

SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE SURFACES.

Par M. **Georges Tzitzéica** (Bucarest).

Adunanza del 10 novembre 1907.

L'étude de la déformation des surfaces tétraédrales

$$Ax^{\frac{2}{3}} + By^{\frac{2}{3}} + Cz^{\frac{2}{3}} = 1$$

conduit à la recherche des surfaces pour lesquelles *la courbure totale est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance d'un point fixe au plan tangent.*

Je désignerai par S toute surface qui jouit de la propriété précédente et par centre de S le point fixe qui figure dans la définition de cette surface.

1. Supposons donnée une surface S à courbure totale négative. On pourra prendre, sans restreindre la généralité,

$$(1) \quad R' R'' = -\frac{1}{p^4},$$

où R' et R'' sont les rayons principaux de courbure et p la distance du centre de S (qui sera pris pour origine) au plan tangent.

Prenons comme coordonnées curvilignes sur S ses lignes asymptotiques. Les formules de M. LELIEUVRE (DARBOUX, IV^e partie, page 24; BIANCHI, Volume I, p. 162) donnent, pour un point $M(x, y, z)$ de la surface,

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = y_1 \frac{\partial z_1}{\partial u} - z_1 \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\left(y_1 \frac{\partial z_1}{\partial v} - z_1 \frac{\partial y_1}{\partial v}\right)$$

et des formules analogues pour y et z ; x_1, y_1, z_1 sont des intégrales d'une équation de la forme

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = k \theta.$$

Or, on a

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \sqrt{-R' R''},$$

et, comme

$$p = \frac{x_1 x + y_1 y + z_1 z}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

on obtient de (1)

$$x_1 x + y_1 y + z_1 z = \pm 1.$$

En changeant au besoin les signes de x_i, y_i, z_i , on pourra prendre

$$(4) \quad x_i x + y_i y + z_i z = 1.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant: *Toute surface définie par les formules (2), x_i, y_i, z_i étant trois intégrales d'une équation de la forme (3) et vérifiant la relation (4), est une surface S.*

2. On tire aisément des égalités (2) les relations suivantes

$$(5) \quad \begin{cases} \sum x_i \frac{\partial x}{\partial u} = 0, & \sum x_i \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, & \sum \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

D'autre part, en dérivant (4) et en tenant compte des relations précédentes, on obtient

$$(6) \quad \sum x \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \sum x \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0.$$

Considérons maintenant la surface S_i décrite par le point $M_i(x_i, y_i, z_i)$. On voit sur les relations (5) et (6) que la normale au point $M(x, y, z)$ de S est parallèle à OM_i et que la normale en M_i à S_i est parallèle à OM .

Prenons de (5) et (6) les relations

$$\sum x \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0;$$

on en tire immédiatement

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \lambda \left(z \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

et des égalités analogues pour y_i et z_i . Or, remplaçons $\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial u}$ par leurs valeurs tirées de (2); on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= \lambda \left[z \left(z_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - x_i \frac{\partial z_i}{\partial u} \right) - y \left(x_i \frac{\partial y_i}{\partial u} - y_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) \right] \\ &= \lambda \left[\frac{\partial x_i}{\partial u} (x x_i + y y_i + z z_i) - x_i \left(x \frac{\partial x_i}{\partial u} + y \frac{\partial y_i}{\partial u} + z \frac{\partial z_i}{\partial u} \right) \right] \\ &= \lambda \frac{\partial x_i}{\partial u}, \end{aligned}$$

d'où $\lambda = 1$ et par conséquent

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = z \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial u};$$

de la même manière on trouve

$$\frac{\partial x_i}{\partial v} = - \left(z \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}$ tirées des deux dernières égalités, et en faisant la même chose pour $\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}$ et $\frac{\partial^2 z_i}{\partial u \partial v}$, on trouve que x, y, z sont trois intégrales

d'une équation de la forme

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = h \omega.$$

Or, le théorème établi à la fin du § 1 prouve alors que S_1 est une surface S .

De plus, comme il est facile de voir que S_1 est la polaire réciproque de la surface S décrite par $M(x, y, z)$, par rapport à la sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine, on a le résultat suivant: *Étant donnée une surface S de centre O , sa polaire réciproque par rapport à une sphère de centre O est aussi une surface S .*

Il résulte encore des formules précédentes pour $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ et $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ que les lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques de S_1 , ce qui est d'ailleurs conforme à un théorème connu.

3. Comme la surface S décrite par le point $M(x, y, z)$ est rapportée à ses lignes asymptotiques, x, y, z vérifient, en dehors de (7), deux équations linéaires de la forme

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = a \frac{\partial \omega}{\partial u} + b \frac{\partial \omega}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = a' \frac{\partial \omega}{\partial u} + b' \frac{\partial \omega}{\partial v}. \end{cases}$$

Le système (7) et (8) admettant trois intégrales linéairement indépendantes, on a les conditions suivantes

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u} = ah, & \frac{\partial a}{\partial v} + a'b = h, & \frac{\partial b}{\partial v} + bb' = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial v} = b'h, & \frac{\partial a'}{\partial u} + aa' = 0, & \frac{\partial b'}{\partial u} + a'b = h, \end{cases}$$

que nous étudierons plus loin.

On a par conséquent le résultat suivant:

Les coordonnées cartésiennes d'une surface S (le centre de cette surface étant pris pour origine) vérifient un système d'équations linéaires aux dérivées partielles de la forme des équations (7) et (8).

On a de même pour la surface S_1 , d'abord l'équation (3) et puis deux autres équations

$$(8') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = a_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} + b_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a'_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} + b'_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}, \end{cases}$$

a_1, b_1, a'_1, b'_1 et k étant liés par des relations toutes pareilles à (9). Remarquons que, à l'aide des expressions de $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ et $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ trouvées plus haut, on peut facilement obtenir $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$. On en déduit

$$a_1 = a, \quad b_1 = -b, \quad a'_1 = -a', \quad b'_1 = b'$$

et de là $k = h$.

On voit donc le changement qui se fait dans le système des équations (7) et (8), lorsque l'on passe de la surface S à sa polaire réciproque S_1 .

4. Je me propose de démontrer maintenant que si x, y, z sont trois solutions linéairement indépendantes d'un système de la forme des équations (7) et (8), le point $M(x, y, z)$ décrit une surface S ayant l'origine pour centre.

En effet, comme x, y, z sont des intégrales de l'équation (7), les formules

$$(10) \quad \frac{\partial x_i}{\partial u} = z \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = - \left(z \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

et les analogues en y_i et z_i , définissent d'après le théorème de M. LELIEUVRE une surface S_1 rapportée à ses lignes asymptotiques.

Il résulte de là que x_i, y_i, z_i sont des intégrales d'un système de la forme (8').

Posons maintenant

$$\omega' = x x_i + y y_i + z z_i.$$

On a, en tenant compte de (10),

$$\frac{\partial \omega'}{\partial u} = \sum x_i \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial v} = \sum x_i \frac{\partial x}{\partial v}$$

et en vertu de (7) et (8)

$$(8'') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u^2} = a \frac{\partial \omega'}{\partial u} + b \frac{\partial \omega'}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \omega'}{\partial v^2} = a' \frac{\partial \omega'}{\partial u} + b' \frac{\partial \omega'}{\partial v} \end{cases}$$

et

$$(7') \quad \frac{\partial^2 \omega'}{\partial u \partial v} = h \omega' + M,$$

où

$$M = \sum \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Or, on tire de ces expressions de M

$$\frac{\partial M}{\partial u} = a M, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = b' M$$

et, en remarquant les relations

$$\frac{\partial h}{\partial u} = a h, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = b' h$$

tirées de (9), on a $M = -m h$, $m = \text{constante}$. En remplaçant en (7'), on obtient

$$\frac{\partial^2 (\omega' - m)}{\partial u \partial v} = h (\omega' - m),$$

ce qui prouve que $\omega' - m$ est une intégrale du système formé par les équations (7) et (8). Comme ce système n'a que trois intégrales linéairement indépendantes x, y et z , on a

$$\omega' - m = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

α , β et γ étant des constantes, ou

$$x(x_1 - \alpha) + y(y_1 - \beta) + z(z_1 - \gamma) = m.$$

D'après les formules (10) on voit que l'on peut ajouter à x_1 , y_1 , z_1 des constantes arbitraires; on peut donc écrire

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = m.$$

Il résulte de là, que la surface S_1 est une surface S , et par conséquent sa polaire réciproque, la surface décrite par le point $M(x, y, z)$, est aussi une surface S .

C'est là le théorème fondamental que je voulais établir.

5. Il est clair que si x , y , z sont trois intégrales, linéairement indépendantes, des équations (7) et (8), il en est de même de

$$(11) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

les a , b , c étant des constantes dont le déterminant est différent de zéro. Le point $M'(x', y', z')$ décrit par conséquent aussi une surface S .

Donc, toute transformation linéaire de la forme (11) change une surface S en une autre surface S .

En combinant cette transformation avec une autre trouvée plus haut, on a: Une transformation par polaires réciproques par rapport à une quadrique à centre ayant son centre au centre d'une surface S , transforme cette surface S en une autre surface S .

6. Je me propose maintenant de trouver l'origine des propriétés précédentes des surfaces S par rapport à une transformation linéaire de la forme (11) et à une transformation par polaires réciproques.

Je vais montrer d'abord qu'une transformation de la forme (11) ne change pas le rapport entre la courbure totale et la quatrième puissance de la distance de l'origine au plan tangent d'une surface. On démontre ce théorème aisément à l'aide de l'expression suivante

$$K = - \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}$$

pour la courbure totale et où $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface. En employant les coordonnées homogènes le théorème est presque évident.

Passons à la transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère de rayon un. Je vais démontrer que cette transformation change le rapport entre la courbure totale et la quatrième puissance de la distance de l'origine au plan tangent, en son inverse.

Soient S et S' les deux surfaces polaires réciproques par rapport à la sphère Σ de rayon un et de centre o ; ds et ds' les éléments d'aire autour de deux points correspondants M et M' ; $d\sigma$ et $d\sigma'$ les éléments d'aire de leurs représentations sphériques sur Σ ; K et K' leurs courbures totales en M et M' . Posons enfin $\lambda = \cos MOM'$. On a alors

$$K = \frac{d\sigma}{ds}, \quad K' = \frac{d\sigma'}{ds'}, \quad \frac{\lambda ds'}{d\sigma} = \overline{OM}^2, \quad \frac{\lambda ds}{d\sigma'} = \overline{OM}^2.$$

Or

$$OM = \frac{1}{p'}, \quad OM' = \frac{1}{p}, \quad \lambda = pp',$$

donc

$$\frac{K}{p^4} \cdot \frac{K'}{p'^4} = 1.$$

7. Revenons maintenant au système (7) et (8) et aux relations (9). Il faut remarquer tout d'abord, que l'on ne peut pas avoir $h = 0$; autrement, si x, y, z sont trois intégrales linéairement indépendantes du système, comme $m = \text{const.}$ est aussi, dans ce cas, une intégrale, on a

$$m = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

ce qui prouve que la surface est un plan.

On a donc $h \neq 0$, et alors le système (9) donne

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial u}, \quad b = \frac{U}{h}, \quad a' = \frac{V}{h}, \quad b' = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = h - \frac{UV}{h^2}. \end{array} \right.$$

Prenons d'abord $U = 0, V = 0$; on a

$$\frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = h,$$

d'où

$$h = - \frac{2 U_1 V_1}{(1 + U_1 V_1)^2}.$$

On déduit de là les valeurs de a et b' et en les introduisant dans le système (7) et (8) et en prenant pour variables indépendantes $\alpha = U_1, \beta = V_1$, on obtient le système

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{2\beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{2\omega}{(1 + \alpha\beta)^2}.$$

On a immédiatement trois intégrales linéairement indépendantes

$$x = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad y = i \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha\beta}, \quad z = \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta} \quad (\text{DARBOUX, IV, p. 97}).$$

La surface S correspondante est une sphère. A l'aide d'une transformation (11) on déduit que les quadriques à centre sont aussi des surfaces S .

8. Prenons maintenant dans les formules (12) $V = 0, U \neq 0$. On réduit alors

le système (7) et (8) au suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{2\beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= -(1 + \alpha\beta)^2 A \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \quad (A = \text{fonct. de } \alpha), \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{2\omega}{(1 + \alpha\beta)^2}. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de démontrer que le système admet les trois intégrales linéairement indépendantes

$$\omega_i = \frac{2\beta}{1 + \alpha\beta} \cdot \varphi_i(\alpha) - \varphi_i'(\alpha) \quad (i = 1, 2, 3),$$

φ_1 , φ_2 et φ_3 , étant trois intégrales linéairement indépendantes de l'équation

$$\varphi'''(\alpha) - 2A\varphi(\alpha) = 0.$$

On a de cette manière un nombre illimité de surfaces S dépendant de la fonction arbitraire A de α .

Si l'on prend, par exemple, $A = \frac{1}{2}$, on trouve la surface

$$(yz + zx + xy)^3 = 2\zeta(xyz + 1)^2.$$

Cette surface, comme celles où A est une fonction arbitraire de α , est une surface réglée. Il est aisé de voir que l'on a obtenu de cette manière toutes les surfaces S réglées.

9. Supposons maintenant $U \neq 0$, $V \neq 0$. En remplaçant h par $h_1 = h\sqrt[3]{UV}$, et en faisant le changement de variables $\alpha = \int \sqrt[3]{U} du$, $\beta = \int \sqrt[3]{V} dv$ on obtient le système

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} &= \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} &= \frac{1}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} &= h\omega, \end{aligned} \right.$$

où h est une intégrale de l'équation

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \log h}{\partial \alpha \partial \beta} = h - \frac{1}{h^2}.$$

On a une intégrale immédiate de (14), $h = m$, où $m^3 = 1$.

Le système (13) s'intègre alors facilement, et on obtient les trois intégrales

$$x = e^{m_1(\alpha + m m_1 \beta)}, \quad y = e^{m_2(\alpha + m m_2 \beta)}, \quad z = e^{m_3(\alpha + m m_3 \beta)} \quad (m_i^3 = 1, i = 1, 2, 3),$$

d'où l'équation de la surface

$$\log x + \log y + \log z = 0$$

ou

$$xyz = 1;$$

et à l'aide de la transformation (11)

$$(a_1x + b_1y + c_1z)(a_2x + b_2y + c_2z)(a_3x + b_3y + c_3z) = 1.$$

Parmi ces surfaces S il y en a une de révolution

$$z(x^2 + y^2) = 1.$$

En définitive, *pour avoir toutes les surfaces S non-réglées il faut intégrer d'abord l'équation (14) et ensuite le système correspondant (13).*

Bucarest, 30 octobre 1907.

G. TZITZÉICA.
