

22.

Nachtrag zu dem zweiten Abschnitte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (S. Band 26, 30, 34 u. 36 dieses Journals.)

(Von Herrn Dr. *L. Oettinger*, ord. öffentl. Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. Br.)

§. 49.

Nachtrag zu §. 10 und 11.

In einer Urne sind n , mit den Zahlen 1, 2, 3, n bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus, betrachtet die aufgeschriebenen Zahlen und legt die Kugeln in die Urne zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine Kugel mit der auf ihr stehenden Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

Die Zahl der günstigen Fälle stimmt, wie leicht zu sehen, mit der Anzahl der Stellen-Elemente überein, welche entstehen, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur p ten Classe bildet. Bezeichnet man die Gruppen-Anzahl dieser Stellen-Elemente bei den Versetzungen mit Wiederholungen, nach Analogie der Stellen-Elemente bei den Versetzungen ohne Wiederholungen (Combinationslehre §. 43.), durch

$$St'([a_1, a_2, a_3, \dots a_n]^p,$$

so wird ihre Gruppenzahl auf eine ähnliche Weise wie jene und zwar auf folgende Weise gefunden.

Die Zahl der Gruppen, in welchen je ein Element auf der Stelle, welches seine Stellenzahl angiebt, erscheinen kann, ist p . Vor und nach ihm können alle Elemente in jeder möglichen Mischung auf $p - 1$ Stellen erscheinen. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ist

$$\frac{p}{1} n^{p-1}.$$

Diese Zählungsart führt jedoch zu viele Gruppen auf; denn es trifft sich, daß auflösende Gruppen unter zwei Elementen zugleich, also *zweimal* gezählt werden, während sie nur einmal gezählt werden sollten. Es müssen daher alle Gruppen ausgeschieden werden, in welchen die Stellen-Elemente paarweise zusammentreten können. Ihre Zahl ist, da keine Versetzungen

möglich sind, $\frac{p(p-1)}{1.2}$. Vor und nach diesen Gruppen können alle Elemente, in jeder möglichen Mischung, auf $p-2$ Stellen erscheinen. Die hiedurch bedingte und auszuschheidende Gruppenzahl ist also $\frac{p(p-1)}{1.2} n^{p-2}$. Führt man in dieser Zählungsweise durch allmähiges weiteres Ausscheiden fort, so ergibt sich folgende Zahl günstiger Gruppen:

$$(1.) \quad St'[a_1, a_2, \dots a_n]^p = pn^{p-1} - (p)_2 n^{p-2} + (p)_3 n^{p-3} - (p)_4 n^{p-4} + \dots$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Diese Gruppenzahl läßt sich auch auf das Binomium zurückführen und wie folgt darstellen:

$$(2.) \quad St'[a_1, a_2, \dots a_n]^p = n^p - [n^p - pn^{p-1} + (p)_2 n^{p-2} - (p)_3 n^{p-3} + \dots] \\ = n^p - (n-1)^p = \Delta(n-1)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn Nr. 1 oder 2 durch die Zahl aller möglichen Fälle n^p dividirt wird. Man erhält

$$(3.) \quad w = \frac{p}{n} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.n^4} + \dots \\ = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = \frac{\Delta(n-1)^p}{n^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit wird um so größer, je größer n und p sind; denn $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$ nähert sich in diesem Falle der Null mehr und mehr. In Nr. 3 kann höchstens $p=n$ werden. Man kann daher fragen: wie viele Ziehungen sind nöthig, um bei einer bestimmten Zahl von Kugeln einen gewissen Grad der Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß wenigstens eine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde? Zu dem Ende hat man x aus der Gleichung

$$w = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^x$$

zu entwickeln. Setzt man $w = \frac{r}{s}$, so ist

$$(4.) \quad x = \frac{\log\left(1 - \frac{r}{s}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\log s - \log(s-r)}{\log n - \log(n-1)}.$$

Der Grad der Wahrscheinlichkeit x ist übrigens, wie sich leicht erkennen läßt, in bestimmte Grenzen eingeschlossen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe unter den oben angegebenen Bedingungen zusam-

mentreffen werde, ist

$$(5.) \quad w = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot n^2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} + \dots = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Zugleich ergibt sich aus (5.) die Zahl der Gruppen bei den Versetzungen mit Wiederholungen, wo kein Element auf seiner Stelle erscheint. Sie ist

$$(6.) \quad St'[0; a_1, a_2, a_3, \dots a_n]^p \\ = n^p - pn^{p-1} + (p)_2 n^{p-2} - (p)_3 n^{p-3} + \dots = (n-1)^p.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in p Ziehungen gerade r Kugeln (nicht mehr und nicht weniger) mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden?

Die Zahl der Gruppen, in welchen gerade r Elemente zugleich an ihrer Stelle erscheinen, ist $\frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$. Außer diesen dürfen auf den übrigen $(p-r)$ Stellen keine Stellen-Elemente vorkommen. Um die Zahl der günstigen Fälle zu finden, muß in (6.) $p-r$ statt p gesetzt und der gefundene Ausdruck mit $(p)_r$ verbunden werden. Dann ist die fragliche Gruppenzahl:

$$(7.) \quad St'[r; a_1, a_2, \dots a_n]^p = \frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} (n-1)^{p-r}$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$(8.) \quad w = \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r n^r} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-r}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in der Ziehungsreihe zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle ergibt sich, wenn man aus (7.) die Zahl der Gruppen nimmt, in welchen gerade $r, r+1, r+2, \dots p$ Elemente an ihrer Stelle erscheinen. Man erhält sie, wenn in (7.) allmählig $r, r+1, r+2, \dots p$ statt r gesetzt wird. Demnach ist

$$St'[r, r+1, r+2, \dots p; a_1, a_2, a_3, \dots a_n]^p \\ = (p)_r (n-1)^{p-r} = (p)_r \left[n^{p-r} - \frac{p-r}{1} n^{p-r-1} + \frac{(p-r)(p-r-1)}{1 \cdot 2} n^{p-r-2} - \dots \right] \\ + (p)_{r+1} (n-1)^{p-r-1} = (p)_{r+1} \left[n^{p-r-1} - \frac{p-r-1}{1} n^{p-r-2} + \frac{(p-r-1)(p-r-2)}{1 \cdot 2} n^{p-r-3} - \dots \right] \\ + (p)_{r+2} (n-1)^{p-r-2} = (p)_{r+2} \left[n^{p-r-2} - \frac{p-r-2}{1} n^{p-r-3} + \frac{(p-r-2)(p-r-3)}{1 \cdot 2} n^{p-r-4} - \dots \right] \\ \dots \dots \dots$$

Ordnet man diese Darstellung nach den Potenzen von n , so ergibt sich

$$(p)_{r+1} \left(1 - \frac{r+1}{1}\right) n^{p-r-1} = - (p)_{r+1} \frac{r}{1} n^{p-r-1}$$

$$(p)_{r+2} \left(1 - \frac{r+1}{1} + \frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\right) n^{p-r-2} = (p)_{r+2} \frac{r(r+1)}{1.2} n^{p-r-2},$$

$$(p)_{r+3} \left(1 - \frac{r+1}{1} + \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} - \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}\right) n^{p-r-3} = - (p)_{r+3} \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} n^{p-r-3}$$

u. s. w.

Die Zahl der günstigen Fälle läßt sich daher auch so darstellen:

$$(9.) \quad St'[r, r+1, r+2, \dots, p; a_1, a_2, \dots, a_n]^p \\ = (p)_r n^{p-r} - (p)_{r+1} \frac{r}{1} n^{p-r-1} + (p)_{r+2} \frac{r(r+1)}{1.2} n^{p-r-2} - (p)_{r+3} \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} n^{p-r-3} + \dots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$(10.) \quad w = \left[\frac{(p)_r}{(n-1)^r} + \frac{(p)_{r+1}}{(n-1)^{r+1}} + \frac{(p)_{r+2}}{(n-1)^{r+2}} + \dots \right] \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p \\ = \frac{(p)_r}{n^r} \left[1 - \frac{(p-r)r}{(r+1)n} + \frac{(p-r)(p-r-1)r}{1.2(r+2)n^2} - \frac{(p-r)(p-r-1)(p-r-2)r}{1.2.3(r+3)n^3} + \dots \right] \\ = \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1.2 \dots (r-1)n^r} \int_0^1 x^{r-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{p-r} dx.$$

Setzt man in (10.) $s+1$ statt r , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens s Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen übereinstimmen werden,

$$(11.) \quad w = 1 - \frac{(p)_{s+1}}{n^{s+1}} \left[1 - \frac{(p-s-1)(s+1)}{(s+2)n} + \frac{(p-s-1)(p-s-2)(s+1)}{1.2(s+3)n^2} - \dots \right] \\ = 1 - \frac{(p)_{s+1}}{n^{s+1}} (s+1) \int_0^1 x^s \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{p-s-1} dx.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens r und höchstens s Kugeln (also $r, r+1, r+2, \dots, s$) mit den auf ihnen stehenden Zahlen in der Ziehungsreihe zusammentreffen werden, ergibt sich, wenn man $s+1$ in (10.) setzt und das Resultat von (10.) abzieht. Sie ist

$$(12.) \quad w = \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1.2 \dots (r-1)n^r} \int_0^1 x^{r-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right) dx \\ - \frac{p(p-1) \dots (p-s)}{1.2 \dots s.n^{s+1}} \int_0^1 x^s \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{p-s-1} dx.$$

In einer Urne befinden sich m Kugel-Arten, von welchen jede n , mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ bezeichnete Kugeln enthält. p Kugeln werden einzeln heraus genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine Kugel mit der auf ihr geschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffe?

Man sieht leicht, daß die Zahl der günstigen Fälle mit den Gruppen der Stellen-Elemente zusammenfällt, welche entstehen, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen zur p ten Classe aus m Elementenreihen aufstellt. Die Gruppenzahl läßt sich ganz auf die oben zu Nr. 1. angegebene Weise finden, wenn man erwägt, daß die auflösenden Gruppen jeweils so viel mal mehr vorkommen werden, als die mit einerlei Stellenzahlen bezeichneten Elemente aus den verschiedenen Elementenreihen Versetzungen mit Wiederholungen zu der erforderlichen Classe (m^1, m^2, m^3, \dots) geben können. Diesem zufolge ist die Zahl der Stellen-Elemente (günstige Gruppen-Anzahl)

$$(13.) \quad St'[a_1, a_2, \dots a_n; b_1, b_2, \dots b_n; c_1, c_2, \dots c_n; \dots m_1, m_2, \dots m_n]^p \\ = p \cdot m (mn)^{p-1} - (p)_2 m^2 (mn)^{p-2} + (p)_3 m^3 (mn)^{p-3} - p_4 m^4 (mn)^{p-4} + \dots \\ = (mn)^p - (mn - m)^p = m^p [n^p - (n-1)^p] = m^p A(n-1)^p.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn durch $(mn)^p$ die Zahl aller möglichen Fälle dividirt wird:

$$(14.) \quad w = \frac{p}{n} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.n^4} + \dots$$

Bleibt man bei dem eben bezeichneten Entwicklungsgange, so lassen sich leicht die nachstehenden Fragen beantworten.

Die Bedingungen sind wie vorhin. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

$$(15.) \quad w = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} + \dots = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß gerade r , nicht mehr und nicht weniger, mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden, ist

$$(16.) \quad w = \frac{(p)_r m^r \cdot m^{p-r} (n-1)^{p-r}}{(mn)^p} = \frac{(p)_r}{n^r} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-r} = \frac{(p)_r}{(n-1)^r} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens r Kugeln auf ihrer Stelle erscheinen werden, ist

$$(17.) \quad w = \frac{1}{n^r} \left[(p)_r \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-r} + (p)_{r+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-r-1} + (p)_{r+2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-r-2} + \dots \right] \\ = \frac{(p)_r}{n^r} \left[1 - \frac{(p-r)r}{(r+1)n} + \frac{(p-r)(p-r-1)r}{1.2.(r+2)n^2} - \frac{(p-r)(p-r-1)(p-r-2)r}{1.2.3.(r+3)n^3} + \dots \right] \\ = \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1.2 \dots (r-1)n^r} \int_0^1 x^{r-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{p-r} dx.$$

Man sieht aus der Vergleichung von (3. und 14), (5. und 15.), (8. und 16.), (10. und 17.), daß die vorgelegten Fragen, obgleich von wesentlich verschiedenen Bedingungen ausgehend, doch zu einerlei Resultat führen.

An die bisher aufgestellten Gleichungen knüpft sich die Beantwortung folgender Probleme aus der Combinationslehre.

Werden die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementenreihen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n; c_1, c_2, c_3, \dots, c_n; \dots, m_1, m_2, \dots, m_n$ zur p ten Classé gebildet, so ist die Zahl der Gruppen, in welchen kein Stellen-Element erscheint,

$$(18.) \quad St'[0; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots, m_1, m_2, \dots, m_n]^p \\ = (mn)^p - pm(mn)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} m^2 (mn)^{p-2} - \dots = m^p (n-1)^p,$$

und diejenige, worin gerade r Stellen-Elemente erscheinen,

$$(19.) \quad St'[r; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots, m_1, m_2, \dots, m_n]^p \\ = \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1.2 \dots r} m^r (n-1)^{p-r};$$

ferner diejenige, worin wenigstens r Stellen-Elemente erscheinen,

$$(20.) \quad St'[r, r+1, \dots, p; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots, m_1, m_2, \dots, m_n]^p \\ = (p)_r m^r \left[n^{p-r} - (p-r) \frac{rn^{p-r-1}}{r+1} + (p-r)_2 \frac{rn^{p-r-2}}{r+2} - (p-r)_3 \frac{rn^{p-r-3}}{r+3} + \dots \right].$$

In jeder von k Urnen sind n mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ bezeichnete Kugeln enthalten. Man zieht allmählig alle Kugeln aus jeder Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine Kugel in der Ziehungsreihe mit der darauf geschriebenen Zahl zusammentreffe?

Das fragliche Ereigniß kann entweder bei dem Ziehen der Kugeln aus der ersten Urne, oder, wenn es nicht geschieht, bei dem Ziehen aus der zweiten, dritten etc. eintreffen. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens nach (2. §. 10.) durch

$$w_1 = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{1.2 \dots n}$$

und die entgegengesetzte durch $w_2 = 1 - w_1$, so ergibt sich für die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$(21.) \quad w = w_1 + w_2 w_1 + w_2^2 w_1 + w_2^3 w_1 + \dots w_2^{k-1} w_1 = w_1 \frac{w_2^k - 1}{w_2 - 1} \\ = w_1 \frac{1 - w_2^k}{1 - w_2} = 1 - w_2^k.$$

Dies Nämliche gilt auch für den Fall, wenn in jeder Urne m Arten von Kugeln enthalten sind, welche die genannten Zahlen zur Aufschrift haben. Die Werthe von w_1 und w_2 sind dann aus (2. §. 11.) einzuführen.

Die Bedingungen sind wie vorhin. Man zieht aus jeder Urne gleichzeitig eine Kugel, ohne die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen, und fährt so fort, bis p Kugeln aus jeder Urne gezogen sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle, gleichzeitig in einer Ziehung erscheinenden Kugeln die nämliche Zahl haben, und daß diese Zahl mit der Ordnungszahl in der Ziehungsreihe zusammentreffe?

Die Zahl der günstigen Fälle findet sich ganz nach der zu Nr. 1. angegebenen Schlufsweise. Das gleichzeitige Zusammentreffen von je k gleichbezeichneten Kugeln aus allen Urnen vermehrt die Zahl der günstigen Fälle nicht. Es giebt immer nur eine Art, wie Dies geschehen kann. Demnach giebt es p günstige Fälle, die sich mit den Versetzungen ohne Wiederholungen auf den übrigen Stellen verbinden können. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ist $p[(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)]^k$. Hievon sind nun diejenigen Gruppen auszusondern, in welchen das Zusammentreffen paarweise Statt findet. Sie sind

$$\frac{p(p-1)}{1.2}[(n-2)(n-3)\dots(n-p+1)]^k$$

u. s. w. Die Fortsetzung dieser Schlüsse giebt folgende Zahl der 'günstigen Gruppen:

$$22. \quad St'[a_1, a_2, \dots a_n; b_1, b_2, \dots b_n; \dots k_1, k_2, \dots k_n]^{p, p, p, \dots} \\ = p[(n-1)^{p-1-1}]^k - (p)_2[(n-2)^{p-2-1}]^k + (p)_3[(n-3)^{p-3-1}]^k - \dots$$

Wird $[n(n-1)\dots(n-p+1)]^k$ durch die Zahl aller möglichen Fälle dividirt, so ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit, und man erhält

$$23. \quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)}{1.2[n(n-1)]^k} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^k} - \dots$$

Werden alle Kugeln aus jeder Urne gezogen, so ist

$$24. \quad w = \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{1.2[n(n-1)]^{k-1}} + \frac{1}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^{k-1}} - \dots$$

Die nämliche Frage läßt sich stellen, wenn in jeder Urne mehrere gleich bezeichnete Kugel-Arten (m) vorhanden sind und p Kugeln einzeln und gleichzeitig aus jeder Urne gezogen werden, ohne daß man die gezogene Kugel in die Urne zurücklegt. Die Zahl der günstigen Fälle wird durch die gleiche Schlufsweise, wie vorhin, gefunden; wobei jedoch zu bemerken ist,

dafs die Zahl der auflösenden Gruppen zunimmt, indem in jeder Urne m Kugel-Arten vorhanden sind, von denen jede die entsprechenden Elemente liefert. Die Zahl der günstigen Gruppen ist

$$25. \quad A = pm^k[(mn-1)^{p-1|-1}]^k - (p)_2 m^{2k}[(mn-2)^{p-2|-1}]^k \\ + (p)_3 m^{3k}[(mn-3)^{p-3|-1}]^k - \dots$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich, durch Dividiren mit $[(mn)^{p|-1}]^k$,

$$26. \quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)m^{2k}}{1.2[mn(mn-1)]^k} + \frac{p(p-1)(p-2).m^{3k}}{1.2.3[mn(mn-1)(mn-2)]^k} - \dots$$

Werden unter den nämlichen Bedingungen aus k Urnen, von welchen jede n , mit den Zahlen 1, 2, 3, n bezeichnete Kugeln enthält, je p Kugeln einzeln und gleichzeitig gezogen, wird stets die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt, und fragt man, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs wenigstens einmal alle gleichzeitig gezogenen Kugeln die gleiche, mit der Ziehungsreihe übereinstimmende Zahl zeigen, so findet sich für die dem Ereignis günstige Gruppenzahl:

$$27. \quad St'[a_1, a_2, \dots a_n; b_1, b_2, \dots b_n; \dots k_1, k_2, \dots k_n]^{p, p, p, \dots} \\ = pn^{(p-1)k} - (p)_2 n^{(p-2)k} + (p)_3 n^{(p-3)k} - \dots \\ = n^{pk} - [n^{pk} - pn^{(p-1)k} + (p)_2 n^{(p-2)k} - \dots] = n^{pk} - (n^k - 1)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn man durch n^{pk} dividirt, und ist

$$28. \quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^{2k}} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^{3k}} - \dots \\ = 1 - \frac{(n^k - 1)^p}{n^{pk}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^p.$$

Sind in jeder Urne m verschiedene, mit 1, 2, 3, n bezeichnete Kugelarten enthalten, wird unter den angegebenen Bedingungen je eine Kugel aus jeder Urne gezogen und Dies p mal wiederholt, so ist die Zahl der günstigen Fälle:

$$29. \quad A = pm^k(mn)^{(p-1)k} - (p)_2 m^{2k}(mn)^{(p-2)k} + (p)_3 m^{3k}(mn)^{(p-3)k} - \dots \\ = (mn)^{pk} - [(mn)^{pk} - pm^k(mn)^{(p-1)k} + (p)_2 m^{2k}(mn)^{(p-2)k} \dots] \\ = (mn)^{pk} - m^{pk}(n^k - 1)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, nach den gehörigen Reductionen,

$$30. \quad w = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^p.$$

Sie fällt mit (28.) zusammen. Man kann, wie man sieht, auf die vorliegenden Fälle auch die Fragen ausdehnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß gerade r , oder wenigstens r Kugeln unter einander mit den aufgeschriebenen Zahlen in den p Ziehungsreihen übereinstimmen werden. Ihrer Beantwortung steht keine weitere Schwierigkeit entgegen. Zugleich sieht man, daß die in (22. bis 30.) gefundenen Gleichungen allgemeiner sind, als die in (§. 10. und 11.) gegebenen, so wie daß sich letztere aus jenen ableiten lassen, wenn $k=1$ gesetzt wird; was für die Richtigkeit der hier gegebenen Gleichungen spricht.

Anmerkung. Von den in diesem Paragraph mitgetheilten Entwicklungen hat *Laplace* die Nr. 24 seiner *Théor. anal. d. prob.* p. 224 et 225 entwickelt. Sein Text und die dazu entwickelte Gleichung passen aber nicht zusammen, und seine Gleichung beantwortet eine andere als die von ihm gestellte Frage. Seine Worte sind:

„Concevons maintenant un nombre i d'urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes (hier durch die Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet) et que l'on tire successivement toutes les boules de chaque urne. On peut déterminer la probabilité, qu'une ou plusieurs boules de la même couleur sortiront au même rang dans les i tirages.”

Dieses Problem fällt offenbar mit dem obigen Nr. 21 zusammen und ist, wie leicht zu sehen, von dem in (24.) beantworteten ganz verschieden. *Laplace* hat bei Stellung der Aufgabe das *gleichzeitige* Erscheinen der mit gleicher Zahl bezeichneten Kugeln (bei ihm Kugeln von gleicher Farbe) übersehen; was jedoch die hervortretende Grundbedingung in dem vorliegenden Probleme bildet. Er hätte das Problem so aufstellen sollen, wie es zu (24.) gestellt wurde.