15. *Bemerkung über die bei dem Zeeman'schen Phänomen stattfindenden Intensitätsverhältnisse; von W. Voigt.*

Während die allgemeinen Gesetze der Zerlegung von Spectrallinien durch die Wirkung eines Magnetfeldes auf verschiedenen Wegen in mit der Erfahrung übereinstimmender Form gewonnen sind, ist doch ein specieller Punkt, soweit mir bekannt, bisher unaufgeklärt geblieben, nämlich das eigenthümlich wechselnde Verhältniss zwischen den Intensitäten der aus derselben Spectrallinie entstehenden Componenten. Um nur von der einfachsten (normalen) Zerlegung zu sprechen, so zeigen die zahlreichen Triplets des Eisenspectrums nach den photographischen Aufnahmen des Hrn. Zeeman, von denen Exemplare durch des Herstellers Güte in meinem Besitz sind, in dieser Hinsicht die auffallendsten Verschiedenheiten, vom Ueberwiegen der inneren bis zum Dominiren der äusseren Componenten.

1. Die einfachste Form der Theorie, die ich entworfen habe[1]), führt zu einem starken Ueberwiegen der inneren Componente über die äusseren, wie im Folgenden darzulegen ist.

In der Nähe einer Spectrallinie (1) gelten nämlich für die complexen Geschwindigkeiten o_1 und o_2 der parallel und der normal zu den Kraftlinien polarisirten Schwingungscomponenten einer normal zu den Kraftlinien des Magnetfeldes fortgepflanzten ebenen Welle die Formeln[2])

$$(1) \qquad \left(\frac{v}{o_1}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\, \Theta\, \vartheta^2}{\Theta^2 - \Phi^2} - \frac{\varepsilon_1^2\, \Phi^2\, \vartheta^4}{(\Theta^2 - \Phi^2)(\Theta^2 - \Phi^2 - \varepsilon_1\, \Theta\, \vartheta^2)},$$

$$(2) \qquad \left(\frac{v}{o_2}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\, \vartheta^2}{\Theta},$$

wobei v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume, $2\pi\vartheta = \tau$ die Schwingungsperiode und ε_1 eine für die elektrische Erreg-

1) W. Voigt, Wied. Ann. **67**. p. 345. 1899.

2) l. c. p. 356. Formel (44) und (45).

barkeit der ponderabeln Materie charakteristische Constante bezeichnet; ferner ist

(3) $$\Theta = \vartheta^2 + i\vartheta\,\vartheta_1 - \vartheta_0^2, \quad \Phi = c\,R\,\vartheta$$

und es bedeuten ϑ_0, ϑ_1, c gleichfalls der betreffenden Materie individuelle Constanten, R aber die magnetische Feldstärke.

Setzt man

(4) $$\vartheta - \vartheta_0 = \delta$$

und betrachtet δ als klein neben ϑ_0, so nimmt bei Beschränkung auf die erste Ordnung des Verhältnisses δ / ϑ_0 Formel (2) die Gestalt an

(5) $$\left(\frac{v}{o_2}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0}{2\,\delta + i\,\vartheta_1}.$$

Nun gilt

(6) $$\frac{1}{o} = \frac{1 - i\,\varkappa}{\omega},$$

unter $\varkappa$ den Absorptionsindex, unter ω die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit verstanden ist; es wird also bei Einführung des Brechungsindex $v / \omega = n$

(7) $$n_2^2\,(1 - \varkappa_2^2) = 1 + \frac{2\,\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\delta}{4\,\delta^2 + \vartheta_1^2}, \quad 2\,n_2^2\,\varkappa_2 = \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\vartheta_1}{4\,\delta^2 + \vartheta_1^2}.$$

Das Maximum von $2\,n_2^2\,\varkappa_2$ liegt bei $\delta = 0$, und es ist für diesen Werth

(8) $$\overline{n_2^2}\,(1 - \overline{\varkappa_2^2}) = 1, \quad 2\,\overline{n_2^2\,\varkappa_2} = \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0}{\vartheta_1}.$$

Wir wollen annehmen, dass der letztere Ausdruck als eine Grösse erster Ordnung gelten, die Absorption also schwach sein soll; es gilt dann gleiches von $\varkappa_2$, und n_2 ist an der Stelle des Maximums von $2\,n_2^2\,\varkappa_2$ bis auf Grössen zweiter Ordnung gleich Eins.

Für die Beobachtung maassgebend ist das Product $n\,\varkappa$ (der Absorptionsmodul), das innerhalb der eingeführten Annäherung für die normal zu den Kraftlinien polarisirte Componente gegeben ist durch

(9) $$n_2\,\varkappa_2 = \frac{\frac{1}{2}\,\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\vartheta_1}{4\,\delta^2 + \vartheta_1^2 + \varepsilon_1\,\vartheta_0\,\delta};$$

$n_2\,\varkappa_2$ verhält sich also wegen der Kleinheit von $\varepsilon_1\,\vartheta_0 / \vartheta_1$ merklich wie $n_2^2\,\varkappa_2$. Der Gleichung (2) entspricht demnach ein Absorptionsstreifen bei $\delta = 0$.

Die aus dem Ausdruck (1) für $(v/o_1)^2$ folgenden Absorptionsstreifen der parallel zu den Kraftlinien polarisirten Componente liegen nahe bei $\delta = \pm \frac{1}{2} c R$. Sollen dieselben sich deutlich von dem durch (2) gegebenen unterscheiden, so muss jedenfalls $n_2 \varkappa_2$ für $\delta = \pm \frac{1}{2} c R$ klein gegen seinen Maximalwerth $\varepsilon_1 \vartheta_0 / 2 \vartheta_1$ sein. Hieraus folgt aber, dass $c R$ gross gegen ϑ_1 sein muss, und wir wollen festsetzen, dass zwischen diesen beiden Grössen dasselbe Ordnungsverhältniss besteht, wie zwischen ϑ_1 und $\varepsilon_1 \vartheta_0$.

Unter Benutzung dieser Resultate findet sich das letzte Glied der Formel (1) in der Nähe des Absorptionsstreifens als von dritter Ordnung, und bei seiner Vernachlässigung erhält man, wenn man (1) schreibt:

$$(10) \qquad \left(\frac{v}{o_1}\right)^2 = 1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon_1 \vartheta^2 \left(\frac{1}{\Theta + \Phi} + \frac{1}{\Theta - \Phi}\right),$$

für die Umgebung des oben betrachteten Streifens

$$(11) \qquad n_1^2 = 1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon_1 \vartheta_0 \left[\frac{2\delta + cR}{(2\delta + cR)^2 + \vartheta_1^2} + \frac{2\delta - cR}{(2\delta - cR)^2 + \vartheta_1^2}\right],$$

$$(12) \qquad 2 n_1^2 \varkappa_1 = \tfrac{1}{2} \varepsilon_1 \vartheta_0 \vartheta_1 \left[\frac{1}{(2\delta + cR)^2 + \vartheta_1^2} + \frac{1}{(2\delta - cR)^2 + \vartheta_1^2}\right].$$

Für $2\delta = \pm c R$, d. h. für den Ort der Absorptionsstreifen, wird

$$(13) \qquad n_1^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0 \vartheta_1 c R}{(2 c R)^2 + \vartheta_1^2};$$

n_1 ist also hier nur um eine Grösse zweiter Ordnung von Eins verschieden, und wir erhalten innerhalb der festgesetzten Annäherung für beide Absorptionsmoduln die Maximalwerthe

$$(14) \qquad \overline{n_1 \varkappa_1} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{2 \vartheta_1}, \qquad \overline{n_2 \varkappa_2} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{\vartheta_1}.$$

Der dem mittleren Absorptionsstreifen zugehörige Werth $n \varkappa$ findet sich somit *doppelt so gross,* als der den beiden äusseren entsprechende.

2. Nach dem im Eingang Gesagten finden sich aber in Wirklichkeit bedeutende Abweichungen von diesem Verhältniss; es scheint, dass der Quotient $\overline{n_1 \varkappa_1} / \overline{n_2 \varkappa_2}$ *immer grösser* ist, als es nach der Formel (14) sein sollte, ja $\overline{n_2 \varkappa_2}$ ist mitunter sogar *kleiner* als $\overline{n_1 \varkappa_1}$.

Um zu entscheiden, in welcher Hinsicht die aufgestellten Differentialgleichungen zu erweitern sind, um diese Mannichfaltigkeit zu erklären, hat man nur zu beachten, welche Rolle die in (14) auftretenden Parameter ε_1, ϑ_0, ϑ_1 in der Theorie spielen. Dieselben treten allein in den Formeln[1]) auf, welche die Erregung von Schwingungen des für die absorbirende Substanz und speciell für den betrachteten Absorptionsstreifen charakteristischen Vectors $\mathfrak{K}_1$ mit den Componenten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ durch die elektrische Kraft K mit den Componenten X, Y, Z bestimmen und in diesen Parametern lauten, wenn die Z-Coordinatenaxe der magnetischen Feldstärke R parallel liegt,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{X}_1 + \vartheta_1 \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} + \vartheta_0^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_1}{\partial t^2} + c R \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t} = \varepsilon_1 X, \\ &\mathfrak{Y}_1 + \vartheta_1 \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t} + \vartheta_0^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_1}{\partial t^2} - c R \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial t} = \varepsilon_1 Y, \\ &\mathfrak{Z}_1 + \vartheta_1 \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t} + \vartheta_0^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_1}{\partial t^2} \qquad\qquad\quad = \varepsilon_1 Z. \end{aligned}\right.$$

Die beschriebenen Beobachtungen verlangen nun offenbar, dass von den Parametern in den *ersten beiden* Gleichungen einer oder mehrere von den mit gleichen Buchstaben bezeichneten in der *letzten* Gleichung verschieden sind. Eine solche Verschiedenheit kann bei dem an sich isotropen Körper natürlich nur als Folge des ausgeübten Feldes eintreten; die betreffenden Parameter müssen also in den verschiedenen Gleichungen verschiedene Functionen der magnetischen Feldstärke sein.

Die ε_1 als von der Feldstärke erheblich abhängig anzunehmen, erscheint unzulässig, weil damit eine Abhängigkeit der statischen Dielektricitätsconstante $\varepsilon = 1 + \sum \varepsilon_h$ von dem Magnetfelde eingeführt werden würde, die nicht beobachtet ist. Ebenso unzulässig erscheint die analoge Annahme in Bezug auf ϑ_0; denn sie würde eine die Zerlegung begleitende Verschiebung der Spectrallinien ergeben, die der Beobachtung widerspricht.

Dagegen steht nichts im Wege, den Parameter ϑ_1, der den Widerstand misst, welchen der Vector $\mathfrak{K}_1$ bei seinen Schwingungen findet, mit der Feldstärke wechselnd anzunehmen, und es entspricht den Symmetrieverhältnissen des Vorganges, für ϑ_1 in den beiden ersten Gleichungen eine, in der letzten

1) W. Voigt, l. c., vgl. Formelsystem (6) und (15).

eine andere *gerade* Function der Feldstärke zu setzen. Auch die Gleichung der Energie ist mit dieser Erweiterung vollkommen vereinbar.

Die nächstliegende Annahme wäre, $\vartheta_1 = \alpha_1 + \beta_1 R^2$ zu setzen (unter α_1 und β_1 Constanten verstanden), wo dann β_1 in den ersten beiden Gleichungen (15) einen anderen Werth haben müsste, als in der letzten. Ein *positives* β_1 würde ausdrücken, dass die Absorptionsstreifen mit wachsender Feldstärke an Intensität *verlieren*, ein *negatives*, dass sie *gewinnen*. Wenn es richtig ist, dass, wie behauptet wird, im Magnetfeld Streifen sichtbar werden, die ausserhalb desselben nur unmerkliche Intensität besitzen, so wird man das *letztere* Vorzeichen als das wahrscheinlichere betrachten müssen. Der Wahrnehmung, dass $n_1 \varkappa_1 / n_2 \varkappa_2$ immer grösser zu sein scheint, als nach der Theorie bei constant genommenen ϑ_1 sein sollte, könnte man dann am einfachsten dadurch entsprechen, dass man β_1 in den ersten zwei Gleichungen (13) negativ $= -\gamma$, in der letzten aber gleich Null annähme, also setzte:

$$\overline{n_1 \varkappa_1} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{2(\alpha_1 - \gamma_1 R^2)}, \qquad \overline{n_2 \varkappa_2} = \frac{\varepsilon_1 \vartheta_0}{\alpha_1}. \tag{16}$$

3. Noch sei auf eine interessante Folgerung aus diesen Resultaten hingewiesen. Nach früher von mir Gegebenem[1]) ist das Emissionsvermögen E einer homogenen planparallelen und in parallelen Ebenen cohärent schwingenden Schicht von der Dicke l für Licht von der Wellenlänge λ bei schwacher Absorption gegeben durch die Formel

$$E = \frac{4\pi k^2 l}{\lambda} \cdot n \varkappa, \tag{17}$$

in der k eine universelle Function der Temperatur bezeichnet.

Diese Formel lässt sich auf den Fall incohärenter Schwingungen jedenfalls soweit übertragen, dass man für sehr wenig verschiedene Farben:

$$E = k' \cdot n \varkappa \tag{18}$$

setzen darf, wo dann k' nur noch von der Dicke der leuchtenden Schicht und von der Temperatur abhängt. Ist $n \varkappa$ nur für einzelne Farben von merklicher Grösse, so kann man die Emission der übrigen ignoriren.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 380. Formel (63) 1899.

Das gesammte Emissionsvermögen einer im Magnetfeld befindlichen monochromatischen Flamme zerfällt hiernach in die zwei Theile:

$$E_1 = 2k'.\overline{n_1 \varkappa_1}, \quad E_2 = k'.\overline{n_2 \varkappa_2}, \tag{19}$$

die den parallel und normal zu den Kraftlinien polarisirten Schwingungen entsprechen. Da die ersteren in zwei für unsere Betrachtung identischen Spectrallinien vorhanden sind, so tritt in dem Ausdruck für E_1 der Factor 2 auf.

Ist der Parameter ϑ_1 eine Constante, so ist nach (14)

$$E_1 = E_2,$$

d. h. das prismatisch nicht zerlegte Licht der Flamme verhält sich wie *natürliches* Licht.

Wechselt dagegen ϑ_1 wie oben gesagt, gelten also die Formeln (16), so ist

$$E_1 > E_2,$$

und zwar wird der Unterschied zwischen beiden Grössen mit wachsender Feldstärke zunehmen. In diesem Falle wird das prismatisch nicht zerlegte Licht der im Magnetfeld befindlichen Flamme sich als theilweise nach den Kraftlinien polarisirt darstellen, und der polarisirte Antheil wird mit wachsender Feldstärke selbst zunehmen.

Diese Resultate stimmen mit den bekannten Beobachtungen der Herren Egoroff und Georgiewsky[1]) überein und können wohl als eine einfache Erklärung derselben gelten.[2])

Resultate.

Die erweiterten Hertz'schen Gleichungen geben von den wechselnden Intensitätsverhältnissen des Zeeman'schen Triplets[3]) Rechenschaft, wenn man nur die Widerstände, welche

---

1) N. Egoroff u. N. Georgiewsky, Compt. rend. **124**. p. 949. 1897.

2) In etwas anderer Weise werden die betr. Erscheinungen von Hrn. H. A. Lorentz (Zittingsverl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. 1897/98. p. 193) aufgefasst. Die von ihm herangezogene Absorption in der Flamme ist in der Formel (17) bereits berücksichtigt; sie scheint mir aber für sich allein zur Erklärung der Beobachtungen nicht auszureichen.

3) Zu einer theoretischen Untersuchung der complicirteren normal zu den Kraftlinien entstehenden Zerlegungen nach Seite der Intensitäten fehlt es noch an Beobachtungsmaterial.

den Schwingungen der für die einzelnen Spectrallinien charakteristischen Vectoren $\mathfrak{K}_h$ entgegenwirken, gemäss den Symmetrieverhältnissen des Magnetfeldes mit der Feldstärke variabel annimmt. Es scheint, dass diese Annahme zugleich die Beobachtung erklärt, dass im Magnetfelde Spectral- bez. Absorptionslinien sichtbar werden, die ausserhalb des Magnetfeldes nicht erkennbar sind.

Auch die Beobachtungen der Herren Egoroff und Georgiewsky über die theilweise Polarisation des nicht spectral zerlegten Lichtes einer im Magnetfelde befindlichen und normal zu den Kraftlinien betrachteten monochromatischen Flamme werden durch sie verständlich.

Göttingen, Anfang August 1899.

(Eingegangen 21. August 1899.)