SUI PRINCIPII DELLA MECCANICA.

Nota di **C. Burali-Forti** (Torino).

Adunanza del 27 maggio 1906.

Le idee primitive che compariscono nella Meccanica sono molte: alle principali di *tempo, massa, forza, composizione di forze, equilibrio, attrazione*, se ne uniscono altre, non facilmente analizzabili, e che, come le prime, sono strettamente collegate con fatti sperimentali del mondo fisico. Le leggi cui obbediscono queste idee primitive sono espresse dai *postulati statici* e di *moto,* tra i quali hanno speciale importanza i *principî* dei *lavori virtuali* delle *pressioni vincolari* e di D'ALEMBERT *). Idee primitive, postulati e principî, insieme a fondamentali nozioni di geometria **), formano il *modello* per la Meccanica.

Costruire un *modello* più semplice dell'attuale, cioè meno complesso sia riguardo alle idee primitive che ai postulati, ma con lo stesso *campo* di applicazioni, mi pare cosa importante tanto sotto l'aspetto scientifico che sotto quello didattico ***). È appunto questo lo scopo che mi propongo raggiungere ****) in questa breve Nota.

---

*) La potenza e generalità di questi principî li mette, naturalmente, a base di ogni importante trattazione di Meccanica razionale.

Per la genesi dei principî e procedimenti che avrò occasione di citare in questa Nota, rimando il lettore alla *Meccanica razionale* del Prof. R. MARCOLONGO (Manuali Hoepli, 1905), che, ricchissima di importanti notizie storiche, dà, sotto forma chiara, semplice e precisa, completa conoscenza delle varie idee che compariscono in meccanica, del loro graduale sviluppo e delle loro applicazioni.

**) La forma semplice che daremo in questo lavoro al *modello* per la meccanica, non esige aumento di nozioni geometriche; anzi rende inutili tutte quelle che, più che agli enti geometrici in sè, si riferiscono ai numeri che rappresentano punti, direzioni, rette, ecc.

***) G. VAILATI, *Il Pragmatismo e la Logica matematica.*

****) Con metodi semplicissimi e pressochè elementari.

Le questioni relative alla *cinematica*, alla ricerca dei *centri di gravità*, dei *momenti d'inerzia*, ... appartengono tutte alla *geometria metrico-proiettiva:* hanno notevoli applicazioni nella meccanica, ma non avendo bisogno del concetto di forza, sono indipendenti da qualsiasi *modello* meccanico. Viene come conseguenza che, dato ai corsi di geometria uno sviluppo riguardante più da vicino le applicazioni pratiche, la meccanica propriamente detta può dare più ampio sviluppo alle questioni reali e pratiche del mondo fisico, specie quando abbia a disposizione un modello semplice e metodi semplici (vettoriali) per il suo uso. Cfr. C. BURALI-FORTI: *Le formule di* FRENET *per le superfici* [Atti Acc. Torino, vol. XXXVII (1901-902), pp. 233-246]; *Ingranaggi piani* [Ibid., id., pp. 393-413]; *Sul moto di un corpo rigido* [Ibid., vol. XXXVIII (1902-903), pp. 155-170].

Il *modello* che io costruisco contiene *due* sole idee primitive *sistema materiale semplice*, e *tempo* *). L'*unico* postulato è quello del *minimo cammino* (Kürzeste Bahn) dovuto all'HERTZ **), analogo a quello della *minima azione* di JACOBI. *Nel modello stesso,* e con l'aiuto di poche nozioni geometriche, DEFINISCO, *sistema materiale* fisso o in moto libero o vincolato, *massa, sistemi di forze, composizione, equilibrio, attrazione,* ... e DEDUCO *tutti* gli ordinari postulati, o principi, statici e dinamici.

Si intende che nel modello io non attribuisco alcun significato fisico ai termini *sistema materiale*, *massa, forza*, ... , e molto meno intendo stabilire la natura delle forze e il loro modo di agire, ecc. L'applicazione del modello ai casi fisici è identica all'applicazione, ai medesimi casi, degli ordinari modelli: si deve, cioè, verificare se gli enti fisici cui si attribuiscono i nomi, *sistema materiale, massa, forza,* ... hanno, o no, le medesime proprietà degli enti astratti omonimi (primitivi o derivati) del modello in questione. Che poi, per l'applicazione del modello, vi sia controversia riguardo al *significato fisico* di *sistema materiale* (per, sistema planitario, corpo, campo elettrico o magnetico, ...), *massa* (per, solido, massa elettrica, ...), *forza* (per, semplice trazione con una fune, azione a distanza, ...) e riguardo alla *definizione fisica* di questi enti, è questione che esce dal campo matematico e non ha più relazione diretta col modello. A me basta constatare che quello che ho costruito ha il *medesimo campo meccanico* degli ordinari modelli ***).

Il modello dell'HERTZ (opera citata) riduce tutto a massa e moto, ma non contiene che forze d'inerzia e attrazioni ****): di qui la difficoltà di applicarlo ai fenomeni fisici, per i quali è necessario ricorrere a forze reali (direttamente applicate), almeno tenuto conto dello stato attuale della scienza sperimentale e della metafisica di collegamento dei varî fatti dovuti all'esperienza. Inoltre l'HERTZ, più che costruire un modello per i fatti fisici, *pare* che intenda esplicare i fatti stessi, riprendendo i precetti di CARTESIO e degli atomisti ed estendendo all'universo fisico le idee che W. THOMSON aveva applicate al solo etere. È quindi naturale che nel *Kürzeste Bahn* di HERTZ non sia stata vista che una *forma* diversa del principio di D'ALEMBERT e dei *lavori virtuali.* Però il principio di D'ALEMBERT differisce sostanzialmente da quello di HERTZ. Il primo ha bisogno, anche per essere enunciato, del concetto di *forza* con tutte le sue proprietà; il secondo no: anzi, permette di definire un ente geometrico cui si può attribuire il nome *forza*, la-

---

*) *Tempus absolutum, verum, et mathematicum, in se et natura sua sine relatione ad externum quodvis, æqualiter fluit, alioque nomine dicitur duratio.* NEWTON, Phil. Natu. edit. del 1762, p. 6.

Riguardo alla possibile *definizione nominale* di *moto* e quindi di *tempo* come *moto unitario,* cfr. C. BURALI-FORTI, *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science* [L'Enseignement Mathématique, I (1899), pp. 246-261 (p. 260)].

**) *Gesammelte Werke* von H. HERTZ, B. III, *Die Prinzipien der Mechanik,* p. 174.

***) Ammesse le speciali leggi fisiche, naturalmente esterne a qualsiasi *modello meccanico,* come la legge di NEWTON per le attrazioni, ecc.

****) Cfr. P. DUHEM, *L'évolution de la Mécanique* [Revue générale des Sciences pures et appliquées, tome XIV (1903), pp. 247-258].

sciando del tutto impregiudicata la questione metafisica sulla natura delle forze, delle attrazioni, delle masse, ecc. *).

Sistema materiale semplice. — Chiameremo *sistema materiale semplice* un ente astratto, funzione di un *numero* (reale, positivo e non nullo) e di un *punto* (ente geometrico). Se m è il numero e P il punto, indicheremo con mP il sistema materiale individuato da m e da P.

Se mP, nQ sono due sistemi materiali, diremo che $mP = nQ$ quando $m = n$ e $P = Q$ (cioè, P coincide con Q **).

Sistema materiale. — Chiameremo *sistema materiale* ogni *classe* formata con sistemi materiali semplici, $m_i P_i$.

Gli elementi punti del sistema possono formare un sistema discontinuo o riempire un campo ad una, due o tre dimensioni.

Massa. — Nel sistema materiale semplice nQ il numero n chiamasi *massa*.

Chiameremo *massa* del sistema materiale $m_i P_i$ il numero

$$m = \sum m_i$$

somma delle masse dei singoli elementi.

Nei sistemi continui, il simbolo Σ si cambierà in un integrale semplice, o doppio, o triplo.

Moto di un sistema materiale. — Si dà un *moto* ad un sistema materiale $m_i A_i$ determinando i punti $P_i(t)$ funzioni (continue, ecc.,) della variabile numerica t, *tempo,* in modo che per un dato valore t_0 di t si abbia, qualunque sia i, $P_i(t_0) = A_i$.

Il sistema materiale $m_i P_i$ sia in moto, cioè i punti P_i siano determinate funzioni del tempo. Col variare di t, il punto P_i descrive una linea, la *traiettoria* di P_i. Se s_i è l'arco della traiettoria, $d s_i = \operatorname{mod} d P_i$. Il vettore $\frac{d P_i}{d t} = P'_i$ indica come varia, col tempo, l'arco della traiettoria, ed è la *velocità* in grandezza, direzione (tangente in P_i alla traiettoria) e verso. Il vettore $\frac{d^2 P_i}{d t^2} = P''_i$ indica come varia, col tempo, la velocità, ed è l'*accelerazione* in grandezza direzione (sul piano osculatore in P_i alla traiettoria) e verso.

Chiameremo energìa cinetica *(o forza viva)* del sistema in moto $m_i P_i$ il numero

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{d P_i}{d t}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i P'^2_i .$$

---

*) Queste questioni hanno certo somma importanza, ma non possono formare l'unico oggetto degli studî di fisica e di meccanica: se l'attività dei fisici si fosse rivolta esclusivamente ad esse, non avremmo oggi, probabilmente, nemmeno una delle meravigliose applicazioni della fisica e della meccanica.

**) Il sistema materiale semplice così definito (in modo astratto) può identificarsi ad una speciale *formazione geometrica di prima specie* di GRASSMANN.

Per notazioni e denominazioni seguo il mio libro *Lezioni di Geometria metrico-projettiva* (Torino, Bocca, 1904).

Infine diremo, con H. HERTZ, che

$$s = \int_{t_0} \sqrt{\frac{2\varphi}{m}}\, dt$$

è il *cammino* percorso dal sistema $m_i P_i$, in moto, dal tempo t_0 al tempo t *).

Sistema vincolato. — Se al sistema materiale $m_i A_i$ si vuol dare un moto, in modo che per ogni valore di t i punti P_i debbano sodisfare a determinate condizioni, allora si dirà che *il sistema è vincolato.*

In ciò che segue noi supponiamo che i *vincoli* (condizioni) del sistema siano dati in modo tale che possa applicarsi l'ordinario calcolo delle variazioni per gli *spostamenti* δP_i (spostamenti virtuali) dei punti P_i **).

Postulato di Hertz. — *Se il sistema, libero o vincolato, $m_i P_i$, è in moto, allora: la variazione (compatibile coi vincoli) del cammino fatto dal sistema per passare dalla configurazione fissa $m_i A_i$ alla configurazione, pure fissa, $m_i B_i$, è nulla.*

Se t_0, t_1 sono i tempi nei quali il sistema passa per $m_i A_i$ e $m_i B_i$, il postulato di HERTZ assume la forma simbolica seguente

$$\delta s = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{2\varphi}{m}}\, dt = 0.$$

Eseguiamo la variazione dell'integrale.

Supposto $\varphi \neq 0$ si ha

$$\delta s = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{2\varphi}{m}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta\varphi}{\sqrt{2m\varphi}}\, dt;$$

ma dalla espressione di φ si ricava

$$\delta\varphi = \sum m_i P_i' \times \delta P_i' = \sum m_i P_i' \times \frac{d}{dt}\delta P_i;$$

sostituendo nella formula precedente e integrando per parti

$$\delta s = \sum \left[\frac{1}{\sqrt{2m\varphi}} (m_i P_i' \times \delta P_i)_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{2m\varphi}} \left\{ \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} m_i P_i' - m_i P_i'' \right\} \times \delta P_i\, dt \right] = 0 \text{ ***}).$$

---

*) Se il sistema si riduce ad un punto con massa 1, allora s è l'arco della traiettoria, perchè

$$s = \int_{t_0} \sqrt{P'^2}\, dt = \int_{t_0} \operatorname{mod} P'\, dt = \int_{t_0} \operatorname{mod} dP.$$

**) Cfr. MARCOLONGO, l. c., per i sistemi olonomi.

***) Se si osserva, essendo s il cammino del sistema, che

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2\varphi}{m}}, \qquad P_i' = \sqrt{\frac{2\varphi}{m}} \frac{dP_i}{ds}, \qquad P_i'' = \frac{2\varphi}{m} \frac{d^2 P_i}{ds^2} + \frac{\varphi'}{\sqrt{2m\varphi}} \frac{dP_i}{ds},$$

la precedente espressione di δs assume la forma

$$\delta s = \frac{1}{m} \sum \left[\left(m_i \frac{dP_i}{ds} \times \delta P_i \right)_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} m_i \frac{d^2 P_i}{ds^2} \times \delta P_i\, ds \right] = 0$$

identica alla formula che dà la variazione di un arco di una curva (Cfr. G. PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale,* vol. II, pag. 321).

Il primo termine è nullo perchè $\delta P_i = 0$ per le posizioni estreme, fisse, del sistema; quindi, se $\delta s = 0$, è nullo pure il secondo, ed è noto *) che deve annullarsi la funzione sotto il segno integrale.

Dunque il postulato di HERTZ è espresso dalla condizione semplice

$$(1) \qquad \sum \left[\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} m_i P_i - m_i P_i''\right] \times \varphi P_i = 0 \text{ **)}.$$

Sistema di forze. — Chiameremo *sistema di forze applicato al sistema materiale* $m_i P_i$, una classe di *vettori* F funzioni dei punti P_i, o, almeno, funzioni della stessa variabile (semplice o complessa) della quale sono funzioni i punti corrispondenti P_i.

Il sistema materiale $m_i P_i$ sia in moto e sia F_i un sistema di forze applicate al sistema $m_i P_i$. Diremo che le forze F_i sono capaci di produrre il moto considerato quando per ogni valore di t si ha

$$(2) \qquad \sum [F_i - m_i P_i''] \times \delta P_i = 0.$$

Viceversa: se dato il sistema F_i e le condizioni iniziali del moto di un sistema materiale $m_i P_i$, la condizione (2) è atta a definire i punti P_i in funzione del tempo, allora diremo che il moto così ottenuto è prodotto dal sistema di forze F_i. Nel moto così definito dalla (2) le F_i diconsi *forze direttamente applicate.*

Uno stesso moto può esser prodotto da due o più sistemi di forze ***). Il moto definito dalla (2) è, in virtù della (1), definito anche dal sistema di forze $m_i P_i''$, che diconsi *forze d'inerzia,* e la cui funzione potenziale (o *energia potenziale*) è φ (o $-\varphi$, secondo le convenzioni). Lo stesso moto è pure definito dal sistema di forze $\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} m_i P_i'$

*) E. PASCAL, *Calcolo delle variazioni*, pag. 49, Manuali Hoepli, 1897.

**) Esprimendo mediante s, la (1) assume la forma

$$\sum m_i \frac{d^2 P_i}{ds^2} \times \delta P_i = 0.$$

Si ha pure un'altra forma notevole della (1) che diviene specialmente utile quando si considerano i sistemi di forze che ammettono la *funzione potenziale.*

Si ponga $\varphi_i = \frac{1}{2} m_i P_i'^2$ e $u_i = \int \varphi_i \, d(\log \varphi)$. Calcolando $d\varphi_i$ e du_i si esprimono i *parametri differenziali* (vettori, secondo HAMILTON; cfr. il mio libro, pag. 230) dei numeri φ_i e u_i funzioni del punto P_i, e si ha

$$\nabla \varphi_i = m_i P_i'', \qquad \nabla u_i = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\varphi} m_i P_i';$$

quindi la (1) diviene

$$\sum \nabla (u_i - \varphi_i) \times \delta P_i = 0.$$

Si osservi che $u = \sum u_i = \varphi + \text{cost.}$, e che u, φ sono le funzioni potenziali dei due sistemi di forze $\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} m_i P_i'$, $m_i P_i''$ che, come vedremo tra poco, sono capaci di produrre, separatamente, il moto considerato.

***) Che sono equivalenti, nel senso che stabiliremo tra poco, per ogni valore di t, poichè da $\sum [F_i - m_i P_i''] \times \delta P_i = 0$ e $\sum [U_i - m_i P_i''] \times \delta P_i = 0$ si ricava $\sum [F_i - U_i] \times \delta P_i = 0$.

che si ottengono moltiplicando le *forze d'impulso*, $m_i P'_i$, per la derivata rispetto al tempo di $\log\sqrt{\varphi}$, e la cui funzione potenziale differisce da φ (o $-\varphi$) per una costante *).

Composizione di forze. — Siano F_i, U_i, V_i, ... sistemi di forze applicati ad uno stesso sistema materiale $m_i P_i$. Il sistema $F_i + U_i + V_i + \cdots$ (le F, U, V, ... sempre con lo stesso indice) è pure relativo allo stesso sistema materiale, e lo chiameremo *resultante* dei sistemi F_i, U_i, V_i, ...

La resultante di due forze applicate in uno stesso punto è la somma di due vettori e quindi è la diagonale, ecc. (postulato della resultante).

Equilibrio. — Diremo che il sistema di forze F_i è in equilibrio rispetto al sistema materiale $m_i P_i$, libero o vincolato, quando

$$\sum F_i \times \delta P_i = 0, \tag{3}$$

cioè quando è nullo il *lavoro virtuale* delle forze.

Se per il sistema $m_i P_i$, in moto per opera del sistema F_i, si ha, nel tempo t, l'equilibrio, allora le (1), (2), (3) dànno

$$\frac{\varphi'}{\varphi} \sum m_i P'_i \times \delta P_i = 0, \qquad \sum m_i P''_i \times \delta P_i = 0.$$

La prima è sodisfatta per $\varphi' = 0$ oppure per $\sum m_i P'_i \times \delta P_i = 0$, che, derivata e tenuto conto della seconda condizione, dà $\delta\varphi = 0$. Quindi l'equilibrio nel tempo t esprime che è nulla la variazione della forza viva, o, in generale, l'energìa cinetica è massima o minima **); e ciò corrisponde al comune concetto di equilibrio.

---

*) Consideriamo ad esempio il moto di un punto obbligato a muoversi sopra una linea descritta da un punto P funzione di una variabile numerica x, essendo data la forza F, pure funzione di x, direttamente applicata. Si tratta di esprimere x in funzione di t.

Posto $v = \mathrm{mod}\, P'$, le (1) e (2) dànno

$$\left[m\frac{v'}{v}P' - mP''\right] \times \delta P = 0, \qquad [F - mP''] \times \delta P = 0;$$

e poichè δP è parallelo a dP queste dicono intanto, che la componente tangenziale di F è $m\frac{v'}{v}P'$. Inoltre la seconda dice che $F - mP''$ è normale a dP, cioè che esiste un vettore $-R$, funzione di x, (resistenza del vincolo), tale che

$$mP'' = F + R,$$

che è l'ordinaria equazione del moto del sistema materiale mP ritenuto da una linea.

Si osservi che l'equazione del moto non varia ponendo al posto di F una qualunque delle forze che hanno $m\frac{v'}{v}P'$ per componente tangenziale.

L'espressione generale di R è la seguente:

$$R = \frac{(F \times dP)\,dP}{(dP)^2} + \left[2\int F \times dP\right] \frac{d\left(\frac{dP}{\mathrm{mod}\, dP}\right)}{\mathrm{mod}\, dP} - F,$$

che è applicabile qualunque sia la variabile x da cui dipende P. Il numero v si determina con i soliti metodi.

**) Quando in luogo della (3) piaccia porre la seguente, per tener conto di speciali vincoli,

$$\sum F_i \times \delta P_i \overline{\gtrless} 0,$$

allora la variazione della forza viva risulta nulla o negativa: interpretazione analoga.

La (2) esprime dunque il principio di D'ALEMBERT sotto la forma dovuta ad EULER *).

Cerchiamo ora la condizione di equilibrio del sistema di forze F_i applicate al sistema *rigido* $m_i P_i$.

Si ha il teorema: *per qualunque spostamento* δ *del sistema è determinata una formazione geometrica* a *di seconda specie, e infinitesima, tale che, qualunque sia il punto* P_i *del sistema (o solo rigidamente collegato col sistema), si ha sempre*

$$\delta P_i = | P_i a . \omega \text{ **)}.$$

Se alla (3) diamo la forma equivalente

$$\sum F_i | \delta P_i = 0$$

e si sostituisce il δP_i dato dalla formula precedente si ha

$$\sum F_i | \delta P_i = \sum F_i [P_i a . \omega] = 0 ;$$

sviluppando il prodotto regressivo, e ricordando che $F_i \omega = 0$, la (3) assume la forma

$$(3)' \qquad [\sum P_i F_i] a = 0.$$

Se il corpo è libero, allora a può assumere *sei* valori *linearmente indipendenti* e la condizione (3)' diviene $\sum P_i F_i = 0$ che riduce l'equilibrio del sistema *all'annullarsi di una forma di seconda specie* di GRASSMANN, cioè alle ordinarie condizioni. Se il corpo non è libero sussiste la condizione $\sum P_i F_i = 0$ se i vincoli permettono ad a di assumere sei valori linearmente indipendenti; altrimenti rimane la (3)' per tutte le a linearmente indipendenti (meno di sei) che sono compatibili con i vincoli.

Equivalenza. — Diremo che, rispetto al sistema materiale $m_i P_i$, il sistema di forze F_i è equivalente al sistema di forze U_i, quando, rispetto allo stesso sistema materiale $m_i P_i$, le forze $F_i - U_i$ sono in equilibrio.

La condizione di equivalenza è dunque per la (3)

$$\sum F_i \times \delta P_i = \sum U_i \times \delta P_i .$$

Nel caso del sistema rigido e libero è

$$\sum P_i F_i = \sum P_i U_i ,$$

e quindi, tenendo pur conto della (3)', risulta che i sistemi di forze applicate ai corpi rigidi possono identificarsi alle *formazioni geometriche di seconda specie* del GRASSMANN ***).

Attrazione o forze interne. — Il sistema materiale $m_i P_i$ sia in moto sotto l'azione delle forze F_i.

*) Indipendentemente, cioè, dal concetto, poco utile, e spesso ingombrante, di *forze perdute*.

**) G. PEANO, *Calcolo Geometrico*, 1888; *Sopra lo spostamento del polo sulla terra* [Atti Acc. Torino, vol. XXX (1894-95), pp. 515-523. Per la dimostrazione di questo teorema Cfr. C. BURALI-FORTI, *Sul moto di un corpo rigido* (loco citato).

***) Mediante queste formazioni, il cui algoritmo è identico a quello dell'algebra, lo studio di tali sistemi di forze si riduce ad un semplice esercizio geometrico.

Si scomponga il sistema $m_i P_i$ in due (o più) sistemi $m_i Q_i$, $m_i R_i$ e, corrispondentemente, si scomponga il sistema di forze F_i nei due sistemi U_i, V_i. Dalla (2) si ha

$$(\alpha) \qquad \sum [U_i - m_i Q_i''] \times \delta Q_i + \sum [V_i - m_i R_i''] \times \delta R_i = 0.$$

Siano ora I_i J_i, due sistemi di forze relativi ai due sistemi $m_i Q_i$, $m_i R_i$ tali che

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum [U_i + I_i - m_i Q_i''] \times \delta Q_i = 0, \\ \sum [V_i + J_i - m_i R_i''] \times \delta R_i = 0, \end{array} \right.$$

cioè tali che: il sistema $U_i + I_i$ dia al sistema $m_i Q_i$, isolato dal sistema totale $m_i P_i$, lo stesso moto che ha nel sistema totale; e analogamente per $V_i + J_i$ rispetto ad $m_i R_i$.

Possiamo esprimere il fatto ora indicato dicendo che: le forze I_i emanano dal sistema $m_i R_i$ ed agiscono sul sistema $m_i Q_i$, *attraendo* o *respingendo*, in modo che unite alla parte del sistema generale di forze F_i che agisce nel sistema $m_i Q_i$, dànno al sistema $m_i Q_i$ il moto che esso ha nel sistema generale e indipendentemente dalle forze V_i. Analogamente per le forze J_i *).

Le forze I_i, J_i possono chiamarsi *forze interne* e dipendono, evidentemente, anche dal modo nel quale si intende decomposto il sistema. Ad es., possiamo considerare come parti del sistema gli elementi $m_i P_i$ e allora la forza K_i tale che

$$[F_i + K_i - m_i P_i''] \times \delta P_i = 0$$

è la resultante delle azioni di tutti i rimanenti elementi del sistema sull'elemento $m_i P_i$.

Comunque si faccia la scomposizione si ha sempre che: *le forze interne sono in equilibrio rispetto al sistema totale,* poichè sottraendo da (α) le (β) si ha

$$\sum I_i \times \delta Q_i + \sum J_i \times \delta R_i = 0.$$

Se il sistema si riduce a due soli elementi ed è libero, allora $QI + RJ = 0$, cioè $I = -J$ che dimostra il principio della *azione* e *reazione* di NEWTON **).

Ordinari postulati statici e di moto. — Ci siamo già occupati del postulato della resultante e dei principî dei LAVORI VIRTUALI, di D'ALEMBERT, di NEWTON. Esaminiamo rapidamente gli altri.

Il *principio di solidificazione* risulta dalla (3), poichè essa non cessa di esser verificata se gli spostamenti δP_i si assoggettano ad ulteriori condizioni, compatibili con quelle già date.

L'aggiunta di un sistema in equilibrio, non altera l'equilibrio o il moto, poichè, se $\sum U_i \times \delta P_i = 0$, le (2), (3) sussistono ancora ponendo $U_i + F_i$ al posto di F_i.

Si consideri il sistema libero mP, formato da un solo punto con la massa m. Se

---

*) Se le forze F_i sono nulle il moto del sistema può considerarsi come dovuto alle *attrazioni,* che funzionano come *vincoli immateriali* del *sistema.* In generale le *reazioni dei vincoli* possono considerarsi come forze interne, e poichè queste sono in equilibrio, si ha il principio delle reazioni vincolari.

**) *Actioni contrariam semper et æqualem esse reationem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

questo sistema è in moto e la forza F che lo sollecita è nulla, allora la (2) dà

$$mP'' \times \delta P = 0;$$

ma questa deve esser verificata qualunque sia δP, e dovrà quindi essere $P'' = 0$, cioè

$$P' = V = \text{cost.}, \qquad P = P_0 + tV$$

con P_0 punto fisso. Dunque: *ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto uniforme e rettilineo finchè non interviene* [cfr. (2)] *una forza esterna.*

Il precedente sistema sia in moto per l'azione di una forza F non nulla. Come nel caso precedente si ha

$$mP'' = F,$$

la quale dimostra che: *l'accelerazione è proporzionale alla forza applicata,* ecc.; *l'accelerazione prodotta da più forze è la somma,* ecc.; *sotto l'azione di una forza costante un punto materiale assume moto rettilineo ed uniformemente accelerato* *); ecc.

Torino, Maggio 1906.

C. BURALI-FORTI.

*) Perchè se F è costante, da $P'' = \frac{1}{m} F$ si ricava

$$P' = V_0 + \frac{t}{m} F, \qquad P = P_0 + t V_0 + \frac{t^2}{2m} F.$$