

0 ^h Mittl. Berl. Zt.	AR. Com.	Aberr.	Decl. Com.	Aberr.	Log. Distanz Com. v. ☿	Com. v. ☉	0 ^h Mittl. Berl. Zt.	AR. Com.	Aberr.	Decl. Com.	Aberr.	Log. Distanz Com. v. ☿	Com. v. ☉
Juni 29	329° 5' 24"	+15"3	-36° 50' 22"	+3"3	9,79724		Juli 15	310° 30' 26"	+16"0	-38° 42' 14"	-0"2	9,86886	
Juli 1	326 42 7	15,7	37 18 43	2,9	9,80397	0,18978	17	308 26 37	15,7	38 38 39	0,6	9,88032	0,24259
	3 324 18 5	16,0	37 43 1	2,5	9,81136		19	306 28 33	15,3	38 32 43	1,0	9,89220	
	5 321 54 12	16,2	38 3 9	2,0	9,81942		21	304 36 35	14,9	38 23 47	1,4	9,90443	
	7 319 31 28	16,3	38 19 3	1,6	9,82812		23	302 51 0	14,4	38 12 32	1,7	9,91697	
	9 317 10 50	16,4	38 30 46	1,1	9,83745	0,21756	25	301 11 54	13,9	37 59 18	2,1	9,92977	0,26541
	11 314 53 15	16,3	38 38 24	0,7	9,84738		27	299 39 21	13,3	37 44 24	2,3	9,94278	
	13 312 39 31	16,2	38 42 9	0,2	9,85786		29	298 13 17	12,8	37 28 9	2,6	9,95596	

Ueber die Bewegung der Apsidenlinie und der Knotenlinie des Mondes, verglichen mit Herrn *Planus* Théorie du mouvement de la Lune, und Herrn *Damoiseaux* Resultaten.

Von Herrn Professor *Hansen*.

Mit der Berechnung der Säcularänderungen des Mondes ist nach meiner Methode die definitive Berechnung der Bewegung der Apsiden- und Knotenlinie des Mondes verbunden. Meine Rechnung giebt in Bezeichnungen der Fundamenta

$$\gamma - 2\eta = 1758''138; \quad \alpha + \eta = 836''5309.$$

Hieraus folgt

$$\begin{array}{lcl} \text{Bewegung der Apsidenlinie in } 365\frac{1}{4} \text{ Tagen} & = & 146434''4. \\ \text{— — — Knotenlinie — — — — —} & = & 69676,6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Die Mondstafeln } \left\{ \begin{array}{l} 146436''1 \\ 69680,4 \end{array} \right. \\ \text{enthalten } \left\{ \begin{array}{l} +1''7 \\ +3,8 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Diff. } \left\{ \begin{array}{l} +1''7 \\ +3,8 \end{array} \right.$$

Diese Differenz in der Bewegung der Apsidenlinie ist für geringe zu achten, und kann vielleicht von Fehlern in den Hunderttheilen von Secunden in meinen Coefficienten der periodischen Störungen herrühren *), aber die Differenz in der Bewegung der Knotenlinie ist gröfser als dafs sie aus dieser Ursache erklärt werden könnte, eben so wenig kann ich Fehler in meiner Rechnung annehmen. Die Differenz des obigen Resultats der letzten Approximation mit dem der vorletzten Approximation beträgt nur 1". Wenn also nicht etwa die Einwirkung der Abplattung der Erde beträchtlich anders ist, wie *Laplace* sie angegeben hat, welches hiebei aber kaum anzunehmen ist, oder die in unsern bisherigen Mondstafeln angenommene Knotenbewegung unrichtig wäre, dann scheint hierauf noch eine andere Ursache einzuwirken. Die Abweichung

$$\begin{array}{l} \text{Bewegung der Apsidenlinie in } 365\frac{1}{4} \text{ Tagen} = 146429''9 \\ \text{— — — Knotenlinie — — — — —} = 69672,08 \end{array}$$

wobei aber die Abplattung der Erde noch nicht berücksichtigt ist, eine Arbeit, welche ich erst heute angefangen habe. Nehmen wir die Einwirkung dieser einstweilen aus der *Méc. cél.*, dann müssen wir zu jeder dieser beiden Bewegungen + 4"5 addiren, und haben also

des Mondkörpers von der Kugelgestalt kann Einfluß haben, und es ist daher zu untersuchen, ob ein Einfluß von der Gröfse der obigen Differenz eine übrigens annehmbare Gestalt des Mondkörpers giebt. Diese Untersuchung werde ich später hier vornehmen.

Unter den analytischen Ausdrücken für die Störungen des Mondes, welche *Plana* gegeben hat, ist der Ausdruck für die Bewegung der Knotenlinie einer von den wenigen, in welchen die numerischen Werthe der Glieder von verschiedener Ordnung eine merkliche Abnahme, oder Convergenz zeigen, ich werde daher sein Resultat mit dem obigen vergleichen. Es findet sich in der *Théorie du mouvement de la Lune*, Tome I. p. 486 mit entgegengesetztem Zeichen wie folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{32} m^3 - \frac{27}{128} m^4 - \frac{97}{2048} m^5 - \frac{19927}{24576} m^6 - \frac{665773}{359824} m^7 \right) \\ + e^2 \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{189}{32} m^3 + \frac{3027}{128} m^4 + \frac{179955}{2048} m^5 \right) \\ - \gamma^2 \left(\frac{3}{8} m^2 - \frac{27}{64} m^3 - \frac{843}{512} m^4 - \frac{6393}{4096} m^5 \right) \\ + E^2 \left(\frac{9}{8} m^2 - \frac{33}{32} m^3 - \frac{3261}{256} m^4 - \frac{72873}{1024} m^5 \right) \\ + e^2 \gamma^2 \left(\frac{27}{32} m^2 - \frac{189}{16} m^3 \right) + e^2 E^2 \left(\frac{9}{4} m^2 + \frac{693}{32} m^3 \right) - E^2 \gamma^2 \left(\frac{9}{16} m^2 - \frac{99}{64} m^3 \right) \\ - e^4 \left(\frac{21}{64} m^2 - \frac{675}{256} m^3 \right) + \gamma^4 \left(\frac{9}{32} m^2 - \frac{27}{64} m^3 \right) + E^4 \left(\frac{45}{32} m^2 - \frac{9}{4} m^3 \right) \\ + b^4 \left(\frac{45}{32} m^2 + \frac{1035}{512} m^3 \right) + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right) \frac{D^2}{a^2} (K_{(1)} - \Psi) \end{array} \right\}''$$

*) Es verursacht 0",1 Fehler im Coefficienten der Evection 1",47 Fehler in der jährlichen Bewegung der Apsidenlinie. Die übrigen Störungscoefficienten haben aber geringeren Einfluß darauf.

und es bedeuten hier m das Verhältniß der mittleren Bewegungen des Mondes und der Sonne, e die Excentricität der Mond- und E' die der Sonnenbahn, γ die gegenseitige Neigung der Mond- und Sonnenbahn, b^2 das Verhältniß der großen Halbachsen der Mond- und Sonnenbahn. Das letzte Glied des vorstehenden Ausdrucks rührt von der Abplattung der Erde her und ist mit *Laplace's* Angabe identisch. *Plana* hat durch diesen Ausdruck folgende numerische Werthe berechnet: (Th. d. m. de la Lune Tome 1 p. 606.)

$$\left\{ \begin{array}{l} + 0,004196425 (2) - 0,000117712 (3) \\ - 0,000056761 (4) - 0,000002456 (5) \\ + 0,000001368 (6) + 0,000000361 (7) \\ + 0,000000026 \end{array} \right\} \nu = 0,004021485 \cdot \nu$$

Er fügt diesen unter der Bezeichnung „Induction“ das Glied 0,00000011 hinzu, da dieses aber nicht durch die analytische Entwicklung gefunden worden ist, und ich beabsichtige das Resultat dieser mit meinem oben angeführten zu vergleichen, so habe ich es weggelassen. Ich füge noch hinzu, daß die in Klammern eingeschlossenen Zahlen (2), (3), etc. die analytische Ordnung der Glieder bezeichnen, durch welche die vorstehenden Zahlenwerthe berechnet worden sind. Nehmen wir nun für ν die mittlere Bewegung des Mondes in 365 $\frac{1}{4}$ Tagen an, so giebt der vorstehende Werth 69674 $''$ 6 für die Bewegung der Knotenlinie in dem gleichen Zeitraume. Diese Angabe gilt aber für das Jahr 1750, während die meinige für das Jahr 1800 gilt. Da nun nach *Plana* die Säcularänderung — 6 $''$ 830 beträgt, so ergiebt sich für 1800 die Bewegung der Knotenlinie = 69667 $''$ 8.

Die Differenz dieses Resultats mit dem meinigen ist = — 8 $''$ 8 und die Differenz desselben mit den Beobachtungen = — 12,6.

Plana hat hier offenbar zu wenig Glieder entwickelt. Das letzte der oben angeführten numerischen Glieder (die Summe der Glieder 7 $^{\text{te}}$ Ordnung) 0,000000361 giebt in der Bewegung der Knotenlinie 6 $''$ 3, die Glieder höherer Ordnung können demzufolge merkliche Größen hinzufügen. Noch weit weniger genau giebt *Plana's* analytische Entwicklung die Bewegung der Apsidenlinie. Die numerischen Werthe seiner analytischen Ausdrücke giebt er l. c. p. 606 wie folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,004196425 (2) + 0,002942793 (3) \\ + 0,000923094 (4) + 0,000273299 (5) \\ + 0,000080293 (6) + 0,000023969 (7) \\ + 0,000000026 \end{array} \right\} \nu = 0,008440133 \cdot \nu$$

Hieraus folgt für das Jahr 1750 die Bewegung der Apsidenlinie in 365 $\frac{1}{4}$ Tagen 146230,3 und da die Säcularänderung derselben — 40 $''$ ist, für 1800 die Bewegung der Apsidenlinie = 146190 $''$

Die Differenz dieses Resultats mit dem meinigen ist = — 244 $''$ und die Differenz desselben mit den Beobachtungen = — 246.

Man sieht hieraus, daß die analytischen Entwicklungen viel weiter hätten fortgesetzt werden müssen, um ein mit der *Newtonschen* Gravitation conformes Resultat zu erhalten. *Damoiseau* giebt (*Mémoires présentés par divers savans etc.* Tome I. pag. 543) für diese beiden Bewegungen resp.

$$\nu \cdot 0,008453 \text{ und } \nu \cdot 0,0040215$$

Hieraus folgt

$$\text{Apsidenlinie} \dots 146453''2, \text{ Knotenlinie} \dots 69674''8$$

und zwar gelten diese Werthe für 1801. Die Differenzen derselben mit den meinigen sind

$$+ 18''8 \text{ und resp. } - 1''8$$

und die Differenz derselben mit den Beobachtungen

$$+ 17''1 \text{ und resp. } - 5''6.$$

Diese sind also weit genauer wie *Plana's* Resultate, aber es darf nicht außer Acht gelassen werden, daß *Damoiseau* zu wenig Decimalstellen angegeben hat, um die Secunden derselben verbürgen zu können. Eine Einheit-Aenderung in der letzten Stelle des nach *Damoiseau* eben angeführten Resultats für die Bewegung der Apsidenlinie würde 17 $''$ 4 Aenderung in derselben bewirken, und es giebt also eine Einheit-Aenderung in der letzten Stelle seines Ergebnisses für die Bewegung der Knotenlinie 1 $''$ 7 Aenderung in dieser.

Für die Säcularänderungen habe ich folgendes Ergebnis:

$$nz = + 51''110 t^2, \text{ Apsidenlinie} \dots - 39''184 t^2,$$

$$\text{Knotenlinie} \dots - 6''485 t^2,$$

werde jedoch diese noch etwas ändern müssen, da ich in der betreffenden Rechnung einen Fehler gefunden habe, den ich noch keine Zeit gehabt habe zu verbessern. Der Einfluß desselben ist aber jedenfalls geringe. Das hier angeführte Glied in nz ist sehr nahe die Säcularänderung der mittleren Anomalie.

Plana hat hiefür folgende numerische Werthe seiner analytischen Ausdrücke gegeben.

1) Säcularänderung der mittleren Länge.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,008392850 (2) - 0,000141759 (4) \\ + 0,000095632 (5) - 0,000028553 (6) \\ + 0,000025333 (7) \end{array} \right\} \int (\epsilon'^2 - E'^2) d\nu$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 0,010491063 (2) + 0,036233414 (4) \\ + 0,000158489 (4) \int (\epsilon'^2 - E'^2)^2 d\nu \\ + 0,01223951 (2) \int (\epsilon'^6 - E'^6) d\nu \end{array} \right\} \int (\epsilon'^4 - E'^4) d\nu$$

Die ersten Glieder des mit $\int (\epsilon'^2 - E'^2) d\nu$ multiplicirten Theils dieses Ausdruckes convergiren bedeutend, aber die Convergenz nimmt schnell ab, das Glied siebenter Ordnung ist nur sehr wenig kleiner wie das Glied sechster Ordnung. Wenn diese Abnahme der Convergenz sich in den nicht berechneten

Gliedern höherer Ordnung fortsetzt, so kann eine Divergenz daraus entstehen. Von den beiden berechneten, mit $\int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu$ multiplicirten Gliedern, ist das Glied der vierten Ordnung $3\frac{1}{2}$ mal größer, wie das Glied zweiter Ordnung. Hier zeigt sich also eine bedeutende Divergenz.

2. Säcularänderung der Apsidenlinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,006294637 (2) + 0,01079026 (3) \\ + 0,007532435 (4) + 0,004017515 (5) \end{array} \right\} \int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu = 0,028634847$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,0078683 (2) + 0,02354235 (3) \end{array} \right\} \int(\varepsilon'^4 - E'^4) d\nu = 0,0314106$$

Diese Reihen divergiren bis auf das Glied fünfter Ordnung, welches ein wenig kleiner ist, wie das der vierten Ordnung. *Plana* fügt dem mit $\int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu$ multiplicirten Theile dieses Ausdrucks das Glied 0,00323765 (induction) hinzu, und dieses soll seiner Erklärung zufolge (Tome I. pag. 605) die Summe der folgenden nicht analytisch entwickelten Glieder seyn, welche sich aus der Convergenz der berechneten ergibt. Aber im vorliegenden Falle wird es mir schwer zu begreifen, wie er diesen Werth hat berechnen können, da die vorhandenen Glieder mehr divergiren wie convergiren.

3. Säcularänderung der Knotenlinie.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,006294657 (2) - 0,00043161 (3) \\ - 0,000334944 (4) - 0,000138087 (5) \end{array} \right\} \int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu = 0,005389996$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,0078683 (2) - 0,00094169 (3) \end{array} \right\} \int(\varepsilon'^4 - E'^4) d\nu = 0,00692661$$

Hier ist einige Convergenz vorhanden. Mit Uebergang der mit t^3 multiplicirten Glieder giebt *Plana*

$$\begin{aligned} \int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu &= -t^2.1264''127 \\ \int(\varepsilon'^4 - E'^4) d\nu &= -t^2.0''6995 \\ \int(\varepsilon'^6 - E'^6) d\nu &= -t^2.0''000297 \end{aligned}$$

wo die Einheit von t ein Zeitraum von 100 Jahren ist.

Hiemit ergeben sich die Säcularänderungen wie folgt, wobei die der mittleren Länge mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden mußte, weil der obige Ausdruck dafür die mittlere Länge in Function der wahren Länge ausgedrückt, voraussetzt.

$$\begin{aligned} \text{Mittlere Länge} &\dots + t^2.10''580 \\ \text{Apsidenlinie} &\dots - t^2.36,220 \\ \text{Knotenlinie} &\dots - t^2.6,830, \end{aligned}$$

also

$$\text{mittlere Anomalie} \dots + t^2.46''800.$$

Durch das oben angeführte Inductionsglied hat *Plana* bewirkt, daß sich die Säcularänderung der Apsidenlinie $= -t^2.40''313$ ergibt.

Damoiseau giebt für diese drei Größen resp. (Mém. prés. etc. Tome 1. pag. 544)

$$t^2.50''420; -t^2.39''697; -t^2.6''563.$$

Es ist aber noch zu bemerken, daß der diesen drei Resultaten zu Grunde gelegte Werth von $\int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu$ verschieden ist. *Plana's* Werth dieser Größe habe ich oben angeführt. *Damoiseau* nimmt $-1214''894 t^2$ dafür an, und aus den von mir meinen Rechnungen zu Grunde gelegten Größen folgt $\int(\varepsilon'^2 - E'^2) d\nu = -1250''2 t^2$. Reduciren wir *Plana's* und *Damoiseau's* Resultate auf den letztgenannten Werth dieses Integrals, so bekommen wir folgende Säcularänderungen:

	Mittl. Anomalie.	Apsidenlinie.	Knotenlinie.
<i>Plana</i>	$+t^2.46''285$	$-t^2.35''821$	$-t^2.6''755$
<i>Damoiseau</i> ..	$+t^2.51,884$	$-t^2.40,850$	$-t^2.6,754$

also folgende Unterschiede mit meinen Werthen:

<i>Plana</i>	$-t^2.4,825$	$+t^2.3,363$	$-t^2.0,270$
<i>Damoiseau</i> ..	$+t^2.0,774$	$-t^2.1,666$	$-t^2.0,269$

Also hier sind wieder die Differenzen zwischen *Damoiseau's* und meinen Resultaten kleiner, wie die zwischen diesen und *Plana's*, und dasselbe findet ebenfalls durchgehend bei den Coefficienten der periodischen Störungen statt.

Gotha 1842. Januar 11.

Hansen.

Zweites Schreiben des Herrn Professors *Hansen*, Directors der Seeberger Sternwarte, an den Herausgeber.
Gotha 1842. Januar 29.

Die Einwirkung der Abplattung der Erde auf die Mondbewegung habe ich nun selbst berechnet, und ein von dem *Laplace's*chen etwas abweichendes numerisches Resultat gefunden, nemlich jährliche Bewegung der Apsiden- und Knotenlinie $= 5''88$, während die *Méc. cél.* dafür $4''5$ angiebt. Die Ursache dieser Differenz liegt zum größten Theil darin, daß *Laplace* bei der numerischen Berechnung dieser Größe eine unrichtige Abplattung der Erde zu Grunde gelegt hat, nemlich $\frac{1}{333}$. Nimmt man die Abplattung nach *Bessel* $= \frac{1}{299,15}$

an, so giebt *Laplace's* Formel für die obige Größe $5''81$, sehr nahe mit meinem Resultat übereinstimmend. Dieses beruht übrigens gar nicht auf die Abplattung, sondern auf den durch die Beobachtungen bestimmten Coefficienten der vom Sinus der Mondlänge abhängenden Störung der Mondbreite, die von der Abplattung verursacht ist. Ich habe diesen Coefficienten einstweilen nach *Bürg* $= -8''0$ angenommen. Hiemit stehen nun meine für die Bewegung der Apsiden- und Knotenlinie berechneten Resultate folgendermaßen: