

# Lehrsätze über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelgebüsche.

(Von TH. REYE in Strassburg i. E.)

---

Die  $\infty^n$  Elemente einer linearen Mannigfaltigkeit  $|M_n|$  sind bekanntlich in analoger Weise innig mit einander verbunden, wie die  $\infty^2$  Punkte oder Geraden einer Ebene, die  $\infty^2$  Strahlen oder Ebenen eines Bündels und die  $\infty^3$  Punkte oder Ebenen des Raumes. Beliebige  $n + 1$  von ihnen bestimmen, wenn sie linear von einander unabhängig sind, die ganze Mannigfaltigkeit  $|M_n|$ , und diese enthält jede lineare Mannigfaltigkeit  $|M_i|$ , die durch beliebige  $i + 1$  ihrer Elemente bestimmt ist. Die Zusammenfassung projectiver Gebilde zu linearen Mannigfaltigkeiten fördert deshalb die *systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, welche JACOB STEINER der geometrischen Forschung zur Aufgabe machte. Zudem sind mit solchen Mannigfaltigkeiten verschiedenartige geometrische Gestalten und mancherlei Erzeugnisse ihrer projectiven Gebilde verbunden, die an sich von erheblichem Interesse sind.

Die nachfolgenden Sätze über derartige Mannigfaltigkeiten lassen sich aus meiner: *Synthet. Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme* (Leipzig 1879) (\*) und meiner Abhandlung: *Ueber lineare Mannigfaltigkeiten projectiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume, I* (in Crelle's Journal, Bd. 104) ableiten mit Hülfe des Satzes:

« Die Potenzebenen, welche eine beliebige Kugel  $\alpha$  mit homologen Kugeln projectiver Kugelbüschel, Kugelbündel oder Kugelgebüsche bestimmt,

---

(\*) REYE, *Geometria sintetica delle Sfere e dei loro Sistemi lineari*. Traduzione per MASSIMO MISANI, Milano 1881.

„entsprechen einander in projectiven Ebenenbüscheln, collinearen Ebenen-  
bündeln resp. collinearen Räumen.“

Mit linearen Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel hat sich meines Wissens Herr TIMERDING (\*) zuerst beschäftigt, und durch ihn wurde ich zu Untersuchungen darüber angeregt.

Mit  $|k_n|$ ,  $|B_n|$  resp.  $|\Gamma_n|$  bezeichne ich lineare,  $n$ -fach unendliche Mannigfaltigkeiten projectiver Kugelbüschel  $k$ , Kugelbündel  $B$  resp. Kugelgebüsche  $\Gamma$ , und bemerke ein für allemal gleich hier, dass diese Mannigfaltigkeiten durch Inversion in lineare Mannigfaltigkeiten gleicher Art übergehen. Ihre Specialfälle lassen wir i. A. unberücksichtigt. Von den mit ihnen verbundenen und hier erörterten Gebilden seien hervorgehoben eine Congruenz von  $\infty^2$  Kreisen (13.), von denen zu einer beliebigen Kugel oder Ebene nur einer normal ist und durch einen beliebigen Punkt nur einer geht, ein Complex von  $\infty^3$  Kreisen (27.), von denen auf einer beliebigen Kugel oder Ebene nur einer liegt, und eine Gruppe von acht Punkten (18.), von welchen beliebige sieben den achten eindeutig bestimmen, die aber nicht die Schnittpunkte von drei linear unabhängigen Flächen zweiter Ordnung sind.

### § 1. SCHAAREN PROJECTIVER KUGELBÜSCHEL (\*\*).

1. Eine Schaar  $|k_1|$  projectiver Kugelbüschel ist durch beliebige zwei ihrer  $\infty^1$  Büschel bestimmt. Sie erzeugt durch die homologen Kugeln ihrer Büschel eine zweite Schaar projectiver Kugelbüschel, die *Leitschaar* der ersten. Die Büschel von jeder der beiden Schaaren bestehen aus homologen Kugeln der Büschel der anderen Schaar und sind durch diese Leitschaar projectiv auf einander bezogen. Beide Büschelschaaren sind durch zwei beliebige projective Büschel der einen oder der anderen Schaar eindeutig bestimmt und in dem Kugelgebüsch enthalten, das die beiden Büschel verbindet. Die  $\infty^2$  Kugeln ihrer  $\infty^1$  Büschel bilden in dem Gebüsch eine quadratische Congruenz  $C_2$ ; durch jede Kugel von  $C_2$  geht ein Büschel der einen und einer der anderen Schaar.

2. Die Potenzebenen, welche die Kugeln der Congruenz  $C_2$  mit einer beliebigen Kugel  $\alpha$  bestimmen, umhüllen i. A. eine Regelfläche  $R^2$  zweiten

(\*) In *Crelle's Journal*, Bd. 121, S. 193.

(\*\*) Vgl. *Crelle's Journal*, 104, S. 213 und TIMERDING a. a. O.

Grades; die Potenzaxen, welche die Büschel der beiden Schaaren  $|k_1|$  mit  $z$  bestimmen, bilden die beiden Regelschaaren von  $R^2$ . Wenn die Kugel  $z$  sich ändert, so geht die Fläche  $R^2$  in collineare Flächen zweiten Grades über, die zu je zweien perspective Lage haben (\*). Auch die Polarebenen eines beliebigen Punktes bezüglich der Kugeln der Congruenz  $C_2$  umhüllen eine zu  $R^2$  collineare Regelfläche zweiten Grades. Die Mittelpunkte der Kugeln von  $C_2$  liegen i. A. auf einer zu  $R^2$  reciproken Fläche  $R_1^2$  zweiten Grades (\*). Die quadratische Congruenz  $C_2$  besteht demnach aus den  $\infty^2$  Kugeln, deren Mittelpunkte auf  $R_1^2$  liegen, und die eine gewisse Kugel, die Orthogonalkugel des durch  $C_2$  gehenden Gebüsches, rechtwinklig schneiden; ihre  $\infty^2$  Kugeln umhüllen nach DARBOUX eine Cyklide (\*\*), d. h. eine Fläche vierter Ordnung, die den unendlich fernen Kugelschnitt doppelt enthält. Die biquadratische Schnittlinie der Orthogonalkugel mit  $R_1^2$  ist der Ort der Punktkugeln von  $C_2$ .

3. Die Grundkreise der  $\infty^4$  Kugelbüschel beider Schaaren liegen i. A. auf einer Fläche  $F^4$  vierter Ordnung und bilden auf ihr zwei Kreisschaaren. Jeder Kreis der einen Schaar kann mit jedem Kreise der anderen durch eine Kugel der Congruenz  $C_2$  verbunden werden (1.). Diese Kugel schneidet die Fläche  $F^4$  in den beiden Kreisen und berührt  $F^4$  doppelt in deren Schnittpunkten. Die Fläche  $F^4$  wird demnach von den Kugelcongruenz  $C_2$  umhüllt und ist die Cyklide von DARBOUX (2.); sie geht durch Inversion bezüglich der Orthogonalkugel von  $C_2$  in sich selbst über. Auch die Ebenen der Congruenz enthalten je zwei Kreise der beiden Schaaren und berühren die Cyklide doppelt; sie gehen durch das Centrum der Orthogonalkugel und tangieren die Regelfläche  $R^2$  (vgl. 2.), umhüllen also einen Kegel zweiter Ordnung. Die Kugeln durch einen beliebigen Kreis der einen Schaar schneiden die Cyklide in den Kreisen der anderen Schaar und bilden einen der  $\infty^4$  Kugelbüschel von  $C_2$ . Je zwei projective Büschel der einen oder der anderen Schaar  $|k_1|$  erzeugen die Cyklide und eine ihrer Kreisschaaren.

4. Ein beliebiges Kugelgebüsch hat mit der Congruenz  $C_2$  eine quadratische Schaar von Kugeln gemein. Diese Kugelschaar ist in einem Bündel enthalten und umhüllt eine specielle Cyklide, welche eine Schaar

(\*) Vgl. REYE, *Synth. Geom. der Kugeln und linearen Kugelsysteme* (Lpz. 1879), S. 45-46.

(\*\*) DARBOUX, *Sur une Classe remarquable de Courbes et de Surfaces algébriques*, Paris 1873, p. 116. Ueber Cycliden und ihre verschiedenen Arten vgl. LORIA, *Ricerche intorno alla Geometria della Sfera* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1884).

kreisförmiger Krümmungslinien hat und der Cyklide  $F^4$  längs einer biquadratischen Raumcurve eingeschrieben ist; die Mittelpunkte ihrer Kugeln liegen i. A. auf einem Kegelschnitt. Die Potenzebenen resp. Potenzaxen, welche die Kugeln der quadratischen Schaar mit einer Kugel oder einem Kreise bestimmen, umhüllen i. A. einen Kegel zweiter Ordnung resp. einen Kegelschnitt. Auch die Polarebenen eines beliebigen Punktes bezüglich dieser Kugeln umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung.

5. Die quadratische Congruenz  $C_2$  wird aus einer beliebigen Kugel  $z$  durch einen quadratischen Kugelcomplex  $C_3$  projicirt. Dieser enthält die K.-Büschel und-Bündel, welche  $z$  mit den Kugeln und Kugelbüscheln der Congruenz verbinden. Der Complex enthält zwei Schaaren von Kugelbündeln und hat  $z$  zur Doppelkugel; seine Ebenen umhüllen eine Regelfläche  $R^2$  zweiten Grades (2), und er besteht aus den  $\infty^2$  Büscheln, welche  $z$  mit den Berührungsebenen dieser Fläche verbinden. Der Ort der Punktkugeln des Complexes ist eine Cyklide, die zu sich selbst invers ist in Bezug auf  $z$ . Mit einem Kugelgebüsche hat der Complex  $C_3$  eine quadratische Kugelcongruenz gemein, die als eine Projection von  $C_2$  aus der Kugel  $z$  aufgefasst werden kann und dieselben Eigenschaften hat wie  $C_2$ .

6. Die  $\infty^1$  Kugelbündel, deren Orthogonalkugeln je einen Büschel der quadratischen Congruenz  $C_2$  bilden, sind in einem quadratischen Complex  $C'_3$  enthalten. Dieser enthält zwei Schaaren von Kugelbündeln und hat die Orthogonalkugel von  $C_2$  zur Doppelkugel. Der Ort seiner Punktkugeln ist die von  $C_2$  umhüllte Cyklide (3.); der Ort seiner Ebenen und der Potenzaxen seiner  $\infty^1$  Bündel ist die Regelfläche  $R^2_1$  zweiten Grades, welche die Mittelpunkte der Kugeln von  $C_2$  enthält (2.). Dieser quadratische Complex  $C'_3$  hat dieselben Eigenschaften wie der vorhin (5.) erwähnte  $C_3$ .

## § 2. DAS NETZ PROJECTIVER KUGELBÜSCHEL UND DIE REIHE PROJECTIVER KUGELBÜNDEL (\*).

7. Ein Netz  $|k_2|$  projectiver Kugelbüschel ist durch beliebige drei seiner  $\infty^2$  Büschel bestimmt; es enthält jede Büschelschaar, welche zwei dieser Büschel verbindet. Seine  $\infty^2$  Büschel erzeugen eine Reihe  $|B_1|$  von  $\infty^1$  Ku-

(\*) Vgl. *Crelle's Journal* 104 S. 214. Herr TIMERDING definiert a. a. O. das Netz, nicht aber die Reihe.

gelbündeln, die aus je  $\infty^2$  homologen Kugeln der Büschel bestehen und durch die Büschel des Netzes projectiv auf einander bezogen werden. Die  $\infty^1$  Bündel der Reihe erzeugen durch ihre homologen Kugeln die  $\infty^2$  Büschel des Netzes; die Bündelreihe  $|B_1|$  ist deshalb durch zwei beliebige ihrer projectiven Kugelbündel zugleich mit dem Büschelnetze  $|k_2|$  bestimmt.

Die Potenzpunkte, die eine beliebige Kugel  $z$  mit je einem Bündel der Reihe  $|B_1|$  bestimmt, liegen i. A. auf einer cubischen Raumcurve  $c^3$ ; die  $\infty^2$  Sehnen dieser Raumcurve aber sind die Potenzaxen, welche  $z$  mit je einem Büschel des Netzes  $|k_2|$  bestimmt. Da in der Potenzebene eines durch  $z$  gehenden Kugelbüschels i. A. drei Punkte und drei Sehnen der cubischen Raumcurve liegen, so hat der Büschel i. A. mit drei Bündeln der Reihe und mit drei Büscheln des Netzes je eine Kugel gemein.

8. Die  $\infty^2$  Büschel des Netzes  $|k_2|$  und die  $\infty^1$  Bündel der Reihe  $|B_1|$  liegen demnach in einem cubischen Kugelcomplex  $C_3$ , von dessen  $\infty^3$  Kugeln jede in einem Büschel von  $|k_2|$  und in einem Bündel von  $|B_1|$  enthalten ist. Die Ebenen des Complexes  $C_3$  umhüllen eine Regelfläche  $R^3$  dritten Grades, den Ort der Potenzaxen seiner  $\infty^1$  Kugelbündel, der Potenzebenen der  $\infty^2$  Büschel von  $|k_2|$  und der Potenzpunkte der  $\infty^2$  Kugelgebüsche, die je eine Büschelschaar von  $|k_2|$  enthalten. Die Centralebenen der  $\infty^1$  Bündel der Reihe  $|B_1|$  bilden i. A. einen cubischen Ebenenbüschel, dessen Axen die Centrallinien der  $\infty^2$  Büschel des Netzes  $|k_2|$  sind. Von diesen Axen liegt i. A. eine unendlich fern, und das Netz enthält daher einen und i. A. nur einen Ebenenbüschel. Die Ebenen dieses Büschels schneiden sich in der Doppelpunktgeraden der cubischen Regelfläche  $R^3$ . Die Punktkugeln des Complexes  $C_3$  und die Orthogonalkreise seiner  $\infty^1$  Kugelbündel liegen auf einer Fläche sechster Ordnung; diese enthält den unendlich fernen Kugelkreis dreifach und (vgl. 9.) einen andern Kreis doppelt, der mit den Orthogonalkreisen durch Kugeln verbunden werden kann.

9. Zwei beliebige Bündel der Reihe  $|B_1|$  haben eine Doppelkugel des cubischen Complexes  $C_3$  gemein. Durch die Doppelkugel gehen von dem Netze  $|k_2|$  zwei Kugelbüschel, die in je einem der beiden Bündel enthalten sind und aus Doppelkugeln von  $C_3$  bestehen. Der cubische Complex enthält einen Bündel von Doppelkugeln und in ihm  $\infty^1$  Büschel des Netzes  $|k_2|$ . Diese Büschel bilden eine specielle Schaar, und ihre Grundkreise liegen auf einer besonderen Cyklide. Sie bestimmen mit einer beliebigen Kugel Potenzaxen, die nicht auf einer Regelfläche sondern auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen; ihre Centrallinien umhüllen einen Kegelschnitt, und ihre  $\infty^1$

Ebenen berühren die cubische Regelfläche  $R^3$  doppelt (8.) und schneiden sich in der einfachen Leitlinie von  $R^3$ , welche mit der Potenzaxe des Doppelkugelbündels zusammenfällt.

10. Ein beliebiger Kugelbüschel kann mit den drei Bündeln der Reihe  $|B_i|$ , mit denen er Kugeln gemein hat (7.), durch Kugelgebüsche verbunden werden, und drei seiner Orthogonalkugeln sind zu je einem dieser Bündel orthogonal. Demnach bilden die  $\infty^2$  zu je einem Bündel von  $|B_i|$  orthogonalen Kugeln eine cubische Congruenz, die aus  $\infty^1$  Büscheln besteht. Ihre Mittelpunkte liegen i. A. auf einer cubischen Regelfläche, und die Potenzebenen, die sie mit einer beliebigen Kugel  $z$  bestimmen, umhüllen i. A. eine cubische Regelfläche. Einen ausgezeichneten Büschel der Congruenz bilden die Kugeln, die zu dem Doppelkugelbündel des Complexes  $C_3$  orthogonal sind. Ihre Mittelpunkte liegen auf der einfachen Leitlinie der ersteren, und ihre Potenzebenen mit  $z$  gehen durch die Doppelpunktsgerade der letzteren cubischen Regelfläche. Von den  $\infty^1$  Kugelbüscheln, die je zwei Kugeln der cubischen Congruenz verbinden, bestehen  $\infty^1$  aus concentrischen Kugeln, und deren Mittelpunkte liegen auf der Doppelpunktsgereaden der ersteren cubischen Regelfläche. Andere  $\infty^1$  von den  $\infty^1$  Büscheln gehen durch die beliebige Kugel  $z$ , und diese liegen in einem Bündel, welcher die einfache Leitlinie der zweiten cubischen Regelfläche zur Potenzaxe hat. Die Ebenen der cubischen Kugelcongruenz sind die Centralebenen der  $\infty^1$  Bündel der Reihe  $|B_i|$  und bilden einen cubischen Ebenenbüschel (8.); die Punktkugeln der Congruenz fallen mit den Knotenpunkten der Bündel von  $|B_i|$  zusammen und liegen auf einer Raumcurve sechster Ordnung (vgl. 13.).

11. Der cubische Complex  $C_3$  hat mit einem beliebigen Kugelgebüsch  $\Gamma$  eine cubische Kugelcongruenz gemein. Diese kann durch einen K.-Büschel beschrieben werden und enthält die Kugeln eines ausgezeichneten Büschels doppelt (9.). Die Potenzebenen, welche die  $\infty^2$  Kugeln der Congruenz mit einer beliebigen Kugel  $z$  bestimmen, umhüllen eine cubische Regelfläche; durch deren einfache Leitlinie gehen die sie doppelt berührenden Potenzebenen, welche die  $\infty^1$  Doppelkugeln mit  $z$  bestimmen. Die Ebenen der Congruenz umhüllen einen Kegel dritter Klasse; sie berühren die cubische Regelfläche und gehen durch den Potenzpunkt von  $\Gamma$ . Das Kugelgebüsch  $\Gamma$  enthält einen und i. A. nur einen Büschel des Netzes  $|k_2|$ ; dieser bestimmt mit  $z$  eine Potenzaxe, auf welcher die  $\infty^1$  Doppelpunkte der cubischen Regelfläche liegen.

12. Die Centrenfläche der cubischen Kugelcongruenz (11.) ist ebenfalls eine cubische Regelfläche, die zu der vorigen reciprok ist; ihre Doppelpunkte sind die Mittelpunkte der  $\infty^1$  Doppelkugeln, und ihre doppelt berührenden Ebenen gehen durch die Centrallinie des in der Congruenz enthaltenen Kugelbüschels von  $|k_2|$ . Diese Fläche hat mit der Orthogonalkugel von  $\Gamma$  eine Raumcurve sechster Ordnung gemein, den Ort aller Punktkugeln der Congruenz.

Wenn das Kugelgebüsch  $\Gamma$  durch einen Bündel der Reihe  $|B_1|$  geht, so hat es mit dem cubischen Complexe  $C_3$  diesen Bündel und eine Büschelschaar des Netzes  $|k_2|$  gemein. Die zugehörigen cubischen Regelflächen zerfallen dann in je eine Regelfläche zweiten Grades und einen Punkt oder eine Ebene. Jedes durch den Doppelkugelbündel von  $C_3$  gehende Gebüsch hat mit  $C_3$  einen Bündel der Reihe  $|B_1|$  gemein.

13. Von den Büscheln des Netzes  $|k_2|$  sind die  $\infty^2$  Grundkreise so im Raume vertheilt, dass eine beliebige Kugel oder Ebene zu nur einem von ihnen normal ist (11.), und dass folglich ein beliebiger Punkt auf nur einem von ihnen liegt. Eine Ausnahme machen die  $\infty^2$  Kugeln, die zu je einem Bündel der Reihe  $|B_1|$  orthogonal sind und (10.) eine cubische Congruenz bilden. Denn zu jeder von ihnen sind  $\infty^1$  der Grundkreise normal (12.), und zwar ist deren Ort eine Cyklide (3). Von den  $\infty^2$  Orthogonalkugeln der Reihe  $|B_1|$  reduciren sich  $\infty^1$  auf Punkte, und durch jeden von diesen gehen  $\infty^1$  auf einer Cyklide liegende Grundkreise des Netzes  $|k_2|$  und  $\infty^2$  homologe Kugeln seiner Büschel. Diese ausgezeichneten Punkte sind die Knotenpunkte der  $\infty^1$  Bündel von  $|B_1|$ , in ihnen schneiden sich je  $\infty^1$  homologe Kreise der Bündel und die  $\infty^2$  Cykliden, welche je eine Büschelschaar von  $|k_2|$  einhüllen (vgl. 3.), und sie liegen mit sechs Punkten des unendlich fernen Kugelkreises auf einer Raumcurve sechster Ordnung. Mit den  $\infty^2$  Grundkreisen des Netzes  $|k_2|$  hat die Raumcurve je vier Punkte gemein, und die Axe des in  $|k_2|$  enthaltenen Ebenenbüschels schneidet sie viermal. Das Büschelnetz  $|k_2|$  und die Bündelreihe  $|B_1|$  sind durch die Raumcurve eindeutig bestimmt.

§ 3. DER LINEARE COMPLEX PROJECTIVER KUGELBÜSCHEL UND DIE SCHAAR  
PROJECTIVER KUGELGEBÜSCHE (\*).

14. Ein linearer Complex  $|k_3|$  projectiver Kugelbüschel ist durch beliebige vier seiner Büschel bestimmt; er enthält  $\infty^3$  Büschelnetze  $|k_2|$  und  $\infty^4$  Büschelschaaren  $|k_1|$ . Seine  $\infty^3$  Büschel erzeugen eine Schaar  $|\Gamma_1|$  von  $\infty^4$  Kugelgebüschchen, die aus je  $\infty^3$  homologen Kugeln der Büschel bestehen und durch die Büschel projectiv auf einander bezogen werden. Die projectiven Gebüschchen der Schaar  $|\Gamma_1|$  erzeugen durch ihre homologen Kugeln die  $\infty^3$  Büschel des Complexes  $|k_3|$ , und zwei beliebige von ihnen bestimmen den Complex und zugleich die Schaar. Die Gebüschchen der Schaar enthalten folglich je  $\infty^2$  Büschel des Complexes  $|k_3|$ ; zu zweien oder dreien haben sie eine Büschelschaar  $|k_1|$  resp. einen Büschel des Complexes mit einander gemein.

15. Die  $\infty^3$  Büschel des linearen Complexes  $|k_3|$  bestimmen mit einer beliebigen Kugel  $z$  Potenzaxen, die einen tetraedralen quadratischen Strahlencomplex bilden. Jede Hauptebene dieses Strahlencomplexes ist die Potenzebene eines durch  $z$  gehenden Büschels von  $|k_3|$ ; durch die Kugel  $z$  gehen demnach i. A. vier Büschel des Complexes  $|k_3|$  und vier Gebüschchen der Schaar  $|\Gamma_1|$ . Auf der beliebigen Kugel  $z$  liegen also die Grundkreise von vier Büscheln des Complexes. Die  $\infty^4$  projectiven Gebüschchen der Schaar bestimmen mit  $z$  collineare, den Strahlencomplex erzeugende Ebenenräume; von diesen  $\infty^4$  Räumen aber arten i. A. vier aus in Ebenenbündel, und deren Mittelpunkte sind die vier Hauptpunkte des tetraedralen Strahlencomplexes und die Potenzpunkte der vier durch  $z$  gehenden Gebüschchen von  $|\Gamma_1|$ . Von den  $\infty^4$  Büschelschaaren des linearen Complexes  $|k_3|$  sind  $\infty^2$  speciell (vgl. 9.) und in Kugelbündeln enthalten, von denen i. A. sechs durch  $z$  gehen; die Potenzaxen dieser sechs Bündel verbinden die vier Hauptpunkte. Der Complex  $|k_3|$  enthält (8.) eine Schaar projectiver Ebenenbüschel (TIMERDING), und deren windschiefe Axen liegen mit den vier Hauptpunkten auf einer Fläche zweiten Grades.

16. Von den  $\infty^4$  Kugelgebüschchen der Schaar  $|\Gamma_1|$  bilden die Orthogonalkugeln eine rationale biquadratische Kugelschaar (\*\*). Vier von ihnen

(\*) Vgl. *Crelle's Journal* 104 S. 217 und TIMERDING a. a. O.

(\*\*) Herr TIMERDING discutirt a. a. O. insbesondere diese Kugelschaar und leitet u. a. die Sätze dieser N.º 16 ab.



sind zu einer beliebigen Kugel oder Ebene  $\alpha$  normal (15.) oder gehen durch einen beliebigen Punkt, vier der Orthogonalkugeln sind Ebenen- und acht reduciren sich auf Punkte. Zu beliebigen drei der Orthogonalkugeln ist allemal ein Büschel des Complexes  $|k_3|$  orthogonal (14.). Die Mittelpunkte der  $\infty^4$  Orthogonalkugeln liegen i. A. auf einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung. Diese Raumcurve schneidet die Axen der  $\infty^4$  in  $|k_3|$  enthaltenen Ebenenbüschel je dreimal und liegt mit ihnen auf einer Fläche zweiten Grades (15.). Die Potenzebenen, welche die Orthogonalkugeln von  $|\Gamma_1|$  mit einer Kugel  $\alpha$  bestimmen, bilden einen cubischen oder biquadratischen rationalen Ebenenbüschel, jenachdem  $\alpha$  eine oder keine der Orthogonalkugeln ist.

Von den  $\infty^3$  Kugelbüscheln des linearen Complexes  $|k_3|$  bilden die Centrallinien einen tetraedralen quadratischen Strahlencomplex, welcher die Orthogonalebenen der vier symmetrischen Gebüsche von  $|\Gamma_1|$  zu Hauptebenen hat. Die vier Hauptpunkte dieses Strahlencomplexes sind die Mittelpunkte von vier Büscheln concentrischer Kugeln, ihre sechs Verbindungslinien sind die Centrallinien von je  $\infty^4$  Büscheln des Complexes  $|k_3|$ .

17. Zu einer beliebigen Kugel  $\alpha$  sind  $\infty^4$  Büschel von  $|k_3|$  orthogonal, nämlich von den  $\infty^3$  in  $|k_3|$  enthaltenen Bündelnetzen i. A. je ein Büschel (11.). Diese  $\infty^4$  Büschel bilden eine Schaar  $|k_1|$ , und ihre zu  $\alpha$  normalen Grundkreise liegen auf einer Cyklide (3.). Ist aber  $\alpha$  die Orthogonalkugel eines Gebüsches der Schaar  $|\Gamma_1|$ , so sind zu ihr  $\infty^2$  Büschel des linearen Complexes  $|k_3|$  orthogonal (14.). Diese bilden in dem Gebüsch ein specielles Netz  $|k_2|$ ; ihre  $\infty^2$  zu  $\alpha$  normalen Grundkreise sind wieder so im Raume vertheilt, dass von ihnen nur einer zu einer beliebigen Kugel normal ist und nur einer durch einen beliebigen Punkt geht (13.).

18. Die Schaar  $|\Gamma_1|$  enthält acht specielle Gebüsche, deren Orthogonalkugeln sich auf Punkte reduciren (16.), und deren Kugeln durch je einen dieser acht „Grundpunkte“ gehen. In jedem Grundpunkte schneiden sich homologe Kugeln der  $\infty^3$  Büschel von  $|k_3|$  und die  $\infty^2$  Grundkreise eines speciellen Netzes des Complexes. Durch zwei beliebige Grundpunkte gehen die  $\infty^4$  Grundkreise einer speciellen Büschelschaar von  $|k_3|$ ; zu je dreien liegen die acht Grundpunkte auf 56 Grundkreisen des linearen Complexes  $|k_3|$ . Die Cykliden, welche die  $\infty^4$  Büschelschaaren von  $|k_3|$  umhüllen, schneiden sich in den acht Grundpunkten.

Beliebige sieben von den acht Punkten bestimmen eindeutig den achten und zugleich den linearen Büschelcomplex  $|k_3|$  nebst der Schaar  $|\Gamma_1|$  projectiver Kugelgebüsche. Jede Inversion, die einen der acht Grundpunkte zum

Centrum hat, verwandelt die sieben übrigen in sieben Punkte einer cubischen Raumcurve, den Complex  $|k_3|$  aber in einen speciellen Büschelcomplex, der ein Netz projectiver Ebenenbüschel enthält. Die cubische Raumcurve schneidet in den neuen sieben Punkten eine specielle Cyklide dritter Ordnung, welche beliebige zwei der Punkte zu Doppelpunkten hat; durch sechs dieser Punkte ist so der siebente eindeutig bestimmt.

#### § 4. NETZE PROJECTIVER KUGELBÜNDEL (\*).

19. Ein Netz  $|B_2|$  projectiver Kugelbündel ist durch beliebige drei seiner  $\infty^2$  Bündel bestimmt und enthält jede Bündelreihe, welche zwei dieser Bündel verbindet. Seine Bündel erzeugen durch ihre homologen Kugeln ein zweites Netz  $|B'_2|$  projectiver Kugelbündel, das « Leitnetz » von  $|B_2|$ . Die Bündel eines jeden der beiden Netze bestehen aus homologen Kugeln der Bündel des anderen Netzes und sind durch dessen Bündel projectiv auf einander bezogen. Jedes der Netze hat das andere zum Leitnetz, und drei beliebige seiner projectiven Bündel bestimmen beide Netze eindeutig.

20. Die  $\infty^2$  Potenzpunkte, welche die Kugelbündel der beiden Netze  $|B_2|$ ,  $|B'_2|$  mit einer beliebigen Kugel  $\alpha$  bestimmen, liegen auf einer allgemeinen Fläche  $F^3$  dritter Ordnung, der zu  $\alpha$  gehörigen « Ordnungsfäche » der Netze. Mit der Potenzaxe eines beliebig durch  $\alpha$  gehenden Kugelbündels hat  $F^3$  drei Potenzpunkte gemein, und diesen entsprechen in den Netzen drei paar Bündel, die mit  $\alpha$  und jenem beliebigen Bündel durch drei Kugelgebüsche verbunden werden können. Jedes dieser Gebüsche hat einen der drei Punkte zum Potenzpunkt und enthält  $\alpha$ . Unter der Orthogonalkugeln eines beliebigen Kugelbündels giebt es also i. A. drei, die zu je einem Bündel des einen Netzes und damit auch zu je einem Bündel des anderen orthogonal sind.

21. Die Orthogonalkugeln der  $\infty^2$  Bündel beider Netze bilden einen cubischen Complex  $C_3$ , worin zwei Systeme von je  $\infty^2$  Kugelbüscheln leicht nachzuweisen sind; in einem beliebigen Kugelbüschel liegen i. A. drei der Orthogonalkugeln (20.). Von den Potenzaxen der  $\infty^2$  Bündel des Netzes  $|B_2|$

---

(\*) Vgl. *Crelle's Journal* 104, S. 223.

gehen demnach drei durch der Mittelpunkt concentrischer Kugeln, d. h. durch einer beliebigen Punkt. Die Ebenen des Complexes  $C_3$  umhüllen eine Fläche  $\Phi^3$  dritter Klasse; sie sind die Centralebenen der  $\infty^2$  Bündel und enthalten deren Orthogonalkreise. Unter den Bündeln eines jeden der beiden Netze giebt es i. A. sechs, deren Orthogonalkreise Gerade sind (vgl. 22.), und diese zweimal sechs Geraden bilden auf  $\Phi^3$  eine SCHLÄFLI'sche Doppelsechs. Der Ort der Punktkugeln des cubischen Complexes  $C_3$  ist eine Fläche sechster Ordnung; diese geht dreimal durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis, enthält die Knotenpunkte der Bündel beider Netze und wird durch beliebige drei projective Bündel des einen oder des anderen Netzes erzeugt.

22. Durch die beliebige Kugel  $\kappa$  gehen von den beiden Netzen  $|B_2|$ ,  $|B'_2|$  je sechs Bündel, und deren zweimal sechs Potenzaxen bilden auf der vorhin (20.) erwähnten cubischen Fläche  $F^3$  eine SCHLÄFLI'sche Doppelsechs. Die Orthogonalkreise der  $\infty^2$  Bündel von  $|B_2|$  oder  $|B'_2|$  sind demnach so im Raume vertheilt, dass eine Kugel oder Ebene i. A. zu sechs von ihnen normal ist, und dass durch einen beliebigen Punkt sechs von ihnen gehen; auch giebt es unter ihnen i. A. sechs Gerade, wie hieraus durch Inversion folgt. Von den Potenzaxen der  $\infty^2$  Bündel des Netzes  $|B_2|$  liegen sechs in einer beliebigen Ebene und gehen (21.) drei durch einen beliebigen Punkt. Die Orthogonalkreise der  $\infty^2$  Bündel bestimmen mit einer beliebigen Kugeln  $\infty^2$  Potenzaxen, von denen drei in einer beliebigen Ebene liegen (21.) und sechs durch einen beliebigen Punkt gehen. Der Orthogonalkreis eines Bündels von  $|B_2|$  kann mit den Orthogonalkreisen von  $\infty^1$  Bündeln des Netzes  $|B'_2|$  durch Kugeln verbunden werden; diese bilden einen Büschel des cubischen Kugelcomplexes  $C_3$ .

23. Mit einem Kugelgebüsch  $\Gamma$  hat der Complex  $C_3$  eine cubische Kugelcongruenz  $C_2$  gemein, und diese enthält zwölf Kugelbüschel, die aus der Orthogonalkugeln je eines Bündels von  $|B_2|$  oder  $|B'_2|$  bestehen (22.). Die Potenzebenen, welche die  $\infty^2$  Kugeln der Congruenz  $C_2$  mit einer beliebigen Kugeln  $\kappa$  bestimmen, umhüllen eine Fläche dritter Klasse; jene zwölf Büschel bestimmen mit  $\kappa$  zwölf Potenzaxen, die eine Doppelsechs dieser Fläche bilden. Die Mittelpunkte der Kugeln von  $C_2$  liegen auf einer Fläche  $F^3$  dritter Ordnung, und auf dieser bilden die Centrallinien der zwölf Büschel eine Doppelsechs. Die cubische Congruenz besteht aus den  $\infty^2$  Kugeln des Gebüsches  $\Gamma$ , deren Mittelpunkte auf  $F^3$  liegen; sie enthält ausser den zwölf noch i. A. fünfzehn andere Kugelbüschel.

§ 5. DER LINEARE COMPLEX PROJECTIVER KUGELBÜNDEL UND DAS NETZ  
PROJECTIVER KUGELGEBÜSCHE (\*).

24. Ein linearer Complex  $|B_3|$  projectiver Kugelbündel ist durch beliebige vier seiner  $\infty^3$  Bündel bestimmt und enthält  $\infty^3$  Bündelnetze und  $\infty^4$  Bündelreihen. Seine Bündel erzeugen durch ihre homologen Kugeln ein Netz  $|\Gamma_2|$  von  $\infty^2$  projectiven Kugelgebüschchen, deren homologe Kugeln je einen Bündel des Complexes bilden. Das Netz  $|\Gamma_2|$  enthält  $\infty^2$  Schaaren projectiver Kugelgebüschchen und ist durch beliebige drei seiner Gebüschchen zugleich mit dem linearen Complex  $|B_3|$  bestimmt.

25. Durch eine beliebige Kugel  $\kappa$  gehen  $\infty^4$  Gebüschchen des Netzes  $|\Gamma_2|$ , und deren Potenzpunkte liegen auf einer Raumcurve sechster Ordnung, der zu  $\kappa$  gehörigen „Kerncurve“  $c^6$ . Durch  $\kappa$  gehen auch  $\infty^4$  Bündel des linearen Complexes  $|B_3|$ , und deren Potenzaxen schneiden die Kerncurve  $c^6$  je dreimal und liegen auf einer Fläche  $F^8$  achten Grades. Jeder durch  $\kappa$  gehende Bündel von  $|B_3|$  ist somit in drei Gebüschchen von  $|\Gamma_2|$  enthalten; seine Potenzaxe schneidet  $c^6$  in den drei Potenzpunkten, und sein Orthogonalkreis liegt auf den Orthogonalkugeln dieser drei Gebüschchen. Die Fläche  $F^8$  hat  $c^6$  zur dreifachen Curve, und durch die Punkte von  $c^6$  gehen je drei jener  $\infty^4$  Potenzaxen. Die  $\infty^4$  durch  $\kappa$  gehenden Gebüschchen von  $|\Gamma_2|$  enthalten also je drei durch  $\kappa$  gehende Bündel von  $|B_3|$ .

26. Jedes Gebüsch der Netzes  $|\Gamma_2|$  enthält  $\infty^4$  Bündel des linearen Complexes  $|B_3|$ , und durch eine beliebige seiner Kugeln  $\kappa$  gehen drei dieser Bündel (25.); die Orthogonalkreise der drei Bündel sind zu der Kugel  $\kappa$  normal. Auf der Orthogonalkugel eines Gebüsches von  $|\Gamma_2|$  liegen demnach die Orthogonalkreise von  $\infty^4$  Bündeln des Complexes  $|B_3|$ , und zwar bilden die Ebenen dieser Kreise einen cubischen Ebenenbüschel; die Potenzaxen der  $\infty^4$  Bündel aber liegen auf einem Kegel dritter Ordnung mit einem Doppelstrahl. Die  $\infty^4$  Bündel bilden eine specielle Bündelreihe des Complexes  $|B_3|$ . Ein beliebiger Bündel  $B$  von  $|B_3|$  hat mit den übrigen Bündeln i. A. je eine Kugel, mit  $\infty^4$  von ihnen aber je einen Kugelbüschel gemein. Diese  $\infty^4$  Bündel liegen in den drei durch  $B$  gehenden Gebüschchen des Netzes  $|\Gamma_2|$ . Durch den

(\*) Vgl. *Crelle's Journal* 104 S. 227.

Orthogonalkreis jedes Bündels von  $|B_3|$  gehen (25.) die Orthogonalkugeln dreier Gebüsche von  $|\Gamma_2|$ .

27. Die Potenzpunkte, welche die Kugel  $z$  mit den  $\infty^3$  Bündeln des Complexes  $|B_3|$  bestimmt, erfüllen den ganzen Raum, und in einen beliebigen Punkt fällt nur einer von ihnen. Eine Ausnahme machen die Punkte der Kerncurve  $c^6$ , indem mit ihnen je  $\infty^4$  der Potenzpunkte zusammenfallen. Die zu  $z$  gehörigen cubischen Ordnungsflächen der  $\infty^3$  Bündelnetze von  $|B_3|$  gehen alle durch  $c^6$  (vgl. 20.). Ein durch  $z$  gelegtes Kugelgebüsch enthält unendlich viele oder nur einen Bündel von  $|B_3|$ , jenachdem sein Potenzpunkt auf  $c^6$  liegt oder nicht. Jedes Kugelgebüsch, welches zwei Bündel und damit eine Bündelreihe von  $|B_3|$  enthält, gehört dem Netze  $|\Gamma_2|$  an.

Ein beliebiges Kugelgebüsch enthält also nur einen Bündel des linearen Complexes  $|B_3|$ , und die Orthogonalkreise der  $\infty^2$  Bündel von  $|B_3|$  sind demnach so im Raume vertheilt, dass auf einer beliebigen Kugel oder Ebene nur einer von ihnen liegt. Auf den Orthogonalkugeln der  $\infty^2$  Gebüsche von  $|\Gamma_2|$  aber liegen, wie schon bemerkt (26.), je  $\infty^4$  dieser Orthogonalkreise. Ein beliebiger Punkt ist Knotenpunkt eines einzigen Bündels von  $|B_3|$ , und hieraus folgt durch Inversion, dass ein Bündel des linearen Complexes aus Ebenen besteht. Die drei Gebüsche von  $|\Gamma_2|$ , in denen dieser Ebenenbündel enthalten ist, haben dessen Mittelpunkt  $D$  zum Potenzpunkt, und ihre drei Orthogonalkugeln haben  $D$  zum Centrum.

28. Die Potenzebene eines beliebigen Kugelbüschels hat mit der Kerncurve  $c^6$ , die zu einer seiner Kugeln gehört, sechs Punkte gemein. Diese sind die Potenzpunkte von sechs den Büschel enthaltenden Gebüschen des Netzes  $|\Gamma_2|$ , und die sechs Orthogonalkugeln dieser Gebüsche sind auch zu dem Büschel orthogonal. Die Orthogonalkugeln der  $\infty^2$  Gebüsche von  $|\Gamma_2|$  bilden demnach eine rationale Congruenz sechsten Grades; denn sechs von ihnen liegen in einen beliebigen Kugelbündel oder sind zu einem Kreise oder zu einer beliebigen Geraden normal oder gehen durch zwei gegebene Punkte. Die Potenzebenen, welche die Orthogonalkugeln von  $|\Gamma_2|$  mit einer Kugel  $z$  bestimmen, umhüllen i. A. eine rationale Fläche sechster Klasse, die eine dreifache Berührungsebene hat (26. 27.). Sie umhüllen eine rationale Fläche fünfter Klasse, wenn  $z$  selbst eine der Orthogonalkugeln ist, und diese Fläche wird von den Ebenen eines cubischen Ebenenbüschels doppelt berührt (26.).

29. Die Mittelpunkte der  $\infty^2$  Orthogonalkugeln von  $|\Gamma_2|$  liegen auf einer rationalen Fläche sechster Ordnung (28.). Diese enthält  $\infty^2$  rationale biquadratische Raumcurven, denn je zwei ihrer Punkte können durch eine

dieser Raumcurven verbunden werden (16.). Sie hat einen dreifachen Punkt  $D$  (27.). Auf der Centrenfläche liegen auch die  $\infty^4$  Kerncurven  $c^4$ , die zu je einer Kugel gehören (25.); durch vier beliebige Punkte der Fläche geht allemal eine der Kerncurven. Unter den Orthogonalkugeln des Netzes  $\Gamma_2$  giebt es  $\infty^4$  Ebenen, von denen sechs durch einen beliebigen Punkt gehen. Auch reduciren sich  $\infty^4$  Orthogonalkugeln auf Punkte, und diese liegen mit zwölf Punkten des unendlich fernen Kugelkreises auf einer Raumcurve zwölfter Ordnung. In ihnen schneiden sich je  $\infty^3$  homologe Kugeln der Bündel von  $|B_3|$ . Jeder dieser Punkte ist Knotenpunkt von  $\infty^4$  Bündeln des Complexes  $|B_3|$ , die eine specielle Bündelreihe bilden, und deren übrige Knotenpunkte auf einer rationalen Raumcurve sechster Ordnung liegen (13.).

30. Von den  $\infty^4$  Kugelbündeln des Complexes  $|B_3|$ , welche die Kugel  $\kappa$  enthalten, können acht mit einem durch  $\kappa$  gelegten Bündel  $B$  durch Gebüsche verbunden werden, nämlich die acht, deren Potenzaxen die Axe von  $B$  schneiden (25.). Diese acht Bündel haben mit  $B$  je einen Büschel und folglich mit einem beliebigen Kugelbüschel von  $B$  je eine Kugel gemein. Die  $\infty^4$  durch  $\kappa$  gehenden Bündel von  $|B_3|$  liegen demnach in einem Kugelcomplex achten Grades, und ihre  $\infty^3$  Orthogonalkugeln bilden eine Congruenz achten Grades, die  $\infty^4$  zu  $\kappa$  orthogonale Kugelbüschel enthält. Die Potenzaxen der  $\infty^4$  Bündel und die Mittelpunkte ihrer Orthogonalkugeln liegen auf einer Fläche achten Grades (25.), die von den  $\infty^2$  Ebenen des Complexes 8. Grades umhüllt wird. Die Orthogonalkreise der  $\infty^4$  Bündel und die Punktkugeln dieses Complexes liegen auf einer Fläche 16<sup>ter</sup>. Ordnung, und die Ebenen der Orthogonalkreise umhüllen einen Kegel achter Klasse. Auch wenn  $\kappa$  verschwindend klein ist, gelten diese Sätze. Ist  $\kappa$  eine Ebene, so umhüllen die Ebenen der Orthogonalkreise einen Cylinder und die Potenzaxen der  $\infty^4$  Bündel eine Curve achter Klasse. Die Potenzaxen aller Bündel des Complexes  $|B_3|$  bilden demnach einen Strahlencomplex achten Grades, der  $\infty^2$  Doppelstrahlen hat (26.). In  $|B_3|$  giebt es  $\infty^4$  Kugelbündel mit Orthogonalgeraden; diese Geraden liegen auf einer Fläche achter Ordnung.

## § 6. LINEARE COMPLEXE PROJECTIVER KUGELGEBÜSCHE (\*).

31. Ein linearer Complex  $|\Gamma_3|$  projectiver Kugelgebüsche enthält  $\infty^3$  Gebüsche, welche  $\infty^3$  Netze und  $\infty^4$  Schaaren bilden. Seine projectiven Gebüsche erzeugen durch ihre homologen Kugeln die  $\infty^3$  projectiven Gebüsche eines zweiten linearen Complexes  $|\Gamma'_3|$ , und die Gebüsche von  $|\Gamma'_3|$  erzeugen ebenso die von  $|\Gamma_3|$ . Durch vier beliebige projective Gebüsche des einen oder des anderen Complexes sind beide Complexe bestimmt.

32. Durch eine beliebige Kugel  $\kappa$  gehen  $\infty^2$  Gebüsche der linearen Complexe  $|\Gamma_3|$  und  $|\Gamma'_3|$ , und deren Potenzpunkte liegen auf einer Fläche vierter Ordnung, der zu  $\kappa$  gehörigen « Kernfläche »  $K^4$ . Diese Gebüsche sind in beiden Complexen enthalten, aber ihre projective Verwandtschaft ist eine andere, wenn sie zu  $|\Gamma'_3|$ , als wenn sie zu  $|\Gamma_3|$  gerechnet werden. Mit der Potenzaxe eines durch  $\kappa$  gelegten Kugelbündels hat die Kernfläche  $K^4$  vier Punkte gemein, die Potenzpunkte von vier durch den Bündel gehenden Gebüschen von  $|\Gamma_3|$ . Durch einen beliebigen Kugelbündel gehen demnach vier Gebüsche des linearen Complexes  $|\Gamma_3|$ , und deren vier Orthogonalkugeln gehen durch den Orthogonalkreis des Bündels.

33. Die Orthogonalkugeln der  $\infty^3$  Gebüsche von  $|\Gamma_3|$  und  $|\Gamma'_3|$  bilden also einen Kugelcomplex vierten Grades; es giebt unter ihnen i. A. vier, die in einem beliebigen Kugelbüschel liegen oder durch irgend einen Kreis gehen oder einen gegebenen Mittelpunkt haben. Zu einer beliebigen Kugel  $\kappa$  sind  $\infty^2$  Orthogonalkugeln von  $|\Gamma_3|$  normal, und deren Mittelpunkte liegen auf der zu  $\kappa$  gehörigen Kernfläche  $K^4$  vierter Ordnung (32.). Diese  $\infty^2$  Orthogonalkugeln bilden eine biquadratische Congruenz in dem zu  $\kappa$  orthogonalen Kugelgebüsche; die Potenzebenen, die sie mit  $\kappa$  oder einer anderen beliebigen Kugel bestimmen, umhüllen eine zu  $K^4$  reciproke Fläche vierter Klasse. Unter den  $\infty^3$  Orthogonalkugeln des linearen Complexes  $|\Gamma_3|$  giebt es  $\infty^2$  Ebenen, die eine Fläche vierter Klasse umhüllen, und  $\infty^2$  Punktkugeln, die auf einer Fläche  $F^8$  achter Ordnung liegen. Diese Fläche  $F^8$  geht durch den unendlich fernen Kugelkreis viermal, denn sie hat mit einer Kugel  $\kappa$  nur noch die Raumcurve achter Ordnung gemein, in welcher  $\kappa$  von der zugehörigen Kernfläche  $K^4$  geschnitten wird.

Strassburg i. E., 2. Mai 1900.

(\*) Vgl. *Crelle's Journal* 104 S. 235.