Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen II.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Im Anschluss an die vorstehende Abhandlung des Herrn Ratner entwickle ich in den folgenden Zeilen einen neuen Beweis und einige Verallgemeinerungen des Satzes, welchen ich auf pag. 222 meiner unter obigem Titel im 22. Bande dieser Annalen erschienenen Arbeit*) aufgestellt habe.

Die beständig convergirende Potenzreihe

$$(1)\qquad y = 1 + \frac{1}{b}z + \frac{1}{b(b+a)}\frac{z^2}{2!} + \frac{2}{b(b+a)(b+2a)}\frac{z^3}{3!} + \cdots,^{**})$$

welche beiläufig bemerkt nur unwesentlich von der Bessel'schen Reihe verschieden ist, genügt der Differentialgleichung

$$(2)\qquad azy'' = -by' + y.$$

Aus dieser Gleichung leitet man leicht die folgende ab:

$$(3)\qquad (az)^{n-1}y^{(n)} = \psi_n \cdot y' + \chi_n \cdot y.$$

Hier bedeuten ψ_n, χ_n ganze ganzzahlige Functionen von a, b, z,

*) Ich benutze diese Gelegenheit zur Berichtigung einer irrthümlichen Angabe, welche sich auf pag. 229 dieser Arbeit findet und auf welche mich Herr Stickelberger vor längerer Zeit aufmerksam gemacht hat. Das dort für die Differentialgleichung $2zy'' = by' + y$ angegebene Integral ist zu ersetzen durch den Ausdruck

$$c_1 e^{\sqrt{2z}} G(\sqrt{2z}) + c_2 e^{-\sqrt{2z}} G(-\sqrt{2z}),$$

wo G eine ganze Function von $\sqrt{2z}$ des Grades $\frac{b+1}{2}$ bedeutet. Die Zahl b wird als eine ungerade positive Zahl vorausgesetzt.

**) Es wird angenommen, dass $\frac{b}{a}$ nicht eine negative ganze Zahl ist, weil sonst die Reihe sinnlos würde. Ueberdies wird der Fall $a = 0$ ausgeschlossen, für welchen sich y offenbar auf $e^{\frac{z}{b}}$ reducirt.

welche in Bezug auf z von den Geraden $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-3}{2}$ sind, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Der Beweis hiervon ergiebt sich durch den Schluss von n auf $n+1$. Setzt man nämlich

$$(az)^n y^{(n+1)} = \psi_{n+1} \cdot y' + \chi_{n+1} \cdot y,$$

so findet man nach kurzer Zwischenrechnung

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi_{n+1} = (a - na - b)\psi_n + az(\chi_n + \psi_n'), \\ \chi_{n+1} = \qquad\qquad \psi_n - (n-1)a\chi_n + az\chi_n'; \end{cases}$$

wobei sich die Differentiationen (ψ_n', χ_n') auf das Argument z beziehen.

Die Gleichungen (4) zeigen nun, dass die von ψ_n, χ_n behaupteten Eigenschaften sich von n auf $n+1$ übertragen. Da diese Eigenschaften aber der Gleichung (2) zufolge für $n=2$ bestehen, so finden sie für jeden Werth von $n \geqq 2$ statt.

Zu dem Zwecke, welchen ich verfolge, bedarf es noch der Reihenentwicklung der n^{ten} Ableitung von y, wie sie sich unmittelbar aus (1) ergiebt:

$$(5) \quad y^{(n)} = \frac{1}{b(b+a)\dots(b+(n-1)a)} + \frac{1}{b(b+a)\dots(b+na)} z + \cdots$$

Aus dieser Entwicklung geht hervor, dass der absolute Betrag von

$$k^n y^{(n)}$$

mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, welche Werthe auch der Grösse k und dem Argumente z beigelegt werden mögen.

Seien nun a und b ganze Zahlen; dann lässt sich auf folgende Weise zeigen, dass der Werth von $\frac{y'}{y}$ irrational ist, wenn das Argument z einen rationalen, von Null verschiedenen Werth erhält. Angenommen es sei für $z = \frac{r}{s}$

$$(6) \qquad y' = \varrho t, \quad y = \varrho u,$$

wo $r \gtrless 0$ und r, s, t, u ganze Zahlen, ϱ einen nicht verschwindenden Factor bezeichnen. Unter Einführung dieser Werthe von z, y', y geht die Gleichung (3) nach leichter Umformung über in die neue Gleichung:

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho a r}(ar)^n y^{(n)} = s^{n-1}(\psi_n t + \chi_n u),$$

deren rechte Seite offenbar für jeden Werth von n eine ganze Zahl darstellt. Diese ganze Zahl muss, weil die linke Seite mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, von einem genügend gross gewählten Werthe von n ab beständig gleich Null sein. Folglich verschwinden für $z = \frac{r}{s}$ alle Differentialquotienten $y^{(N)}, y^{(N+1)}, \dots,$ unter N jenen genügend gross gewählten Werth von n verstanden. Dieses ist aber offenbar unmöglich. Denn die Entwicklung von y nach steigenden Potenzen von $z-\frac{r}{s}$ würde dann abbrechen, und y also eine rationale ganze Function von z sein, was nicht der Fall ist. Somit ist die Annahme, $\frac{y'}{y}$ habe für einen rationalen von Null verschiedenen Werth von z selber einen rationalen Werth, unzulässig. Setzt man in dem Quotienten $\frac{by'}{y}$ an Stelle von $b:\xi z$, an Stelle von $a:\eta z$, so geht derselbe in eine Function $\varphi(\xi,\eta)$ von ξ und η über. Das Ergebniss der bisherigen Betrachtungen lässt sich offenbar als eine Eigenschaft dieser Function $\varphi(\xi,\eta)$ so aussprechen:

„*Der Werth von*

$$\varphi(\xi,\eta)=\frac{1+\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi(\xi+\eta)}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{\xi(\xi+\eta)(\xi+2\eta)}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots}{1+\frac{1}{\xi+\eta}+\frac{1}{(\xi+\eta)(\xi+2\eta)}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{(\xi+\eta)(\xi+2\eta)(\xi+3\eta)}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots}$$

ist stets irrational, wenn den Argumenten ξ, η irgend welche rationale Werthe beigelegt werden, welche nur der Einschränkung unterliegen, dass der Quotient $\frac{\xi}{\eta}$ weder Null, noch unendlich, noch einer negativen ganzen Zahl gleich sein darf.“

Diesen Satz kann man zunächst folgendermassen verallgemeinern. Es sei m eine positive ganze Zahl und es werde als rational jede Grösse der Form

$$\mu+\nu\sqrt{-m}$$

angesehen, wenn μ und ν rationale Zahlen im gewöhnlichen Sinne des Wortes bezeichnen. Eine rationale Zahl $\mu+\nu\sqrt{-m}$ heisse „ganz“, wenn μ und ν ganze Zahlen sind. Setzt man nun in der Gleichung (3) für a, b, z ganze Zahlen der Form $\mu+\nu\sqrt{-m}$ und macht sodann die Annahme, dass gleichzeitig $\frac{y'}{y}$ einer rationalen Zahl derselben Form gleich sei, so ergiebt sich wie oben der Widerspruch, dass y sich auf eine ganze rationale Function von z reducirt. Denn eine ganze Zahl $\mu+\nu\sqrt{-m}$ kann nur dann einen unendlich kleinen Betrag haben, wenn sie gleich Null ist. Es folgt also:

Der obige Satz bleibt gültig, wenn man unter „rationaler Zahl“ jede Zahl der Form $\mu+\nu\sqrt{-m}$ versteht, wo μ, ν rationale Zahlen im gewöhnlichen Sinne des Wortes bezeichnen, und m eine beliebig aber fest zu wählende positive ganze Zahl bedeutet.

Ich bemerke noch, dass sich der Beweis unseres Satzes, falls man sich auf reelle Zahlen beschränkt, auch nach der bekannten Lambert'schen Methode führen lässt — eine Methode, die sich übrigens ohne

Zweifel auch auf complexe Zahlen übertragen lassen wird. Dieser „Lambert'sche" Beweis wird ermöglicht durch die wohl von Euler herrührende Kettenbruchentwicklung*)

$$(8)\qquad \frac{y}{y'} = b + \cfrac{az}{a+b+\cfrac{az}{2a+b+\cdots}}.$$

Mit dieser Entwicklung stehen auch die oben angestellten Betrachtungen in einem innern Zusammenhang. Nach einer bekannten Schlussweise folgt nämlich aus der Gleichung (3), dass $-\frac{\psi_n}{\chi_n}$ den $n-1^{\text{ten}}$ Näherungsbruch des Kettenbruches (8) vorstellt.

Ich gehe nun dazu über den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen, welcher den oben abgeleiteten Satz als einen ganz speciellen Fall enthält:

„*Die beständig convergirende unendliche Potenzreihe*

$$y = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

genüge folgenden Bedingungen:

1) *Sie convergire so stark, dass für jeden Werth von z der absolute Betrag von $k^n y^{(n)}$ mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, wenn k eine beliebig gross aber fest gewählte Zahl bezeichnet.*
2) *Sie befriedige eine Differentialgleichung $(r+1)^{ter}$ Ordnung der Gestalt*

$$(9)\qquad \varphi y^{(r+1)} = \varphi_r y^{(r)} + \varphi_{r-1} y^{(r-1)} + \cdots + \varphi_0 y,$$

wo $\varphi, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots \varphi_0$ ganze ganzzahlige Functionen von z bedeuten.

Dann ist stets mindestens Eines der Verhältnisse

$$y : y' : \cdots : y^{(r)}$$

irrational, wenn dem Argumente z irgend ein rationaler Werth beigelegt wird, für welchen der Coefficient φ der höchsten Ableitung in (9) *nicht verschwindet.*"

Die Ausdrücke „rational", „ganzzahlig" dürfen hier auch in dem allgemeineren oben angegebenen Sinne verstanden werden.

Zum Beweise des aufgestellten Satzes leite ich aus der Gleichung (9) die folgende neue Gleichung ab, in welcher n irgend eine positive Zahl bedeutet:

$$(10)\qquad \varphi^n y^{(r+n)} = \varphi_{r,n} y^{(r)} + \varphi_{r-1,n} y^{(r-1)} + \cdots + \varphi_{1,n} y' + \varphi_{0,n} y.$$

---

*) Vgl. Legendre's Elemente der Geometrie, vierte Anmerkung, wo der obige Kettenbruch, welcher für $b=1$, $a=2$, $z=-\frac{x^2}{2}$ den Werth $1-x\,\mathrm{tg}\,x$ besitzt, zum Beweise der Irrationalität von π und π^2 benutzt wird.

Man zeigt hier leicht durch den Schluss von n auf $n+1$, dass $\varphi_{r,n}, \varphi_{r-1,n}, \dots \varphi_{0,n}$ ganze ganzzahlige Functionen von n sind, deren Grade die Zahl $\gamma . n$ nicht übersteigen. Dabei bezeichnet γ die höchste unter den Gradzahlen der Functionen $\varphi, \varphi_r, \varphi_{r-1}, \dots \varphi_0$.

Nimmt man nun an für irgend einen rationalen Werth von z, für welchen φ nicht verschwindet, seien sämmtliche Verhältnisse

$$y : y' : \cdots : y^{(r)}$$

rational, so führt die Gleichung (10), in entsprechender Weise wie oben die Gleichung (3), auf den Widerspruch, dass y sich auf eine rationale ganze Function von z reducirt. Daher ist jene Annahme unzulässig, was zu beweisen war.

Eine ausgedehnte Classe von Potenzreihen, welche den Bedingungen des soeben bewiesenen Satzes genügen, liefern die verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen*), wie ich zum Schluss näher ausführen will. Man bilde mit irgend $2r+2$ Constanten

$$a_0, a_1, \dots a_r, \quad b_0, b_1, \dots b_r$$

die beiden ganzen Functionen

$$(11) \quad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + \cdots + a_r x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1), \\ g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \cdots + b_r x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1). \end{cases}$$

Dann befriedigt die Potenzreihe

$$(12) \quad y = 1 + \frac{f(0)}{g(0)} z + \frac{f(0) f(1)}{g(0) g(1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{f(0) f(1) f(1)}{g(0) g(1) g(2)} \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

wie man durch eine kurze Rechnung bestätigt, die Differentialgleichung

$$(13) \quad b_r z^r y^{(r+1)} = z^{r-1}(a_r z - b_{r-1}) y^{(r)} + z^{r-2}(a_{r-1} z - b_{r-2}) y^{(r-1)} + \cdots + a_0 y.$$

Damit die Reihe (12) nicht sinnlos wird, müssen die Werthe von $g(0), g(1), \dots$ sämmtlich von Null verschieden sein; damit sie nicht abbricht, muss das Gleiche für die Werthe von $f(0), f(1), \dots$ stattfinden; damit endlich der in unserem Satze verlangte Grad der Convergenz eintritt, ist nothwendig und hinreichend, dass der Grad von $f(x)$ niedriger ist als der von $g(x)$.

Nimmt man für $f(x)$ und $g(x)$ ganzzahlige Functionen, so werden freilich $a_0, \dots a_r, b_0, \dots b_r$ im Allgemeinen nicht sämmtlich ganze, sondern nur rationale Zahlen. Aber man kann dann die Gleichung (13) mit dem gemeinsamen Nenner jener Zahlen multipliciren und so an ihre Stelle eine Gleichung mit lauter ganzzahligen Constanten setzen.

Fasst man alle diese Bemerkungen zusammen, so erkennt man die Richtigkeit des folgenden Satzes:

---

*) Vgl. für das Folgende: Thomae „Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen etc.“, diese Annalen, Bd. II, pag. 427.

„Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze ganzzahlige Functionen von x, welche nur der Einschränkung unterliegen, dass $f(x)$ von niedrigerem Grade als $g(x)$ ist, und dass die Gleichungen $f(x)=0$, $g(x)=0$ durch keinen ganzzahligen nicht negativen Werth von x befriedigt werden. Dann besitzt die beständig convergirende Potenzreihe

$$y = 1 + \frac{f(0)}{g(0)} z + \frac{f(0)\,f(1)}{g(0)\,g(1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{f(0)f(1)f(2)}{g(0)g(1)g(2)} \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

die Eigenschaft, dass unter den Verhältnissen $y : y' : y'' : \cdots : y^{(r)}$ mindestens Eines irrational ist, wenn dem Argumente z irgend ein von Null verschiedener rationaler Werth beigelegt wird. Dabei bezeichnet r den Grad von $g(x)$.

Zu bemerken ist noch, dass offenbar $f(x)$ und $g(x)$ unbeschadet der Allgemeinheit ohne gemeinsamen Theiler vorausgesetzt werden dürfen.

Der specielle Fall $f(x)=1$, $g(x)=ax+b$ führt auf die Reihe (1) und den oben für diese Reihe bewiesenen Satz.

Königsberg i. Pr., den 24. März 1888.