁾ Die Sekanten l durch P können außer Betracht gelassen werden.

Die Affinitäten mit gegebenem Flächenverhältnis σ , die zur gegebenen Projektionsrichtung q gehören, werden von den Tangenten l eines bestimmten, dem tangentiellen Büschel κ_s, κ_t angehörenden Kegelschnittes E bestimmt. Die konstruktive Behandlung von E ergibt sich unmittelbar hieraus, indem E mit κ_s perspektiv liegt mit dem Zentrum Π und mit P, C_s als entsprechenden Punkten. Wird also, für gegebenes σ , eine einzige der Geraden l konstruiert, was nach (1) leicht auszuführen ist, so ist E bestimmt, und man erhält sofort die Perspektivitätsachse. Es bietet auch keine Schwierigkeiten, die metrischen Verhältnisse bei E festzustellen. $M_s M_t$ ist eine Achse und P ein Scheitel. Ist A der zweite Scheitel, so liefert (1) sogleich die Länge der Achse PA in σ ausgedrückt. Die Fluchtgerade ω_s in (κ_s) wird leicht erhalten, ferner ergeben sich die Asymptoten, wenn E Hyperbel, oder die zu q' parallele Achse, wenn E Ellipse ist. Man sieht, daß die Tangenten l von E den Kreis κ_t reell schneiden und folglich reelle Affinitäten liefern, wenn A innerhalb der Strecke PC_t fällt. Dabei entsprechen den A auf HC_t Ellipsen E , die innerhalb κ_t liegen, und den A auf $P\Pi$ Hyperbeln E . Übrigens ist es von vornherein klar, daß bei den reellen Affinitäten

$$0 < \sigma^2 \leq 1 : \cos^2 \gamma = r_s : r_t,$$

sein muß. Die Anwendung von (1) zeigt, daß wenn A sich P nähert, σ^2 zum Grenzwerte $r_s : r_t$ strebt. Für diesen Wert von σ^2 geht dann E in das Punktpaar auf q' über, das dem tangentiellen Büschel κ_s, κ_t angehört; für $\sigma = 1$ geht E , wie schon oben gefunden wurde, in das Punktpaar P, Π und für $\sigma = 0$ in den Kreis κ_t über. Wenn also A die Strecke $C_t P$ beschreibt, geht σ^2 wachsend von 0 bis $r_s : r_t$.

Wir geben jetzt zwei Richtungen q_1, q_2 an und wollen die mit (P) affinen Systeme (P') bestimmen, die sowohl in der Richtung q_1 wie auch in der Richtung q_2 in (P) parallelprojiziert werden können. Indem man zu den Betrachtungen des § 1 zurückkehrt, sieht man, daß die Kegelschnitte k ein Büschel bilden und daß sich also die Sekante l um einen festen Punkt Y dreht. Die Konstruktion ist in der Fig. 4 ausgeführt. q_1, q_2 werden mit einer zu π senkrechten Ebene geschnitten und die Schnittpunkte um die Spurlinie m in π umgelegt. Es ist $m \perp q'_1$ gewählt. Die Umlegungen seien $Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}$, und $\bar{Q}_1^{(0)}$ sei zu $Q_1^{(0)}$ symmetrisch bezüglich m . Die Verbindungsgeraden $Q_1^{(0)} Q_2^{(0)}, \bar{Q}_1^{(0)} Q_2^{(0)}$ schneiden m in Punkten, die aus P durch die Doppelstrahlen der Involution s projiziert werden. Wenn also die Kreise κ_s, κ_t in bezug auf q_1 konstruiert werden, so ergibt sich Y sofort aus den Doppelstrahlen der Involution s ; offenbar muß Y auf q'_2 liegen. Betrachten wir zwei Prismen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ mit gemeinsamer Basis (deren Kantenlinien zu q_1 bzw. q_2 parallel sind), so liefert

die angegebene Konstruktion die Lösung der Aufgabe, *alle ebene Schnitte von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ zu bestimmen, die in der Weise kongruent sind, daß entsprechende Ecken auf Kantenlinien durch dieselbe Ecke des Basispolygons liegen*. Es gibt ∞^1 derartige Schnitte; ihre Ebenen gehen zu je zweien durch dieselben Geraden in π , die Parallelen zu r_1, r_3 .

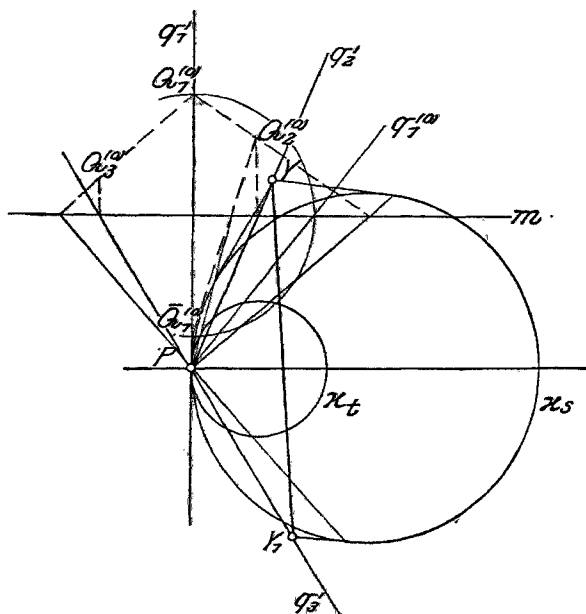


Fig. 4.

Geben wir drei Richtungen q_1, q_2, q_3 an, so ist K vollkommen bestimmt. Werden π_s, π_t in bezug auf q_1 konstruiert und dann, wie oben, das zu q_1, q_2 gehörige Zentrum Y , und in entsprechender Weise das zu q_1, q_3 gehörige Zentrum Y_1 (Fig. 4), so bestimmt $l = YY_1$ das mit (P) affine System (P') , das in den drei Richtungen q in (P) parallelprojiziert werden kann. Betrachten wir drei Prismen auf gemeinsamer Basis (deren Kantenlinien die Richtungen q_i haben), so gibt es ein Polygon und nur eines (die Basis ausgenommen), das auf allen Prismen in der Weise ausgeschnitten werden kann, daß je zwei Ecken, die bei der Kongruenz einander entsprechen, auf Kantenlinien durch denselben Punkt der Basis liegen. Dies Polygon ist reell, wenn $l = YY_1$ den Kreis π_t reell schneidet.

§ 3.

Die oben hergeleitete Definition der Affinität aus den Affinitätsachsen und den Affinitätsrichtungen ist in einer allgemeineren enthalten. Zunächst kann die Affinität durch Angabe zweier Paare endlicher Punkte P, P' ; A, A' und der Reihen auf der unendlich fernen Geraden definiert werden, also durch die Strahlenbüschel in P und P' und die endlichen Punkte A, A' . Indem Verschiebungen und Spiegelungen von (P') immer einbegriffen sind, kann die Strecke $P'A'$ aus PA durch Angabe von $\nu(a)$, $a = PA$, bestimmt werden. Ferner kann die Beziehung der zwei Büschel in einer speziellen Weise definiert werden. Wenn $\Lambda(a, b)$ den einen der beiden Winkel $< \pi$ bedeutet, die a und b einschließen, so können immer, bei zwei projektiven Büscheln und dem beliebigen Strahl a des einen, zwei andere derart gefunden werden, daß

$$(2) \quad \Lambda(a, b) = \Lambda(a', b'); \quad \Lambda(a, c) = \Lambda(a', c').$$

(Chasles, *Traité de géométrie supérieure* (1852), Art. 147). · Gibt man im Büschel in P drei Strahlen a, b, c an und fügt man die Bedingung (2) hinzu, so ist das Büschel in P' bis auf Verschiebungen und Spiegelungen eindeutig bestimmt²⁾. Hieraus ergibt sich, daß eine Affinität durch Angabe in (P) dreier Strahlen a, b, c und der Zahl $\nu(a)$ unter Zufügung der Bedingung (2) bestimmt ist. Für $\nu(a) = 1$ geht diese Definition in die oben hergeleitete über. Denn es ist

$$\Lambda(r_1, s_1) = \Lambda(r'_1, s'_1); \quad \Lambda(r_1, s_2) = \Lambda(r'_1, s'_2)$$

Setzt man, bei zwei projektiven Strahlenbüscheln mit gemeinsamem Scheitel, die Existenz dreier Strahlen a, b, c mit der Eigenschaft (2) voraus, so ergibt sich sofort, daß die Büschel durch eine Drehung bzw. Spiegelung und Drehung in zwei Weisen in involutorische Lage gebracht werden können. Die Büschel seien \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' ; gleichzeitig werde das symmetrische Büschel \mathfrak{B}' betrachtet, so daß wir annehmen können, daß der Drehungssinn in \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' derselbe ist. Ist z. B. der spitze Winkel $(a, b) <$ der spitze Winkel (a, c) , so führt eine Drehung von \mathfrak{B}' gleichzeitig c' in a und a' in c , d. h. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' in involutorische Lage. Bei \mathfrak{B}' führt die Drehung von b' in a zur involutorischen Lage. Demnach gilt (2) für jeden Strahl a , und ferner bilden die Strahlen (a, c) , (a, b) zwei Involutionen³⁾, die sich am einfachsten ergeben, indem man die Büschel perspektiv macht, wie dies in Fig. 3 schon der Fall ist. Ferner

²⁾ Dabei lassen wir beiseite den Fall, daß die Geradenbüschel kongruent sind.

³⁾ Vgl. z. B. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, I, S. 71.

können hier, wie bei der allgemeinen Affinität, die entsprechenden Halbstrahlen und mithin die entsprechenden Winkel $< \pi$ unterschieden werden. Die Kreise durch P, P' schneiden die Achse p in Paaren einer Involution, die, aus P projiziert, die *Strahleninvolution S der gleichen entsprechenden Winkel* liefert. In ähnlicher Weise schneiden die Kreise durch P, \bar{P}' eine Involution auf p aus, die aus P durch die *Strahleninvolution T der supplementären entsprechenden Winkel* projiziert wird. Die Zentren dieser Involutionen ergeben sich sofort, wenn sie am Kreise c dargestellt werden; es ist $S = P'Q \cdot p$, $T = P'C \cdot BQ$. Der dritte Diagonalepunkt des Vierecks $BCQP'$ ist der unendlichferne Punkt W von $P'B$; dieser Punkt ist das Zentrum einer Involution W auf c , deren Bedeutung wir jetzt feststellen wollen. Oben wurde die Zahl ν eingeführt, die das Verhältnis einer Strecke in (P) zur entsprechenden in (P') angibt. Wollen wir die Strahlen PX aufsuchen, denen ein gegebenes ν entspricht, so soll $PX : P'X = \nu$ sein, wenn X der Schnittpunkt mit p ist. Es gibt zwei Punkte X , die Schnittpunkte von p und einem harmonischen Kreise zu P, P' sind. Die harmonischen Kreise zu P, P' bilden ein Büschel, die Strahlen mit gleichen ν also eine Involution, von der wir schon zwei Paare kennen: PP', PB mit $\nu = \sigma$; PQ, PC mit $\nu = 1$. Die *Involution W ist folglich mit der Involution der Strahlen mit gleichen ν identisch*. Die gegenseitige Beziehung der Involutionen S, T, W ergibt sich übrigens daraus, daß die harmonischen Kreise zu P, P' das Orthogonalbüschel zu demjenigen mit den Grundpunkten P, P' bilden. Sind M, M^* die Punkte, in denen zwei zu P, P' harmonische Kreise p berühren, so gehört der Kreis mit dem Durchmesser MM^* dem Büschel durch P, P' an und muß auch durch \bar{P}' gehen. Die Doppelstrahlen derjenigen Involution, deren Paare aus den Strahlen mit gleichen ν gebildet sind, bilden also einen rechten Winkel, der zu S und T gehört; sie ist folglich mit W identisch. Von den oben betrachteten Richtungen s, r gehört das Paar r_1, s_1 zu S , das Paar r_1, s_2 zu T . Allgemeiner betrachten wir die Strahlen a, a_1 mit gleichen ν ; die Strahlen a, a^* mit den Verhältniszahlen ν und $\nu^* = \sigma : \nu$. Ist a beliebig, so gehören von den Paaren a, a^* ; a, a_1^* das eine der Involution S , das andere der Involution T an, so daß in (2) die Strahlen b, c das Paar in W mit $\nu = \sigma : \nu(a)$ bilden. Denn ein Dreieck in (P) , von dem zwei Seiten zu a, a^* bzw. a, a_1^* parallel sind, verhält sich zum entsprechenden wie $\sigma = \nu : \nu^*$; es muß also der eingeschlossene Winkel bei der Transformation beibehalten oder in den supplementären übergeführt werden.

Mit diesen Bemerkungen sind wohl die Verhältnisse klargelegt, die der oben besprochenen Definition der Affinität zugrunde liegen. In Zusammenhang mit den angegebenen Darstellungen der Involutionen S, T, W

können noch folgende Konstruktionen erwähnt werden. Die Involutionen werden bei einer Ähnlichkeitstransformation nicht geändert und Fig. 3 gilt demnach für die allgemeine Affinität (und für irgend zwei projektive Strahlenbüschel). Durch die Angabe in (P) von S sind daher alle Systeme (P') definiert, die mit (P) affin und mit einem gewissen System (P_0') ähnlich sind. Um ein bestimmtes von diesen Systemen zu erhalten, hat man nur einem Paare in W einen Wert ν beizulegen. Z. B. kann der Wert von σ angegeben werden oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Wert $\sqrt{\sigma}$ für die beiden Doppelstrahlen in S . Dabei ist zu bemerken, daß diese Doppelstrahlen immer reell sind, daß ihnen immer der Wert $\sqrt{\sigma}$ entspricht, wie auch (P') ähnlich transformiert wird, daß aber die Strahlen mit $\nu = \sigma$ reell oder imaginär sein können. Die Strahlen mit vorgegebenem ν können auf folgende Weise erhalten werden: Die Betrachtung eines Dreieckes in (P) , von dem zwei Seiten zu a, a_1 parallel sind, und des entsprechenden in (P') liefert

$$\sigma = \nu^2 \sin \alpha : \sin \beta,$$

wenn $\alpha = \angle(a, a_1)$, $\beta = \angle(a^*, a_1^*)$; für $\nu = 1$ geht diese Gleichung in (1) über. Werden die Bezeichnungen so gewählt, daß die Punkte a, a^* auf c mit S in einer Geraden liegen, so ist

$$\sigma : \nu^2 = \sin \alpha : \sin \beta = Sa : Sa^* = (Sa)^2 : (Sz)^2,$$

wenn z der eine Doppelstrahl in S und Sz also die Tangente an c ist. Es gilt also

$$\nu(a) \cdot Sa = \text{const} = \delta;$$

δ bestimmt mit S die Affinität; aus $Sa = \delta : \nu(a)$ werden die beiden Strahlen mit der Verhältniszahl $\nu(a)$ sofort konstruiert. Damit die Affinitätsachsen reell seien, muß $Sn \leq \delta \leq Sm$ sein.

Um ein bestimmtes Paar in S oder T , d. h. die Winkel in (P) zu erhalten, die von einer gegebenen Größe φ sind und Winkeln von der Größe φ bzw. $\pi - \varphi$ in (P') entsprechen, hat man nur denjenigen mit c konzentrischen Kreis zu konstruieren, dessen Tangenten auf c den mit φ äquivalenten Bogen abschneiden. Es gibt in T zwei reelle Lösungen für $zPz^* < \varphi < \pi/2$ (z, z^* die Doppelpunkte von S auf c), in S für $0 \leq \varphi < \pi/2$. Für einen beliebigen Winkel $\psi = \angle(p, q) < \pi/2$ in (P) , der von den Halbstrahlen p, q gebildet wird und keinen Rechtswinkelstrahl im Innern enthält (auf welchen Fall die Frage, wie man leicht sieht, immer zurückgeführt werden kann) gilt $\psi \gtrless \psi'$ (ψ' der entsprechende Winkel in (P')), je nachdem $\nu(q) \gtrless \nu(p^*)$ ist. Um den Sinn der Veränderung eines Winkels bei der Transformation (z. B. bei einer Parallelprojektion) zu

erhalten, hat man also die Involution S zu bestimmen und den Drehsinn eines Halbstrahles bei der Variation von ν zu deuten.

Wir hatten oben die Geraden l_s, l_t betrachtet, die den Kreis κ_s in den Punkten r, s schneiden. Die Diagonalepunkte des Vierecks $s_1 s_2 r_1 r_2$ sind S, T, W , wenn die drei Involutionen S, T, W an κ_s dargestellt werden. Stellt man nun umgekehrt die Aufgabe, bei gegebenen Kreisen κ_s, κ_t , zu einem gegebenen derartigen Dreieck STW das Viereck $s_i r_i$ zu bestimmen, so wird sie offenbar darauf zurückgeführt, in zwei ähnlichen Punktreihen auf ST die zu S und T harmonischen Paare aufzusuchen. Dies ist also die an die oben angestellten Betrachtungen sich anschließende *Bestimmung der mit (P) affinen und mit einem gegebenen Systeme (P'_0) ähnlichen Systeme (P') , die in (P) in der gegebenen Richtung q parallelprojiziert werden können.*

(Eingegangen am 14. Januar 1920.)