

GLI EFFETTI TERMO E GALVANOMAGNETICI NEL BISMUTO E LE COSTANTI DELLA TEORIA DI DRUDE ¹⁾.

DI PIETRO SENEPA [†].

1. — I diversi effetti termo e galvanomagnetici, presentati da lamine metalliche, vengono considerati nella classica teoria di Drude come dipendenti dalle costanti elettroniche ²⁾. Così i coefficienti R, P, S, Q dell'effetto Hall, (differenza di potenziale trasversale per una corrente longitudinale) dell'effetto Ettingshausen (differenza di temperatura trasversale

¹⁾ Il Dott. Pietro Senepa, assistente nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma, aveva sospeso il suo servizio per attendere all'obbligo di leva, come volontario nel 13.^o reggimento di artiglieria; vi trovò la morte appena ventiquattrenne, il 5 Novembre u. s. in seguito a un calcio di cavallo che gli sfracellò la tempia.

Egli possedeva i migliori requisiti che posson garentire il successo nella carriera scientifica. Ingegno aperto e robusto, operosità instancabile, passione per la ricerca e disinteresse per i frutti che poteva attenderne; abilità tecnica e gusto per la teoria; pazienza accorta e fiduciosa; e infine la possibilità di dedicarsi agli studi prediletti senza le preoccupazioni materiali che turbano e distraggono spesso i meglio dotati. A queste qualità si sovrapponevano in lui dei pregi morali elevatissimi, che ne rendono doloroso il rimpianto in tutti coloro che ebbero occasione di stargli vicino.

La Memoria che vede oggi la luce in questo Giornale fu da Lui scritta nello scorso Luglio, e si riferisce a esperienze eseguite in questo Istituto Fisico nel passato anno scolastico. Egli ne aveva sospeso la pubblicazione desiderando mettere al sicuro i risultati da qualche obiezione che ho poi riconosciuta di scarsa entità. Avendo ritrovato il manoscritto tra le sue carte, mi è parso utile darlo alla luce, malgrado le esitazioni che trattennero l'Autore in vita; ciò facendo son sicuro di rendere un dovuto omaggio alla Sua Memoria, e di accrescere la letteratura fisica italiana di un lavoro pregevolissimo.

Roma, 28 Dicembre 1913

O. M. CORBINO.

²⁾ Drude. *Ann. d. Phys.* 4, 1900, pag. 369.

per una corrente longitudinale) dell'effetto Righi (differenza di temperatura trasversale per un flusso longitudinale di calore) e dell'effetto Nernst, (differenza di potenziale trasversale per un flusso longitudinale di calore) sono rilegati alle costanti elettroniche

N_1, N_2 numero di ioni positivi e negativi presenti in un cm^3 ,

v_1, v_2 mobilità relative alla forza meccanica unitaria

$$x_1 = \frac{d \log N_1}{dT}, \quad x_2 = \frac{d \log N_2}{dT}$$

(essendo T la temperatura assoluta), dalle note relazioni (unità elettromagnetiche):

$$(1) \quad R = \frac{c}{e} \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{n x}$$

$$(2) \quad P = \frac{1}{p e} \frac{v_1 + v_2}{n x}$$

$$(3) \quad S = \frac{e}{c} \frac{N_2 - N_1}{n} v_1 v_2$$

$$(4) \quad Q = p e \frac{N_1 v_1 x_1 + N_2 v_2 x_2}{n}$$

in cui

$$x = x_1 + x_2 \quad ; \quad n = N_1 v_1 + N_2 v_2$$

c è la velocità della luce, e la carica dell'elettrone e p è una costante universale.

Se alle precedenti quattro relazioni si aggiungono le due altre

$$(5) \quad \sigma = \frac{e^2}{c^2} n$$

$$(6) \quad W = 2 T \frac{N_1 N_2 v_1 v_2}{n^2} x$$

in cui σ rappresenta la conducibilità e W lo scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, si può, quando si conoscano

sperimentalmente i sei coefficienti, passare alla determinazione delle costanti elettroniche.

Drude ¹⁾ per primo tentò una verifica della sua teoria, ma i risultati a cui giunse, certo non soddisfacenti, sono ancora poco attendibili pel fatto che le singole grandezze R , P , S , Q , σ , da lui usate nel calcolo, provengono da sperimentatori diversi e quindi non tutte da uno stesso campione di metallo.

La questione, ripresa più tardi da Zahn ²⁾ che in un lavoro assai pregevole determinò per diversi metalli i relativi effetti termo e galvanomagnetici, non condusse tuttavia per nessuno dei materiali cimentati, il bismuto compreso, a dei risultati accettabili.

2. — Il Prof. Corbino ³⁾ da una accurata critica della teoria fu portato alla conclusione che la formula di Drude relativa all'effetto Hall non corrisponde alle condizioni fisiche per cui tale effetto viene sperimentalmente determinato.

Dalla considerazione che il fenomeno in parola viene perturbato dal generarsi contemporaneo di una differenza di temperatura trasversale (*effetto Ettingshausen*) egli venne condotto allo studio teorico di due tipi di effetto Hall, in ambedue dei quali deve annullarsi il gradiente termico trasversale. Nel primo, *effetto Hall isotermico*, tale annullamento si dovrebbe ottenere sottraendo calore alla lamina con un abbondante flusso d'acqua che totalmente la circonda; nel secondo *effetto Hall corretto* si fa sparire la differenza di temperatura trasversale con una sovrapposizione in misura opportuna di un flusso di calore e di una corrente elettrica longitudinale.

Partendo dai presupposti teorici di Drude e modificandone le equazioni fondamentali, in modo da rappresentare il vero stato della lamina isolata o no termicamente, il Prof. Cor-

¹⁾ Drude. Loc. cit.

²⁾ Zahn. *Ann. d. Phys.* 14, 1904, p. 886.

³⁾ Corbino. *N. Cimento.* 2, 1911, p. 39.

bino pervenne per l'effetto Hall isotermico e per l'effetto Hall corretto alle due relazioni:

$$R' = \frac{c}{e} \frac{N_1 v_1^2 - N_2 v_2^2}{n^2}$$

$$R'' = \frac{c}{e} \frac{1}{N_1 - N_2}$$

che sono rigorose e quindi applicabili al caso pratico, qualora nel modo anzidetto si sia annullato il gradiente termico trasversale.

Queste due equazioni possono sostituire la (1) che deve intendersi come inapplicabile all'esperienze e un'altra qualsiasi delle equazioni successive del Drude.

Mi son proposto nel seguente lavoro di determinare per questa via le costanti elettroniche del bismuto, calcolando sperimentalmente i coefficienti R' , R'' per l'effetto Hall, il coefficiente P per l'effetto Ettingshausen, quello S per l'effetto Righi, la conducibilità σ , e ricorrendo eventualmente per i valori di W ai dati di Jaeger e Diesselhorst.

3. — L'apparecchio, usato nelle esperienze è rappresentato nella figura 1.

La lamina di Bismuto M penetra per due fenditure longitudinali a tenuta idraulica attraverso i tubi di riscaldamento A , B , connessi rigidamente tra loro mediante i pezzi in ebanite D , F . Il contatto elettrico viene assicurato da due coppie di striscette in rame c c' , che stringono la lamina a mezzo di viti a pressione. Il Bismuto è protetto dalle correnti d'aria da due fogli di mica che lo rivestono anteriormente e posteriormente; trovai che questo è anche il mezzo migliore, per ridurre la trasmissione esterna di calore, quando la lamina venga percorsa da un flusso di calore. Le quattro coppie termoelettriche, due longitudinali a , a' e due trasversali b b' , sono assicurate con viti ai regoli D , F . A fine di evitare un eventuale corto circuito i due fili di ciascuna cop-

pia penetrano l'uno attraverso la mica anteriore, l'altro attraverso quella posteriore; il contatto per saldatura avviene nella massa di Bismuto.

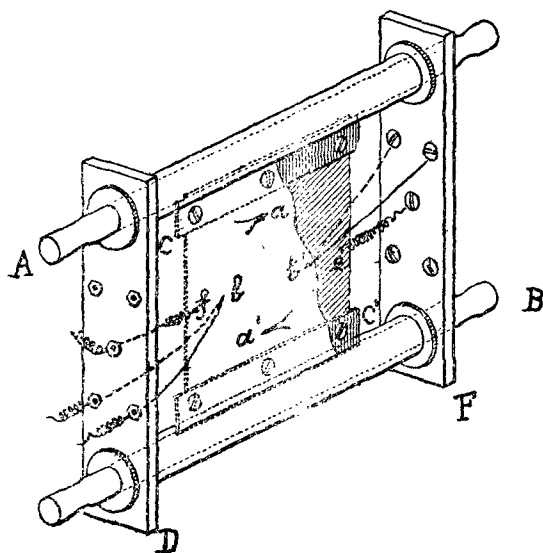


Fig. 1.

4. — Per la misura dei diversi effetti venne adoperato un galvanometro corazzato Dubois-Rubens di bassa resistenza con un periodo di oscillazione dell'equipaggio di 15". Le due bobine (5 Ohm ognuna) agirono sempre per differenza.

La disposizione sperimentale è schematicamente rappresentata nella fig. 2.

I capi delle coppie termoelettriche, saldate alla lamina M terminano in otto pozzetti *m* ripieni di mercurio scavati in un blocco di paraffina che permettono dei contatti bipolari, a mezzo delle forcelle 1, 2 con le bobine I, II del galvanometro G. Il dispositivo potenziometrico E serve a compensare la differenza di potenziale che praticamente, per inevitabili dissimmetrie, si stabilisce sempre fra i conduttori partenti dai punti *b*, *b'* anche in assenza del campo, qualora la lamina venga percorsa da un flusso termico o elettrico.

La f. e. m. ausiliaria F serve per la taratura del galvanometro e delle pinze termoelettriche.

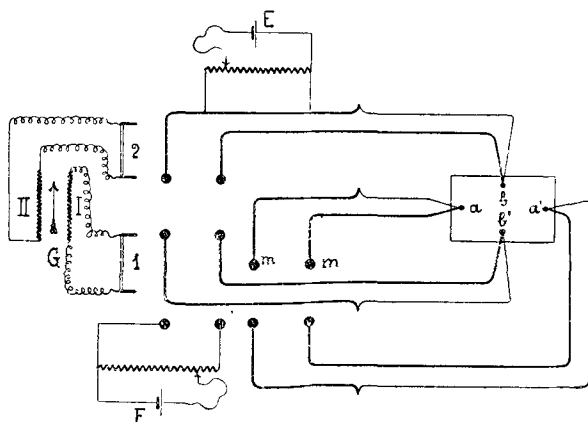


Fig. 2.

Campo magnetico. — Il campo magnetico generato da una grande elettrocalamita Weiss con espansioni polari piane di cm. 10,5 di diametro, fu valutato col noto metodo dell'induzione su di una spira; l'intensità della corrente magnetizzante, era data da un amperometro Siemens. Con circolazione d'acqua, che nella Weiss può stabilirsi fra il nucleo e l'avvolgimento, si è sicuri che la temperatura si mantiene sensibilmente costante nell'interferro, ove perpendicolarmente alle linee di forza fu collocata la lamina di bismuto, assicurata ad un solido sostegno.

Nelle esperienze il valore del campo fu limitato fra 300 e 1200 unità.

Per tentativi si orientò l'elettrocalamita in modo che il campo magnetico da essa generato, avesse la più piccola influenza sulla posizione dello zero dell'ago del galvanometro posto a più che 5 m. di distanza; si ridusse tale perturbazione a meno di $\frac{1}{4}$ di divisione della scala.

Coppie termoelettriche - Valutazione delle temperature. — Data la sottigliezza della lamina (cm. 0,0598) a fine di evi-

tare grosse fughe di calore attraverso i fili, le coppie termoelettriche a, a', b, b' , vennero tutte ugualmente preparate nella seguente maniera. Fatto un forellino nella lamina, fu introdotto ad es.: anteriormente ad essa un filo di rame della lunghezza di 1 cm. circa e del diametro di 0,01 cm. e posteriormente uno di platinoide delle stesse dimensioni: il contatto elettrico sul bismuto si assicurò con saldatura. Ai filini che attraversano la mica vennero saldati fili più grossi dello stesso metallo; precisamente uno di rame di cm. 0,05 di diametro e una treccia di cm. 80 circa composta da 12 fili di platinoide di cm. 0,01 che va a finire all'altra saldatura S mantenuta in petrolio a 0°. Con questa disposizione, ai conduttori di rame, poli di ogni coppia termoelettrica si potè dare una conveniente lunghezza (circa 4 metri) senza elevare di troppo la resistenza di circa 2 Ohm dei termoelementi, e raggiungendo anche l'effetto di eguagliare le resistenze complessive di ciascuno. Si ebbe cura di assicurare il perfetto isolamento delle coppie, specialmente fra le espansioni polari dell'elettromagnete.

La f. e. m. termoelettrica, chiusa in corto circuito su di una bobina del Dubois-Rubens, fu compensata nelle misure da una f. e. m. esterna nota fornita da una disposizione potenziometrica e agente sull'altra bobina del galvanometro. Dalla lettura delle resistenze nel dispositivo di compensazione F si deduceva, per ogni singola esperienza, la f. e. m. in microvolt applicata ai poli del galvanometro.

Per poter passare da questa alla conoscenza della temperatura del punto esplorato fu necessario tarare la coppia termoelettrica. Furono seguiti due metodi: nell'uno mantenendo sempre la saldatura fredda nel ghiaccio, si portò l'altra a temperatura nota circondando la lamina di acqua; nell'altro la saldatura esterna al bismuto fu portata a diverse temperature conosciute, mentre la lamina si manteneva a temperatura costante ma incognita. Col metodo descritto si valutava la f. e. m. di compensazione. In queste esperienze ci si servì di un termometro a mercurio al cinquantesimo di grado.

Ambedue i metodi accennati consentono, con uguale precisione, di dedurre la *costante del circuito di compensazione* cioè la f. e. m. che si deve applicare ai poli di una bobina del galvanometro, per compensare la corrente termoelettrica circolante nell'altra bobina, quando si ha una differenza di 1 grado fra le saldature della coppia rame-platinoida.

Tale costante fu calcolata per temperature della saldatura calda prossime a 20°, 50°, 80°: naturalmente, ammesso che la resistenza delle bobine del Dubois Rubens sia uguale, essa deve avere lo stesso valore sia che la pinza sia chiusa sulla I sia sulla II. Per la maniera con cui effettuavi le misure, come ci si accorgerà in seguito, tale condizione doveva essere soddisfatta. Livellando opportunamente il galvanometro e regolando i magneti direttori si riuscì a fare in modo che la costante in parola subisse solo variazioni inferiori al 0,5%, invertendo le bobine.

5. *Effetto Righi*. — Fu valutato per un gradiente termico corrispondente a quello che si genera nella lamina, quando un bordo si riscaldi con vapori di acqua bollente e l'altro si mantenga a temperatura costante, a mezzo di un flusso abbondante di acqua alla temperatura ambiente.

L'apparecchio così come si vede in figura venne posto fra le espansioni polari della Weiss in modo che i tubi A, B fossero orizzontali; è bene che sia il tubo superiore a funzionare da stufa giacchè si trova che, nel caso contrario, le determinazioni di temperatura sono meno sicure. Questo, verosimilmente, dipende dalle correnti ascendenti di aria calda che si generano nell'intercapedine fra il bismuto e la mica che lo riveste. Dopo un'ora circa da che il vapore ha cominciato a circolare è raggiunto lo stato stazionario delle temperature. Rilegata allora una coppia al galvanometro, la posizione di zero dell'ago non accennò che a variazioni comprese dentro una divisione della scala.

Per la valutazione dell'effetto si procedeva allora nella seguente maniera. Col metodo di opposizione descritto si esploravano a campo nullo le temperature T_a , $T_{a'}$, T_b , $T_{b'}$,

dei punti $a a'$, $b b'$; questo per dedurne poi la legge di distribuzione di esse nell'interno della lamina.

La rotazione delle isoterme, caratteristica dell'effetto in parola, venne svelata dalle sonde termoelettriche trasversali, messe in opposizione sul galvanometro. A campo nullo compensando, con la f. e. m. ausiliaria E, quella attiva sul Dubois-Rubens derivante dalla inevitabile differenza di temperatura fra i punti b , b' si riuscì a portare l'ago a zero. All'eccitazione del campo si svelò l'effetto Righi con una deviazione dell'ago in un senso che si invertiva all'invertirsi del campo. Dalla media delle due deviazioni si ebbe in unità arbitrarie (divisioni di scala) la misura del fenomeno. Per valutarlo in gradi si connesse uno dei termoelementi b oppure b' con una bobina del galvanometro essendo l'altra ai poli del circuito F di taratura e si cercò, variando la f. e. m. attiva di compensazione di ottenere sulla scala una deviazione della stessa grandezza di quella causata dall'effetto Righi. La conoscenza della costante del circuito di compensazione permetteva di passare alla misura assoluta espressa in gradi.

Nella seguente tabella son riuniti i dati sperimentali per la lamina di bismuto; l'effetto, marcato, nella 2.^a colonna in divisioni di scala, corrisponde all'inversione del campo; Δt è la differenza di temperatura trasversale di effetto Righi.

Campo	Deviaz. galv.	$10^3 \Delta t$	Campo	Deviaz. galv.	$10^3 \Delta t$
635	42	68	930	58	95
685	44	72	975	61	99
730	48	78	1025	65	106
770	52	85	1065	68	110
825	54	87	1120	70	115
880	56	91	1180	72	117

Il diagramma della fig. 3, costruito con questi numeri mostra l'andamento del fenomeno al variare del campo magnetico.

$$\text{Effetto Righi} \left(\frac{dT}{dx} = -13.58 \right).$$

Il coefficiente S di effetto Righi si ricava dalla relazione

$$S = \frac{\Delta T}{H\beta \frac{dT}{dx}}$$

in cui β è la distanza in cm. fra le sonde trasversali che si portano ad una differenza di temperatura ΔT , sotto l'azione di un campo H e di un gradiente termico $\frac{dT}{dx}$ al centro della lamina.

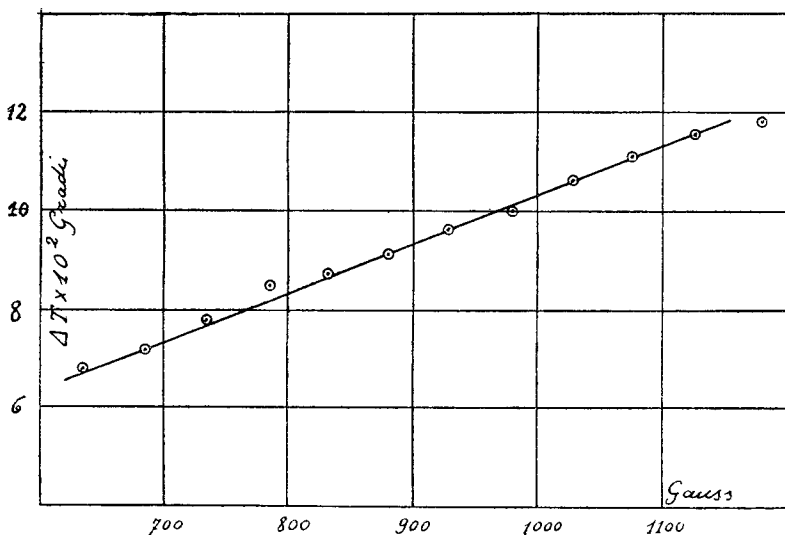


Fig. 3.

Nelle nostre esperienze

$$T_a = 83,50 \quad T_b = 43,30^\circ \quad T_{a'} = 22,45$$

alla macchina a dividere la distanza fra a e a' risultò di cm. 4,145; fra a e il centro della lamina (intersezione della retta aa' con la retta bb) di cm. 2,080.

La distribuzione della temperatura si può quindi rappresentare con la formula

$$T_x = 83,5 e^{-0,915 x}$$

in cui e è la base dei logaritmi naturali, e quando si computino le a positive nel senso del flusso a partire dalla saldatura A. Se ne deduce al centro (dove $x = \text{cm. } 2,080$)

$$\frac{dT}{dx} = -13,58$$

Tenuto conto della direzione del campo si ha, secondo le convenzioni di Drude, un coefficiente Righi negativo; precisamente

$$S = -2,30 \cdot 10^{-6}$$

per una temperatura media di 43,30.

6. *Effetto Ettingshausen.* — Nelle esperienze relative bisogna tener presenti le eventuali perturbazioni per la imperfetta costruzione dei termoelementi. È necessario cioè che i due fili di ognuno di essi vadano a saldarsi in uno stesso punto della lamina metallica, giacchè nel caso contrario, possono sulle coppie termoelettriche trasversali quando si chiuda il campo, derivarsi correnti di effetto Hall erroneamente interpretabili come correnti di effetto Ettingshausen.

Tenuto conto però della grandezza dell'effetto Hall totale osservato e delle dimensioni dei filini, si può dedurre che la perturbazione accennata non ha effetto sensibile nel computo delle temperature delle sonde bb' .

La tabella seguente mostra i valori della differenza di temperatura trasversale ΔT , al variare del campo e della temperatura T del bismuto che, opportunamente protetto da correnti d'aria, fu riscaldato elettricamente da una specie di stufa.

Corrente longitudinale $i = 1,78 \text{ Amp.}$

	$T = 17^\circ$	$T = 28^\circ$	$T = 38^\circ$	$T = 50^\circ$
Campo	$10^3 \Delta T$	$10^3 \Delta T$	$10^3 \Delta T$	$10^3 \Delta T$
385	64	54	45	38
585	96	81	66	54
770	125	104	87	69
975	154	129	108	86
1180	—	—	130	101

Il diagramma della fig. 4 disegnato in base a questi dati, svela l'andamento lineare col campo del fenomeno in parola.

Effetto Ettingshausen ($i = 1,78$ Amp.).

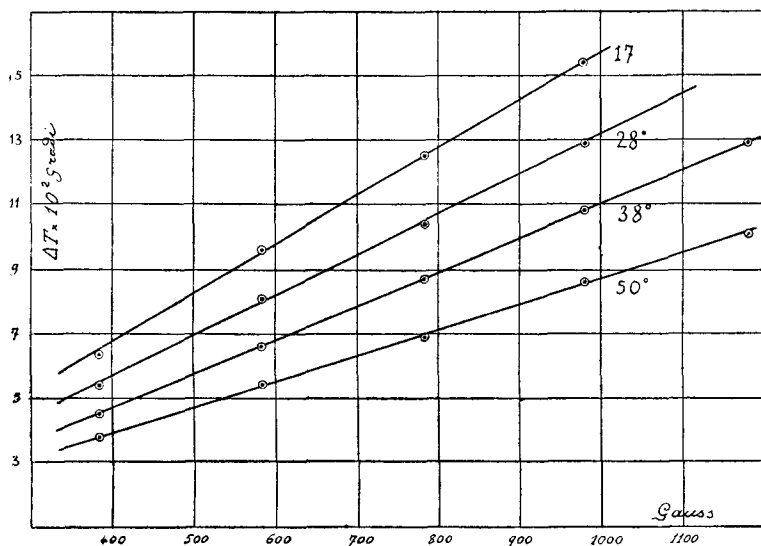


Fig. 4.

Lo spessore medio della lamina misurato allo sferometro risultò $\delta = \text{cm. } 0,0598$.

Dalla formula

$$P = 10 \frac{\Delta T \delta}{H i}$$

in cui i venga espressa in ampère, si ottiene

$$P = + 3,31 \cdot 10^{-5}$$

coefficiente del fenomeno Ettingshausen relativo alla temperatura di 44° .

7. *Effetto Hall corretto.* — Esso si osserva, come fu detto, sovrapponendo nella lamina un flusso di calore e una corrente elettrica, entrambi longitudinali, e di tale entità relativa che si annulli la differenza di temperatura trasversale.

Nelle esperienze il flusso di calore si lasciava costante, la corrente veniva invece variata finchè le sonde termoelettriche trasversali, non accusassero rotazione di isoterme alla chiusura del campo. Si trovò per questo che la corrente e il calore devono fluire nello stesso senso; alla temperatura media della lamina di 43° con un gradiente al centro $\frac{dT}{dx} = -13,5$ si ebbe per i il valore di 1,79 Amp.; già una variazione del $0,5\%$ sulla corrente primaria, dava origine ad un effetto termomagnetico sensibile.

L'andamento del fenomeno col campo apparisce nel diagramma della fig. 5.

Effetto Hall corretto; ($i = 1,78$ Amp.).

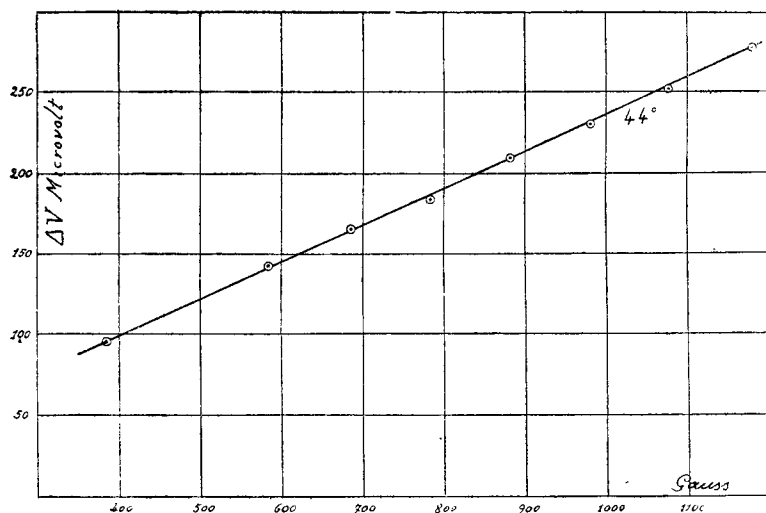


Fig. 5.

disegnato in base ai numeri della seguente tabella in cui ΔV sta ad indicare la differenza di potenziale trasversale in microvolt.

Campo	ΔV	Campo	ΔV
385	96	880	210
585	142,5	975	230,5
685	166,5	1065	252,5
770	184	1180	278

Assumendo

$$R' = 10 \frac{\Delta V \delta}{H i}$$

dove i è misurata in ampère e ΔV in volt risulta per il coefficiente di effetto Hall corretto:

$$R' = - 7,78$$

alla temperatura di 43°.

8. *Effetto Hall isotermico.* — Facendo circolare un flusso abbondante di acqua tutto intorno alla lamina non si riesce ad annullare l'effetto Ettingshausen. Ma data l'entità di quest'ultimo, si può ben considerare l'effetto Hall isotermico come derivante da quello semplice correggendolo degli effetti dovuti alla f. e. m. termoelettrica che ad esso si sovrappone.

Tenuto conto del segno dei fenomeni Hall e Ettingshausen, si trova che l'effetto in questione deriva dall'adiabatico per aggiunta della f. e. m. propria alle coppie trasversali. Nella tabella si trovano riepilogati i risultati; T rappresenta la temperatura della lamina.

T = 32	
Campo	Eff. Hall isothermico (microvolt)
685	175
880	221,8
1180	299
T = 24	
685	186
880	239
1180	317
T = 15,5	
685	201
880	253
1180	345

Nel diagramma della fig. 6 si scorge come l'effetto Hall isothermico cresce proporzionalmente al campo, e diminuisca con la temperatura.

Effetto Hall isothermico ($i = 1,78$ Amp.).

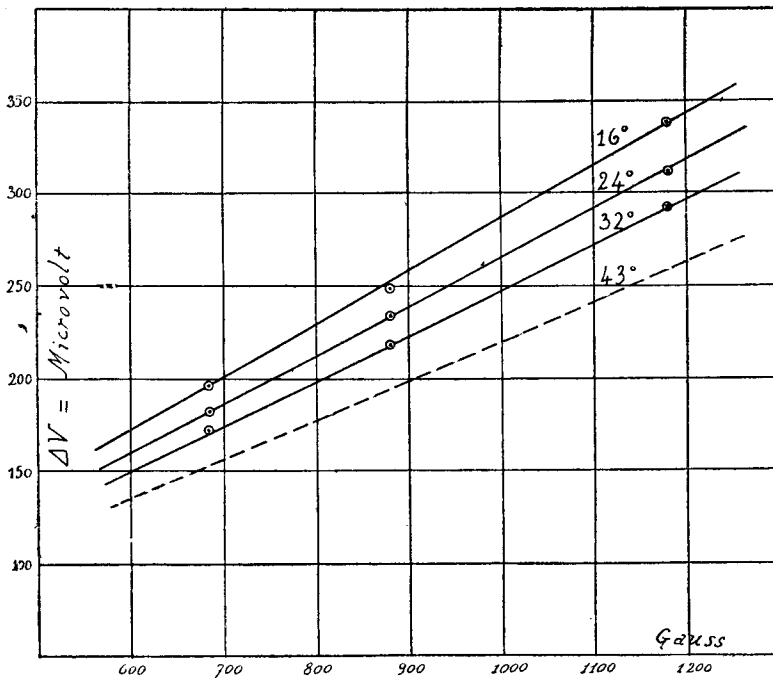


Fig. 6.

La linea tratteggiata ottenuta per estrapolazione sta a rappresentare l'andamento del fenomeno alla temperatura di 44° , per cui si ricava

$$R'' = -7,35.$$

9. *Conducibilità della lamina.* — La forte variazione della resistenza elettrica subita dal bismuto in un campo è riconducibile come è noto alla esistenza dei fenomeni termo e galvanomagnetici longitudinali. Sta di fatto che in quei metalli dove questi sono nulli o piccolissimi, il campo non esercita azione sensibile sulla conducibilità elettrica e termica.

Ciò del resto è posto in chiaro dalla formula di Drude

$$\sigma = \frac{e^2}{c^2} (N_1 V_1 + N_2 V_2)$$

quando si pensi che, se i diversi effetti termo e galvanomagnetici dipendono linearmente dal campo (come nelle nostre esperienze) devono le costanti elettroniche risultare da esso indipendenti. La modificazione avverrà solo per campi molto intensi, in cui i diversi effetti pare accennino ad uno stato di saturazione.

La conducibilità della lamina di bismuto fu valutata quindi a campo zero per diverse temperature. Con metodo di compensazione si misurò la differenza di potenziale fra i punti $\alpha \alpha'$ della (lamina, fig. 1.^a), percorsa nel senso longitudinale da una corrente di nota intensità.

Indicando con R^T la resistenza alla temperatura T si ebbe ad es.

$$R^{14,5} = 1600 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm}$$

$$R^{41,5} = 1770 \cdot 10^{-6} \quad \gg$$

ne deriva un coefficiente medio α di temperatura fra $T = 14,5$ e $T = 43,5$

$$\alpha = 0,00393.$$

Tenuto conto delle dimensioni della lamina attiva (lunghezza cm. 4,145, larghezza cm. 4,80 spessore cm. 0,0598) si ha che la conducibilità alla temperatura di 43,5 ha il valore in unità elettromagnetiche

$$\sigma_{43,5} = 8,11 \cdot 10^{-6}.$$

10. *Calcolo delle costanti elettroniche.* — Nella teoria di Drude mentre per il coefficiente di effetto Ettingshausen si prevede, d'accordo coi dati d'esperienza, un segno costantemente positivo, esso può risultare invece positivo o negativo per l'effetto Righi, per il quale non può essere fissato a priori, nemmeno in relazione a quello dei coefficienti degli altri effetti.

Dalle equazioni proposte da Corbino risulta invece che in ogni caso: *il coefficiente di effetto Righi deve avere lo stesso segno del coefficiente di effetto Hall corretto.* E poichè l'esperienza contraddice formalmente a questa previsione l'accordo con la teoria di Drude sembra irraggiungibile. Ho voluto però ricercare se, facendo astrazione dall'effetto Righi, e, ricorrendo ai coefficienti degli altri effetti, si pervenga a risultati soddisfacenti. Le due equazioni in R' e R'' introdotte dal Corbino, permettono di fare a meno del coefficiente S ; si può invero considerare il sistema:

$$R' = \frac{c}{e} \frac{N_1 v_1^2 - N_2 v_2^2}{n^2}$$

$$R'' = \frac{c}{e} \frac{1}{N_1 - N_2}$$

$$W = 2T \frac{N_1 N_2 v_1 v_2}{n^2} x$$

$$\sigma = \frac{e^2}{c^2} n$$

$$P = \frac{1}{pe x} \frac{v_1 + v_2}{n}$$

che permette di determinare le costanti elettroniche

$$N_1, N_2 \quad v_1, v_2 \quad x = x_1 + x_2$$

Esso si può mettere sotto la forma:

$$N_1 - N_2 = m$$

$$N_1 v_1 + N_2 v_2 = n$$

$$N_1 v_1^2 - N_2 v_2^2 = r$$

$$N_1 N_2 v_1 v_2 (v_1 + v_2) = l$$

in cui

$$m = \frac{c}{e} \frac{1}{R''} \quad n = \frac{c^2}{e^2} \sigma$$

$$r = \frac{c^3}{e^3} R' \sigma^2 \quad l = \frac{c^6}{e^5} p W \sigma^3 P$$

$$p = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e} T$$

e T è la temperatura assoluta.

Le formule di Drude danno detta K la conducibilità per calore:

$$1 + W = \frac{K}{\sigma} \frac{1}{\frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 T}.$$

Per la temperatura termometrica di 44° le determinazioni di Jaeger e Diesselhorst forniscono per il bismuto

$$\frac{K}{\sigma} = 1,163 \cdot 10^{-10} ;$$

assumendo $\frac{\alpha}{e} = 4,27 \cdot 10^{-7}$ risulta per T = 317

$$p = 1,80 \cdot 10^{-4} \quad W = 0,511.$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} R' &= -7,35 & P &= +3,35 \cdot 10^{-5} \\ R'' &= -7,88 & \sigma &= +8,11 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

per

$$e = 4,89 \cdot 10^{-10} \text{ (Millikan)}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} m &= -7,78 \cdot 10^{18} & n &= +3,05 \cdot 10^{34} \\ r &= -1,12 \cdot 10^{50} & l &= +6,64 \cdot 10^{82} \end{aligned}$$

Il sistema ci fornisce allora la soluzione a valori positivi

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,24 \cdot 10^{18} & N_2 &= 8,02 \cdot 10^{18} \\ v_1 &= 1,57 \cdot 10^{15} & v_2 &= 3,75 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$

Occorre però prima di attribuire un grado qualunque di attendibilità alla soluzione trovata, esaminare fino a qual punto i valori ottenuti possono essere influenzati dagli errori inevitabili da cui vengono affetti i coefficienti sperimentali.

Se si suppone che gli errori relativi di m , n , r , l cioè delle grandezze direttamente ricavate dall'esperienza siano rispettivamente $\frac{\Delta m}{m}$, $\frac{\Delta n}{n}$, $\frac{\Delta r}{r}$, $\frac{\Delta l}{l}$ si può dedurre dalle equazioni fondamentali l'influenza che questi errori apportano sui valori delle costanti.

Si ottiene così dopo una serie di calcoli non brevi:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_1}{N_1} &= -45 \frac{\Delta m}{m} + 82 \frac{\Delta n}{n} - 40 \frac{\Delta r}{r} - 1,2 \frac{\Delta l}{l} \\ \frac{\Delta v_1}{v_1} + 42 \frac{\Delta m}{m} - 73 \frac{\Delta n}{n} + 37 \frac{\Delta r}{r} &= 2 \frac{\Delta l}{l} \\ \frac{\Delta N_2}{N_2} &= 0,04 \frac{\Delta m}{m} + 1,8 \frac{\Delta n}{n} - 0,9 \frac{\Delta r}{r} - 0,02 \frac{\Delta l}{l} \\ \frac{\Delta v_2}{v_2} &= 0,03 \frac{\Delta m}{m} - \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta r}{r} + 0,02 \frac{\Delta l}{l} \end{aligned}$$

Queste relazioni ci mostrano che N_2, v_2 possono determinarsi con sufficiente esattezza poichè, ammesso che gli errori percentuali di m, n, r, l siano dello stesso ordine, quelli di N_2, v_2 risultano derivanti solo dall'errore di n e da quello di r con valori anch'essi dello stesso ordine di grandezza.

Non è così per N_1, v_1 ; basta già un errore medio accidentale sulle quantità m, n, r solo del 0,7% perchè il sistema porti per una delle due costanti in parola ad una inversione di segno.

Data la precisione delle nostre misure si ha per gli errori accidentali da cui possono essere affetti i coefficienti

$$\frac{\Delta R'}{R'} < 0,3\% , \quad \frac{\Delta R''}{R''} < 0,5\% \quad \frac{\Delta P}{P} < 1\% \quad \frac{\Delta \sigma}{\sigma} < 0,2\% .$$

Nelle condizioni più sfavorevoli, supposto che tutti gli errori producano effetti nel medesimo senso si ottiene per N_1 e v_1

$$\frac{\Delta N_1}{N_1} < 60\% \quad \frac{\Delta v_1}{v_1} < 60\%$$

errori relativi indubbiamente molto elevati in confronto a quelli di N_2 e v_2

$$\frac{\Delta N_2}{N_2} < 1\% \quad \frac{\Delta v_2}{v_2} < 1\% .$$

Ma poichè supporre che tutti gli errori si sommino nei loro effetti è ben poco probabile non sarà azzardato il ritenere che per effetto di una compensazione parziale l'errore relativo di N_1 e v_1 sia inferiore al limite sopra indicato.

Ammettendo pure per N_1, v_1 un errore che si aggiri intorno al 60%, si può tuttavia affermare che i loro veri valori debbono soddisfare le disuguaglianze

$$v_1 < v_2 \quad N_1 < N_2;$$

inoltre rimane sicuramente accertato l'ordine di grandezza delle costanti medesime.

Riguardo alla costante

$$x = \frac{d \log N_1}{dT} + \frac{d \log N_2}{dT}$$

ricorrendo per il calcolo alla formula Drude per l'effetto P di Etingshausen si ottiene

$$x = 6 \cdot 10^{-2}$$

I calcoli precedenti furono condotti in base al valore $W = 0,511$ attribuito allo scarto dalla legge di Wiedemann e Franz; poichè si tratta di un coefficiente non determinato direttamente da me, ho voluto esaminare l'effetto che avrebbe sui valori delle costanti l'adozione di un valore diverso per W .

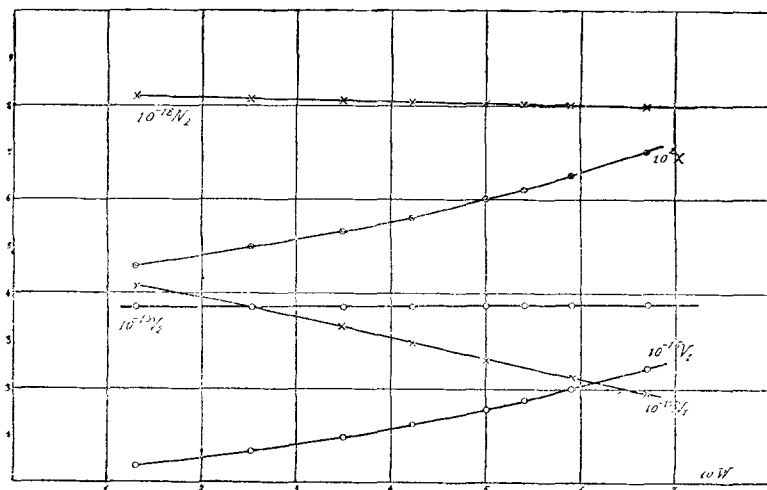


Fig. 7.

La tabella e il diagramma della fig. 7 che seguono, mostrano appunto come si modificano le costanti elettroniche in corrispondenza di diversi valori di W .

W	$10. v_1^{-15}$	$10. v_2^{-15}$	$10. N_1^{-18}$	$10. N_2^{-18}$	$10 x^2$
0,130	0,34	3,7	0,41	8,19	4,56
0,252	0,706	3,72	0,34	8,16	5
0,349	0,98	3,72	0,33	8,11	5,3
0,422	1,23	3,73	0,29	8,07	5,6
0,453	1,4	3,74	0,27	8,05	5,8
0,483	1,57	3,75	0,26	8,02	6
0,501	1,58	3,75	0,25	8	6
0,540	1,75	3,75	0,24	8	6,2
0,590	2	3,75	0,22	8	6,5
0,670	2,44	3,76	0,19	7,9	7

Si può così riconoscere che pur variando W entro limiti molto estesi, N_2 , v_2 conservano praticamente un valore invariabile; non così N_1 , v_1 ed x che variano alquanto ma si riconosce ugualmente che per N_1 e v_1 resta immutato l'ordine di grandezza e solo questo, come abbiamo visto, può essere accertato dalle presenti ricerche. È chiaro quindi che i risultati cui son pervenuto riescono praticamente indipendenti dal valore di W non direttamente determinato.

11. L'insieme dei valori ottenuti per le costanti elettroniche della teoria di Drude, può considerarsi come abbastanza sicuro; ciò conferisce certo alla teoria un grado di attendibilità che le veniva a mancare finchè si perveniva a un sistema di valori assurdi di per sè (mobilità negative).

Ma si è potuto raggiungere questo risultato, solo rinunciando all'utilizzazione del coefficiente di effetto Righi, per il quale effetto si è anzi trovato che esso è incompatibile con la teoria non come entità numerica ma addirittura come senso. Questa impossibilità di giustificare con la teoria il segno dell'effetto Righi era del resto già stata segnalata da Zahn.

L'adozione delle formule di Corbino ha permesso che vengano eliminate le altre anomalie più gravi incontrate da Zahn applicando le formule di Drude. E questo costituisce certo un risultato incoraggiante a favore della teoria elettronica dei metalli che per altro richiede ancora ulteriori perfezionamenti essenziali.

Roma, luglio 1913.
