

2.

Bemerkungen über einige Formeln der Geodäsie.(Von Herrn Dr. *A. Winckler*, k. k. Professor in Brünn.)**D**ie folgenden Artikel beschäftigen sich:

Erstlich mit der Ermittlung des Betrages, um welchen, bei Annahme der gewöhnlichen Hypothesen, die scheinbare Zenithdistanz eines terresterischen Objects in Folge der atmosphärischen Strahlenbrechung von der wahren Zenithdistanz abweicht;

Zweitens mit der Berechnung der Höhen solcher Objecte aus einem Näherungs-Ausdrucke, in welchem auf die Refraction und auf den *vollständigen* Einfluß der Erdkrümmung Rücksicht genommen ist. Endlich:

Drittens mit der kürzern Herleitung einer bekannten Formel für die Inhalte kleiner sphärischer Dreiecke.

1.

Um den Betrag zu ermitteln, um welchen wegen der Refraction die beobachtete Zenithdistanz corrigirt werden muß, werde ich von der Gleichung der Refractioncurve Gebrauch machen, welcher dasjenige Gesetz der brechenden Kraft in den auf einander folgenden Schichten der Atmosphäre zu Grunde liegt, welches zu der bekannten, bei terresterischen Höhenbestimmungen ausschliesslich in Anwendung kommenden Formel führt.

Der Übersicht wegen möge zunächst die dieser Hypothese entsprechende Gleichung der genannten Curve, jedoch auf etwas einfacherem Wege als sonst abgeleitet werden.

Es seien zu dem Ende in (Taf. 2. Fig. 1.) A und A_1 zwei innerhalb der Atmosphäre liegende Punkte der Lichtcurve.

R und R_1 die Halbmesser der entsprechenden Luftschichten.

$H = R_1 - R$ die Höhendifferenz der beiden Punkte.

u der Winkel am Erdcentrum, welchen R und R_1 einschließen.

z und z_1 die scheinbaren Zenithdistanzen der Punkte A_1 und A .

Δz und Δz_1 die wegen der Refraction daran nöthigen Correctionen.

$\varrho = \Delta z + \Delta z_1 = 180'' + u - (z + z_1)$ die Gesamtwirkung der Refraction.

r der Radiusvector, v der Polarwinkel irgend eines Punktes der Curve.

i der Einfallswinkel des Lichts und λ der Brechungs-Exponent in diesem Puncte.
 k die Refractionsconstante.

Das Grundgesetz der atmosphärischen Strahlenbrechung wird dann durch die Gleichung:

$$\frac{r}{\lambda} \sin i = A$$

ausgedrückt, wo A eine gewisse Constante bezeichnet.

Die Beziehung zwischen λ und r werde, wie bemerkt, durch die Gleichung

$$\lambda = Br^k$$

festgesetzt, wo B eine weitere Constante bezeichnet.

Differentiirt man nun die Gleichung:

$$\sin i = AB \cdot r^{k-1}$$

logarithmisch, so erhält man:

$$\cotg i \cdot di = (k-1) \frac{dr}{r}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der für jede Curve bestehenden Relation

$$\frac{dr}{r} = \cotg i \cdot dv,$$

indem man r eliminirt, so ergibt sich:

$$di = (k-1) dv,$$

und durch Integration:

$$i = (k-1)v + \text{Const.}$$

Um die Constante wegzuschaffen, setze man $v=0$, wofür $i=z$ ist, so hat man:

$$i = (k-1)v + z.$$

Wendet man diese Gleichung auch noch auf den Punct A_1 an, für welchen $v=u$ und $i=180-z$ ist, so erhält man:

$$180 - z_1 = (k-1)u + z$$

oder, da

$$180 + u - (z + z_1) = \varrho$$

ist, so wird nun die Refraction durch die Gleichung:

$$\varrho = \Delta z + \Delta z_1 = ku$$

gefunden.

Um endlich den auf Δz und Δz_1 kommenden Antheil von ku zu bestimmen, benutzen wir, wie bereits erwähnt, die Gleichung der Curve. Die-

selbe ergibt sich sogleich aus der oben angeführten Relation

$$\frac{dr}{r} = \cotg i \cdot dv,$$

wenn man darin den für i gefundenen Werth einführt; nämlich wie folgt:

$$\log r = \int \cotg (z + (k-1)v) \cdot dv + \text{Const.}$$

Und wenn man die Integration ausführt, und die constante dadurch eliminirt, dafs man die Gleichung auf den Punct A anwendet, für welchen $v=0$ und $r=R$ ist, so erhält man:

$$r = R \left\{ \frac{\sin (z + (k-1)v)}{\sin z} \right\}^{\frac{1}{k-1}};$$

welches nun die Gleichung der *Refractionscurve* ist.

Wendet man dieselbe auch auf den Punct A_1 an, für welchen $v=u$ und $r=R_1$ ist, so ergibt sich:

$$\left(\frac{R_1}{R} \right)^{1-k} \cdot \sin (z - (1-k)u) = \sin z.$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{R_1}{R} = 1 + \frac{H}{R} = a \quad \text{und} \quad 1 - k = n,$$

so findet sich:

$$\text{tang } z = - \frac{a^n \sin nu}{1 - a^n \cos nu}.$$

Erwägt man weiter, dafs sich aus dem Dreiecke ACA_1 die Gleichung

$$\frac{R_1}{R} \cdot \sin (z + \Delta z - u) = \sin (z + \Delta z)$$

finden läfst und dafs hieraus:

$$\text{tang } (z + \Delta z) = - \frac{a \sin u}{1 - a \cos u}$$

folgt, so gelangt man zu dem folgenden bemerkenswerthen Ausdrucke:

$$\Delta z = \text{arctang } \frac{a^n \sin nu}{1 - a^n \cos nu} - \text{arctang } \frac{a \sin u}{1 - a \cos u}.$$

Ohne auf eine weitere Discussion desselben einzugehen, mag nur erwähnt werden, dafs, da

$$\frac{H}{R} = 1 - a = \alpha$$

immer der kleinste, darin vorkommende Zahlenwerth sein wird, die Ent-

wicklung der Correction Δz nach Potenzen von α für den vorliegenden Zweck hinreichend ist.

Setzt man daher zur Abkürzung

$$A_n = \arctang \frac{a^n \sin nu}{1 - a^n \cos nu},$$

so ist:

$$\frac{dA_n}{d\alpha} = \frac{n(1+\alpha)^{n-1} \sin nu}{1 - 2(1+\alpha)^n \cos nu + (1+\alpha)^{2n}},$$

woraus

$$\left(\frac{dA_n}{d\alpha}\right)_0 = \frac{1}{2}n \cotg \frac{1}{2}nu,$$

also

$$\left(\frac{dA_1}{d\alpha}\right)_0 = \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}u$$

folgt. Wollte man die Entwicklung noch um ein Glied weiter fortsetzen, so wäre für dasselbe

$$\left(\frac{d^2 A_n}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{n}{2\sqrt{2}} \cos(45^\circ + nu) \cotg \frac{1}{2}nu.$$

Aus der *Mac-Laurin*'schen Formel folgt also:

$$\Delta z = \frac{1}{2}(1-n)u + \frac{1}{2}\alpha(n \cotg \frac{1}{2}nu - \cotg \frac{1}{2}u) + \dots$$

Das dritte Glied rechter Hand ist, wegen des Factors α^2 und weil der andere Factor mit der ersten Potenz von u beginnen würde, nicht mehr zu beachten nöthig.

Entwickelt man nun auch noch das zweite Glied nach Potenzen von u , bleibt aber bei der ersten derselben stehen, setzt auch wieder die durch a und n bezeichneten Ausdrücke ein, so findet man:

$$\Delta z = \frac{1}{2}ku + \frac{1}{12}(k(2-k)) \cdot \frac{H}{R} \cdot u$$

oder, da auch k^2 im zweiten Gliede keinen merklichen Einfluss haben kann:

$$\Delta z = \frac{1}{2}ku + \frac{1}{6}ku \cdot \frac{H}{R},$$

also auch:

$$\Delta z_1 = \frac{1}{2}ku - \frac{1}{6}ku \cdot \frac{H}{R}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die gewöhnliche Annahme $\Delta z_1 = \Delta z$, welche wegen Übergehung des Unterschiedes beider Größen gemacht werden mußte, eben so eine nahe Folge derjenigen Theorie ist, aus welcher die Formel $\Delta z = \frac{1}{2}ku$ ihre Begründung erhält, als sie bekanntlich für den normalen Zustand der Atmosphäre sich meistens auch practisch bewährt.

II.

Im X. Buche der Méc. céleste und in dem Traité de Géodésie von *Puissant* findet man Näherungs-Ausdrücke für die Berechnung der Höhe terresterischer Objecte. Der Ausdruck von *Puissant* ist um ein Glied genauer, als der von *Laplace* und wird auch auf anderm Wege gefunden. Mit der bisherigen Bezeichnung heist derselbe:

$$H = a \cotg z + \frac{a^2}{2R \sin z^2} - \frac{a^2 k}{2R \sin z^2}$$

oder

$$H = a \cotg z + \frac{a^2}{2R} + \frac{a^2}{2R} \cotg z^2 - \frac{a^2 k}{2R} \operatorname{cosec} z^2,$$

wo jetzt a die Sehne $2R \sin \frac{1}{2}u$, oder, mit gleichem Grade der Genauigkeit, auch den zugehörigen Bogen Ru bezeichnet.

Den *richtigen* Näherungswerth von H findet man aber am bequemsten auf folgende Weise.

Es ist bekanntlich ganz strenge:

$$H = 2R \sin \frac{1}{2}u \cdot \frac{\cos(z - \frac{1}{2}(1-k)u)}{\sin(z - \frac{1}{2}(2-k)u)}.$$

Um diesen Ausdruck nach Potenzen von u zu entwickeln, setze man zur Abkürzung:

$$U = \frac{\cos(z - \frac{1}{2}(1-k)u)}{\sin(z - \frac{1}{2}(2-k)u)},$$

so ist:

$$\frac{dU}{du} = \frac{(1-k) \cos \frac{1}{2}u + \cos(z - \frac{1}{2}(1-k)u) \cos(z - \frac{1}{2}(2-k)u)}{2 \sin(z - \frac{1}{2}(2-k)u)^2},$$

also:

$$\left(\frac{dU}{du}\right)_0 = \frac{1}{2} + \cotg z^2 - \frac{1}{2} k \operatorname{cosec} z^2.$$

Eben so erhält man:

$$\left(\frac{d^2U}{du^2}\right)_0 = \frac{1}{4}(-1 + 2(2-k)^2 \operatorname{cosec} z^2) \cotg z.$$

Die hieraus sich ergebende Entwicklung multiplicire man noch mit der von $\sin \frac{1}{2}u$, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung, und nachdem man $\frac{a}{R}$ statt u gesetzt hat, die Gleichung

$$H = a \cotg z + \frac{a^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} + \cotg z^2 - \frac{1}{2} k \operatorname{cosec} z^2 \right\} + \frac{a^3}{4R^2} \left\{ -\frac{2}{3} + (2-k)^2 \operatorname{cosec} z^2 \right\} \cotg z.$$

Das letztere Glied ist hier meistens verschwindend klein, und den beiden

ersten läßt sich folgende Form geben:

$$H = a \cotg z + \frac{a^2}{2R} + \frac{a^2}{R} \cotg z^2 - \frac{a^2 k}{2R} \operatorname{cosec} z^2.$$

Hier drückt nun das erste Glied rechter Hand die aus dem rechtwinkligen Dreiecke mittels der scheinbaren Zenithdistanz berechnete Höhe und das zweite Glied die sogenannte Erhöhung des scheinbaren Horizonts aus. Das dritte Glied rührt von der convergirenden Richtung der Verticalen R und R_1 her; das vierte endlich ist die Correction wegen der Strahlenbrechung.

Aus Vergleichung dieser Formel mit der oben angeführten von *Puissant*, zeigt sich, dafs die letztere *nur die Hälfte* des dritten Gliedes, und daher die Glieder erster Ordnung *nicht vollständig* enthält. Ich erwähne dieses Umstandes, weil die Formel in die Lehrbücher der Geodäsie übergegangen ist und dabei der Einfluss der Convergenz der Verticalen, wohl deswegen, weil nur die Hälfte seines Werthes in der Formel vorkam, als unter allen Umständen sehr klein, meistens ganz aufser Acht gelassen wurde. Dafs aber dieser Einfluss, insbesondere bei beträchtlichem Höhenwinkel, keinesweges immer vernachlässigt werden dürfe und leicht den sonst überall berücksichtigten Betrag der Refraction erreichen könne, erhellet wie folgt.

Das Glied $\frac{(a \cotg z)^2}{R}$ kommt, was auch a sein möge, sogar der Erhöhung des scheinbaren Horizonts gleich, wenn

$$\operatorname{tang} z = \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad z = 54^\circ 44'$$

ist, und es erreicht die Gröfse des Einflusses der Refraction, wenn

$$\cos z = \sqrt{\frac{1}{2}} k \quad \text{oder} \quad z = 75^\circ 12' \quad (\text{für } k = 0,1306)$$

ist. Es beträgt noch den fünften Theil derselben, wenn

$$z = 83^\circ 27'$$

ist, u. s. w.

Wenn die aus dem rechtwinkligen Dreiecke berechnete und noch die Refraction berücksichtigende Höhe $a \cotg z$ bereits gegeben ist, so kann man die richtige Höhe mit *allen* Correctionen, ohne erst die Zenithdistanz berechnen zu müssen, unmittelbar aus der obigen Näherungsformel finden, wenn man ihr die Form

$$H = a \cotg z + \frac{1-k}{2R} \cdot a^2 + \frac{2-k}{2R} (a \cotg z)^2$$

giebt.

Dieser Ausdruck dürfte für Höhenberechnungen überhaupt bequemer sein als die strenge Formel, obgleich diese letztere die Höhe durch ein Product darstellt.

Setzt man nämlich:

$$\frac{1-k}{2R} = \lambda, \quad \frac{2-k}{2R} = \mu,$$

so ist:

$$H = a \cotg z + \lambda a^2 + \mu (a \cotg z)^2,$$

wobei für die gewöhnlichen Mittelwerthe (und für Metermaafs):

$$k = 0,14, \quad \log R = 6,8041294,$$

also

$$\log \lambda = -7,1706609, \quad \log \mu = -6,8356465$$

ist.

Um zu sehen, welche Unterschiede diese Formel gegen die genauere in einem bestimmten Falle giebt, möge folgendes Beispiel betrachtet werden.

D'Aubuisson beobachtete die Höhe des *Monte Gregorio* in der Schweiz und fand:

$$a = 5880^m,4, \quad z = 73^\circ 47' 35''.$$

Berechnet man nun *H* zuerst nach der *strengen Formel*, so ergibt sich:

$$u = 3' 10'',416,$$

also:

$$z - \frac{1}{2}(1-k)u = 73^\circ 46' 31'',121; \quad z - \frac{1}{2}(2-k)u = 73^\circ 44' 55'',914$$

und

$$H = 1711^m,392.$$

Nach der *Näherungsformel* ist Folgendes die ganze Rechnung:

log <i>a</i> =	3,7694069		
log cotg <i>z</i> =	9,4632412		
	3,2326481	...	<i>a</i> cotg <i>z</i> = 1708,630
log (<i>a</i> cotg <i>z</i>) ² =	6,4652962		
log <i>μ</i> =	-6,8356465		
	0,6296497 - 1	...	<i>μ</i> (<i>a</i> cotg <i>z</i>) ² = 0,426
log <i>a</i> ² =	7,5388138		
log <i>λ</i> =	-7,1706609		
	0,3681529	...	<i>λ a</i> ² = 2,334
			<i>H</i> = 1711 ^m ,390

Der Unterschied beider Resultate ist also völlig unbedeutend.

Das von der Convergenz der Verticalen herrührende Glied ist hier $+0,458$ und der Einfluss der Refraction $-0,412$. Man sieht also, dass in dem vorliegenden Falle das erste Glied das zweite noch übertrifft und darum seine Berücksichtigung mindestens eben so gerechtfertigt zu sein scheint, als die des letztern Gliedes. Gleichwohl wird es häufig ganz weggelassen.

III.

Um für den Inhalt eines kleinen sphärischen Dreiecks einen Näherungs-Ausdruck zu finden, der bis auf Gröfsen *vierter* Ordnung einschliesslich genau ist, geht man am einfachsten von der bekannten Formel von *L'Huilier* aus, welche

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4} E = \sqrt{\left(\operatorname{tang} \frac{a+b+c}{4r} \operatorname{tang} \frac{a+b-c}{4r} \operatorname{tang} \frac{a-b+c}{4r} \operatorname{tang} \frac{-a+b+c}{4r} \right)}$$

ist und worin a , b , c die Seiten des auf der Kugel vom Radius r liegenden sphärischen Dreiecks bezeichnen, dessen sphärischer Excess E ist. Setzt man nun

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{4r} &= \alpha, & \frac{a-b+c}{4r} &= \gamma, \\ \frac{a+b-c}{4r} &= \beta, & \frac{-a+b+c}{4r} &= \delta \end{aligned}$$

und entwickelt jede Tangente unter dem Wurzelzeichen nach der Formel

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{1}{3} x^3$$

in eine Reihe, so erhält man:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{4} E = \sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)} \cdot \sqrt{\left[\left(1 + \frac{1}{3} \alpha^2\right) \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right) \left(1 + \frac{1}{3} \gamma^2\right) \left(1 + \frac{1}{3} \delta^2\right) \right]}.$$

Und da

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4r^2}$$

und

$$\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)} = \frac{\mathcal{A}}{4r^2}$$

ist, wo \mathcal{A} den Inhalt des aus den Seiten a , b , c construirten *ebenen* Dreiecks bezeichnet, so ergiebt sich:

$$4r^2 \operatorname{tang} \frac{1}{4} E = \mathcal{A} \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12r^2}\right)}.$$

Setzt man endlich linker Hand E statt $4 \tan \frac{1}{4} E$ und entwickelt die Quadratwurzel, so erhält man für den verlangten Ausdruck:

$$r^2 E = A \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24r^2} \right).$$

Auf etwas umständlichere Weise findet man diese Gleichung, von Professor *Buzengeiger* entwickelt, im VI. Bande der Zeitschrift von *Lindenau* und *Bohnenberger*.

Brünn, den 14. November 1853.