Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues.

Par

M. Federigo Enriques à Bologne*).

---

1. Les problèmes dont il s'agit dans ce Mémoire se rapportent à la *résolution* des équations algébriques. Il n'y a donc pas ici de questions nouvelles; rien de plus ancien, rien de plus conforme au but pratique dont l'Algèbre elle-même tire son origine. Et pourtant lorsqu'on parle de *résoudre* une équation, on pense d'ordinaire au cas *déterminé* où celle-ci ne renferme qu'une seule inconnue; le cas *indéterminé*, où elle en renfermerait plusieurs, on ne l'envisage pas, le plus souvent, en toute son étendue, ou bien on l'envisage à des points de vue différents qui déguisent la vraie nature du problème.

Cela tient peut être à une double origine des théories qui nous occupent, en tant qu'elles se rapportent aux deux cas.

D'un côté les problèmes classiques de résolution posés par les anciens algébristes amènent à la théorie *algébrique* de Galois. Mais de l'autre côté ce sont surtout des recherches *analytiques*, d'Abel, de Jacobi, de Riemann etc. qui donnent naissance aux études sur les equations entre plusieurs variables; ici le point de vue algébrique est plus récent; encore il ne se rattache pas d'une manière immédiate à celui qui domine les découvertes de Galois.

Nous nous proposons d'envisager les équations renfermant plusieurs inconnues suivant le même esprit que l'on attache au cas déterminé, c'est-à-dire suivant l'esprit de la résolution. Des problèmes se présentent ainsi qui ne sont pas tout-à-fait nouveaux, mais qui revêtent pourtant une forme nouvelle. Entre ces problèmes il y en a de ceux dont l'énoncé est bien simple; quelques-uns même qu'on ne douterait de placer à côté de la question classique se rapportant à l'équation du cinquième degré.

---

*) Cet article reproduit les matières traitées dans la conférence tenue par M. Enriques au Congrès international des Mathématiciens à Zurich (Août, 1897).

Malheureusement la plupart de ces problèmes demeurent aujourd'hui sans réponse, et les contributions qu'on a portées dans ce champ de recherches ressemblent en vérité à de rares flambeaux au milieu d'une obscurité épaisse. Elles montrent les difficultés plutôt qu'elles ne nous aident à les vaincre!

C'est même à cause de cela que le sujet ne nous paraît pas indigne de tous les efforts.

2. Il faut rappeler, en commençant, les conceptions fondamentales de Galois se rapportant aux équations $f(x)=0$ qui renferment une seule inconnue. Peu de mots suffiront.

Chaque équation $f(x)=0$ définit en général une *irrationalité* particulière; celle-ci dépend entièrement d'un certain groupe de substitutions qui lui appartient. C'est ce groupe qui joue le rôle fondamental dans notre théorie. Il opère en échangeant entre elles les racines de l'équation $f=0$, dont le nombre montre ce que j'appelle le *degré* de l'irrationalité; il donne, par sa composition, la vraie nature de celle-ci.

Mais au sujet du mot «irrationalité» quelques remarques semblent utiles. En effet l'on peut prendre ce mot dans deux sens différents:

1) ou bien dans une acception *arithmétique*, lorsque l'on a en vue les *valeurs* des racines de l'équation donnée $f(x)=0$;

2) ou bien dans une acception plus proprement *algébrique* lorsque l'on se rapporte aux *opérations* (définies seulement d'une manière théorique) dont dépend le calcul de ces racines.

Il faut encore ajouter, pour éviter toute indétermination, que les opérations nommées sont à effectuer sur des quantités que l'on suppose *connues* d'avance. Ainsi, tout d'abord, sur les coefficients de f. Ensuite sur les quantités que l'on peut en tirer par des opérations rationnelles, qui engendrent le *domaine de rationalité* (Kronecker) de ces coefficients. Enfin sur d'autres quantités, fournies par le procédé même de la résolution de $f(x)=0$, qui viennent *adjointes*, l'une après l'autre, au domaine de rationalité primitif, et entrainent par leur adjonction un élargissement de celui-ci jusqu'à comprendre toutes les racines dont on demandait la valeur.

Que l'on envisage maintenant l'irrationalité de l'équation $f(x)=0$, dans la dernière acception du mot, c'est à dire comme une opération; on en tirera une généralisation des notions de Galois, qui est d'ailleurs fort connue. Il suffit de penser que les coefficients de f au lieu de rester fixes, peuvent varier en dépendant, supposons d'une manière rationnelle, de certains paramètres $u_1 \dots u_r$, que l'on laissera tout-à-fait arbitraires. L'opération irrationnelle qui consiste à résoudre l'équation $f(x)=0$, permettra alors d'établir un lien fonctionnel entre ces paramètres et la x; nous aurons défini par suite la *fonction algébrique* $x(u_1 \ldots u_r)$.

Pourtant la vraie nature de celle-ci résultera souvent plus simple, que ne le montrerait l'opération par laquelle elle est engendrée. En effet, en résolvant la $f(x, u_1 \ldots u_r) = 0$, il arrivera de rencontrer des opérations, à effectuer sur les coefficients de f, qui demeureront toujours les mêmes pour les différentes valeurs des paramètres, et qui, par suite, ne compliqueront pas la nature de la fonction algébrique $x(u_1 \ldots u_r)$. On pourra toujours considérer ces opérations (*arithmétiques*) comme effectuées d'avance, en ajoutant de convenables *irrationnelles numériques* au domaine de rationalité engendré par les coefficients de f. Par cette adjonction le groupe algébrique de $f = 0$ (au sens de Galois) se trouve réduit au *groupe de monodromie* de la fonction $x(u_1 \ldots u_r)$, c'est à dire au groupe des permutations engendrées sur les branches de x par les tours fermés effectués dans la variété $(u_1 \ldots u_r)$.

C'est donc précisement ce groupe de monodromie qui définit la nature de *l'irrationalité* en question, en tant qu'elle est envisagée comme une opération proprement *algébrique* à effectuer sur les paramètres.

3. Que l'on ait maintenant à résoudre, une équation algébrique $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ renfermant plusieurs (à savoir n) inconnues.

Une première méthode se présente. On peut envisager $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ comme des paramètres, et calculer ensuite la valeur de x_n capable de satisfaire à l'équation; le calcul dépend alors d'une opération irrationnelle bien déterminée. Mais il est aisé de se convaincre que l'irrationalité introduite par cette méthode n'est pas, en général, la plus simple qui suffit à notre but. Ainsi p. e. s'il faut résoudre une équation générale du deuxième ou du troisième degré, le procédé indiqué nous amène à une irrationalité quadratique ou respect. cubique, tandis qu'en choisissant de nouveaux paramètres il sera toujours possible d'exprimer $x_1\, x_2 \ldots x_n$ par des fonctions rationnelles de ceux-ci (supposé $n > 2$ dans le dernier cas).

On voit donc clairement quelle est la nature du problème qui se présente ici.

Il s'agit pour chaque équation proposée $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ de chercher la résolution *la plus simple* que l'on obtiendra en exprimant les inconnues par des paramètres choisis d'une manière convenable. «Le choix des paramètres» voilà la question.

4. Mais il importe de fixer tout d'abord les limites de la question elle-même. La *simplicité* dont on parle, qui est d'ailleurs tout-à-fait relative, est conçue dans une acception purement *algébrique*. Par suite on ne saurait faire rentrer dans notre champ de recherches, quelques

problèmes qui poursuivent un but parallèle, au point de vue *analytique;* ainsi p. e. la résolution d'une équation renfermant deux inconnues par des fonctions *holomorphes* (elliptiques ou automorphes) d'un paramètre (Clebsch, Poincaré), ou bien encore les intéressants essais de MM. Picard et Painlevé concernant la résolution de certaines équations remarquables avec trois inconnues.

Or il est aisé de se convaincre que l'on pourra toujours envisager le problème qui nous occupe, sous la forme suivante:

Soit une équation donnée

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0,$$

renfermant n inconnues.

On demande s'il est possible de la résoudre, en posant $x_1 x_2 \ldots x_n$ fonctions rationnelles de $n-1$ paramètres $u_1 \ldots u_{n-1}$ et d'une *fonction algébrique connue* de ceux-ci

$$X(u_1 \ldots u_{n-1}).$$

En d'autres termes on demande de calculer $x_1 x_2 \ldots x_n$ en opérant sur $n-1$ paramètres, à l'aide de telle ou telle autre opération irrationnelle algébrique dont on connait le degré, ou bien encore le groupe etc.

Dans le cas le plus simple on obtiendra la résolution proposée par des fonctions rationnelles, c'est à dire sans effectuer aucune opération irrationnelle. Lorsque cela n'est pas possible il faudra essayer si l'on y parvient à l'aide d'une racine carrée, etc.

5. On peut généraliser le problème de la résolution d'*une* équation, en posant la question analogue qui se rapporte à des *systèmes de plusieurs équations.* Toutefois il ne s'agit pas d'une généralisation effective, car (d'après Kronecker) on pourra toujours remplacer le système donné, par une ou plusieurs équations, moyennant un procédé d'élimination de quelques inconnues, et il suffira en suite, de résoudre chacune des équations qui seront obtenues de la sorte.

La considération de tels systèmes pourrait donc être laissée tout-à-fait de côté, s'il n'arrivait parfois de remplacer avec avantage une équation unique donnée par un système équivalent composé de plusieurs équations.

Revenons au cas d'une équation unique.

6. Nous avons déjà remarqué que chaque résolution particulière d'une équation donnée, dépend du choix des paramètres que l'on introduit. Or, puisqu'on se rapporte à des résolutions algébriques, les paramètres seront à leur tour des fonctions algébriques des inconnues. Deux cas pourront se présenter:

1) ou bien ces fonctions algébriques seront aussi *rationnelles,*

2) ou bien elles seront *irrationnelles.*

Il s'agit d'une distinction très importante, car suivant qu'il arrive le premier cas ou le deuxième, chaque système de solutions correspond à *un seul* système de valeurs des paramètres, ou à *plusieurs*. Or, c'est là un défaut serieux en beaucoup de questions, lorsque la dernière circonstance se présente on ne saurait tout de suite comparer deux solutions données et reconnaître si elles sont vraiment deux solutions différentes.

Nous appelerons *simple* toute résolution d'une équation lorsque les paramètres introduits seront des fonctions rationnelles des inconnues; puisque, en ce cas, en faisant varier les paramètres on trouvera *une seule fois* chaque système de solutions.

Maintenant un problème se présente:

Étant donnée une équation et une résolution de celle-ci qui ne soit pas simple, obtenue à l'aide d'irrationalités connues, on demande, s'il est possible, de résoudre l'équation d'une manière simple par des irrationalités de la même nature.

À cet énoncé général se rattachent quelques résultats particuliers très intéressants.

Soit l'équation avec deux inconnues $f(xy) = 0$. *Si on peut la résoudre par des fonctions rationnelles* (d'un paramètre) *on pourra toujours en tirer une résolution simple, obtenue de même par des fonctions rationnelles.* C'est le théorème bien connu de M. Lüroth*).

Il a été récemment étendu par M. Castelnuovo**) au cas des équations $f(xyz) = 0$ qui renferment trois inconnues:

Si la $f(xyz) = 0$ *peut se résoudre d'une manière rationnelle on peut aussi choisir les paramètres de telle façon qu'il résultent à leur tour des fonctions rationnelles des inconnues* (de sorte que les formules de la résolution seront invertibles).

La même proprieté subsistera-t-elle aussi pour la resolution rationnelle d'une équation renfermant un nombre d'inconnues quelconque (> 3)? Cette question très délicate demeure en suspens.

Revenons au cas d'une équation $f(xy) = 0$.

Que l'on possède une résolution de celle-ci par une racine carrée; à savoir que l'on ait

$$x = f(t, \sqrt{\varphi(t)}), \qquad y = \varphi(t, \sqrt{\psi(t)})$$

où f, φ, ψ sont des fonctions rationnelles, et supposons que la résolution dont il s'agit ne soit pas simple. Cela revient à dire qu'à chaque couple xy satisfaisant à la $f = 0$ correspondent plusieurs valeurs de t; mais il pourra arriver que l'on trouve une fonction rationnelle $\tau(xy)$ qui dépende aussi de t d'une manière rationnelle; alors on sera tout

*) „Beweis eines Satzes über rationale Curven". Ces Annalen, Bd. 9.

**) „Sulla razionalità delle involuzioni piane". Ces Annalen, Bd. 44 (1893).

de suite ramené à une résolution simple de la $f = 0$ par la substitution

$$\tau = \tau(t).$$

Eh bien, *en dehors de ce cas tout-à-fait clair, l'équation* $f(xy) = 0$ *pourra se résoudre, d'une manière simple, sans aucune irrationalité,* c'est-à-dire par des fonctions rationnelles invertibles d'un nouveau paramètre.

C'est là un théorème de M. Painlevé*) bien qu'il l'énonce vraiment d'une manière un peu différente.

J'ai cherché de l'étendre en envisageant des irrationalités plus élevées, et je suis parvenu à la proposition générale suivante**).

S'il est possible de résoudre une équation donnée $f(xy) = 0$ *par une irrationalité de degré* n, *et si la résolution dont on parle n'est pas simple, ou bien on obtiendra une nouvelle résolution simple (elle aussi de degré* n*) en effectuant une substitution rationnelle sur le paramètre, ou bien il sera possible de résoudre l'équation d'une manière simple par une irrationalité de degré moindre que* n. Par conséquent *lorsqu'on veut une résolution de l'équation* $f(xy) = 0$ *par une irrationalité qui ait le plus petit degré possible, il suffit d'envisager des résolutions* (simples) *où le paramètre est une fonction rationnelle de* $x\,y$.

La proposition se trouve établie par un procédé géométrique s'appuyant sur une remarque de M. Segre. Il y a lieu de se poser des questions analogues se rapportant au cas de trois inconnues. Mais la proposition même de M. Painlevé, ne saurait s'étendre à ce cas. En effet on peut demontrer (v. n⁰ 14) que l'équation $f(xyz) = 0$ du quatrième degré se résout par une seule racine carrée portant sur une fonction rationnelle de deux paramètres; mais ceux-ci, de quelque façon qu'on les choisisse, ne seront jamais des fonctions rationnelles de $x\,y\,z$, le polynome f demeurant le plus général de son degré.

7. Au problème de la résolution des équations algébriques se rattache par des liens très étroits celui de la *transformation.* On peut en dire davantage. Puisque toute résolution n'est en dernière analyse qu'une transformation, les deux problèmes sont au fond le même problème. Mais comme ils répondent à un esprit de recherche un peu différent, ils amènent aussi à de questions différentes. Qu'il nous soit permis, pourtant, de marquer les limites de la théorie de la transformation en tant qu'elle est envisagée comme préalable à la théorie

*) „Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre" ch. II. Annales de l'École Normale, 1891.

**) „Un' osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche". Rendic. Circolo Matematico di Palermo, 1895.

de la résolution, et de revendiquer à celle-ci maintes questions que l'on envisage d'ordinaire au point de vue de celle-là.

On dit qu'une équation

$$\psi(y_1 y_2 \dots y_n) = 0$$

est une transformée rationnelle de l'équation

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

lorsqu'on passe de celle-ci à celle-là à l'aide d'une substitution rationnelle

$$x_i = x_i(y_1 y_2 \dots y_n). \tag{1}$$

Si $\varphi = 0$ est résolue d'une certaine manière on obtient des formules (1) une résolution de $f = 0$ par les mêmes irrationalités.

Il arrive en général que les formules (1) soient reversibles; on dit alors que chacune des deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$ est la transformée birationnelle de l'autre.

Les deux équations présentent en ce cas exactement la même difficulté de résolution.

D'après cette remarque il convient à notre but de ranger les équations en *classes* en posant (d'après Riemann) dans une même classe deux équations dont l'une est la transformée birationnelle de l'autre. Une classe est représentée par une équation *type* que l'on peut choisir dans celle-ci d'une manière arbitraire.

Assigner un critérium pour reconnaître si on peut passer par une transformation birationnelle d'une équation à une autre donnée; en d'autres termes juger si deux équations données appartiennent ou non à la même classe, voilà le but de la théorie de la transformation.

Elle amène ainsi à envisager des *caractères* (nombres entiers) et des *modules* (variables d'une manière continue) appartenant à chaque classe; ce sont la des *invariants* d'une équation vis-à-vis des transformations birationnelles.

Pour ce qui concerne les équations entre deux variables, la théorie a atteint son but. En effet ces équations, rangées d'après leur genre, peuvent se transformer en certaines équations types ayant un nombre déterminé de modules que l'on sait assigner.

Malheureusement il n'en est plus ainsi lorsqu'on passe aux équations renfermant un plus grand nombre d'inconnues.

Rapportons-nous au cas des équations $f(xyz) = 0$. On rencontre ici, tout d'abord, deux caractères essentiels; ce sont le premier genre p et le second genre $p^{(1)}$, envisagés par M. Nöther*). Le premier pourtant se dédouble, suivant qu'on le prend dans une acception arithmétique ou algébrique (géométrique); ainsi il donne lieu à deux

*) „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens . . . I, II". Ces Ann. Bde 2, 8.

caractères p_n et p_g qui peuvent bien différer entre eux, et qui demeurent toujours des invariants de l'équation proposée.

Aux caractères nommés il convient d'ajouter le double genre P_2, le triple genre $P_3 \ldots$; une série de caractères, dont nous avons établi l'invariance vis-à-vis des transformations birationnelles*), et dont le profit est demontré par de récentes recherches**).

Sans nous arrêter, avec quelques détails, sur ce sujet, il nous suffira de rappeler que les caractères susnommés p_n, p_g, $p^{(1)}$, $P_2, \ldots$ résultent à présent définis en tous cas. Pourtant il n'est pas assez de ces caractères pour atteindre la classification demandée, car on rencontre (en correspondance des premières valeurs au moins) plusieurs familles irréductibles d'équations ayant les mêmes genres p_n, p_g, $p^{(1)}$, P_2, $P_3, \ldots$, chaque famille donnant lieu à une infinité de classes définies par un certain nombre de modules. Voilà pourquoi nous affirmions tout à l'heure que la théorie de la transformation, en ce qui concerne les équations avec trois inconnues, n'est pas achevée. Et on est même plus éloigné du but lorsque l'on a à faire avec un plus grand nombre d'inconnues.

Remarque. Nous avons parlé jusqu'ici de transformations birationnelles. Les transformations *simplement rationnelles* (qui ne sont pas reversibles) semblent appelées aussi à jouer un rôle, en apparence même plus important, dans notre théorie. En effet, il suffit que l'on puisse envisager l'équation $\varphi(y_1 y_2 \ldots y_n) = 0$ comme une transformée simplement rationnelle de $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$, pour que le problème qui consiste à résoudre $\varphi = 0$ se trouve abaissé par la résolution de $f = 0$; le cas pourtant excepté où la dernière résolution (qui est toujours plus aisée de la première) s'obtiendrait elle même d'une manière rationnelle.

Malheureusement c'est toujours cette circonstance désavantageuse qui se présente à l'égard de $f = 0$, l'équation $\varphi = 0$ étant donnée d'une façon générale. De sorte que la théorie de la résolution des équations ne saurait tirer aucune aide des transformations simplement rationnelles, sauf en de cas tout-à-fait particuliers.

Ces cas pourtant sont bien dignes de remarque, et M. Painlevé***) leurs a consacré de belles recherches concernant les équations entre deux variables.

---

*) Enriques „Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche". Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), 1896.

**) Castelnuovo et Enriques „Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques". Voir ces Annalen Bd. 48.

***) Voir le ch. II du Mémoire cité sur les équations différentielles.

9. Nous allons examiner maintenant avec quelques détails les questions de résolutions qui se rapportent aux équations

$$f(xy) = 0$$

renfermant deux inconnues.

Nous pouvons poser le problème général suivant:

I) Déterminer les différentes résolutions d'une équation donnée

$$f(xy) = 0.$$

Pour nous borner aux résolutions simples, formons d'une manière générale une fonction rationnelle

$$t = t(xy).$$

Elle donne lieu à une irrationalité $x(t)$ $\big($ou $y(t)\big)$ tout-à-fait définie, par laquelle on obtient une certaine resolution de

$$f(xy) = 0.$$

Or les caractères de cette irrationalité dépendront, en partie de la nature de f, en partie du choix de la fonction $t(xy)$. Le degré, par exemple, dépendra surtout du choix de t, et pourra même recevoir toutes les valeurs au dessus de certaines limites $\big($pourvu que l'on forme $t(xy)$ d'une façon convenable$\big)$; mais au dessous de ces limites quelques valeurs seulement seront possibles (en particulier une valeur minimum) en correspondance de la nature de f; ce seront précisement celles-ci qu'il importera d'assigner. Le problème qui se présente ainsi n'est pas complétement résolu; la réponse se borne aujourd'hui à quelques cas généraux.

On sait, p. e. que l'équation la plus générale du degré n se résout par une irrationalité du degré $n - 1$, et qu'on ne pourrait déscendre au dessous de cette valeur.

On sait de même que le moindre degré de l'irrationalité dont dépend la résolution d'une équation tout-à-fait générale du genre p, est (d'après Riemann) la moitié de p ou de $p + 1$, augmentée d'une unité.

Mais enfin, au-de-là de certaines limites, il ne faut plus faire attention au degré comme au caractère le plus important d'une irrationalité; c'est plutôt à son groupe qu'il convient de se rapporter. Alors d'autres questions extrêmement intéressantes prennent naissance.

Suivant nos remarques, le groupe de l'irrationalité $x(t)$ dépend du choix de t, et de la nature de f. Il s'agit de délimiter l'influence respective de ces deux éléments. Arrivera-t-il que certaines particularités de f entraînent des particularités communes à tous les groupes en question, de quelque manière que l'on choisisse $t(xy)$?

C'est par la négative qu'il faut répondre à ce doute, car il s'ensuit d'un théorème de M. Kneser*) que »le groupe de $x(t)$ demeurera toujours le groupe total, et par suite l'irrationalité $x(t)$ n'aura aucune particularité, lorsque $t(xy)$ est choisi d'une façon générale, bien que f soit douée de particularités quelconques«.

C'est donc seulement par un choix convenable de $t(xy)$ que l'on donnera lieu à des irrationalités $x(t)$ dignes de remarques. Mais on ne saurait particulariser de la sorte le groupe de $x(t)$, au-de-là de certaines limites, sans entraîner des particularités de la f elle-même. Ainsi, par exemple, que l'on cherche à résoudre l'équation $f(xy) = 0$ par une irrationalité *imprimitive*. Il suffit vraiment de former $t(xy)$ en posant

$$t = \varphi(\tau) \qquad \big(\tau = \tau(xy)\big),$$

où φ désigne une fonction rationnelle et τ est elle-même une fonction rationnelle de x, y; mais en ce cas l'irrationalité $x(t)$ qui intervient dans la résolution de $f = 0$ peut être remplacée tout simplement par la $x(\tau)$. Mais si l'on repousse de pareilles irrationalités en quelque sorte réductibles, on ne saurait choisir toujours $t(xy)$ de façon à engendrer une résolution de $f = 0$ par une irrationalité imprimitive; une pareille résolution n'est possible que lorsque $f = 0$ est la transformée simplement rationnelle d'une autre équation dont le genre est > 0. Ainsi la particularité dont l'on voulait douer le groupe de $x(t)$ revient à la nature de la f elle-même.

Il s'agirait maintenant de distinguer, parmi les caractères que l'on peut attribuer à l'irrationalité $x(t)$, ceux qu'il sera permis de fixer d'avance quelque soit f, et ceux qui au contraire entraîneraient des particularités de l'équation. Or il n'est pas aisé de répondre à une question de si haute importance, même en ce bornant à quelques cas d'un intérêt remarquable.

Par exemple, en faisant attention aux facteurs de composition du groupe de $x(t)$, on est amené à se demander si, par un choix convenable de $t(xy)$, on saurait toujours s'arranger de manière que ces facteurs résultent des nombres premiers; car il s'ensuivrait que toute équation $f = 0$ pourrait se résoudre par des seules extractions de racines. Vraiment il n'est pas à croire qu'une telle possibilité subsiste, mais comment démontrer qu'elle ne subsistera pas?

10. Les questions posées précédemment supposaient donnée l'équation $f(xy) = 0$, il s'agissait de la résoudre et d'assigner la nature des irrationalités dont la résolution viendrait dépendre. Or on peut renverser le problème en se proposant de

---

*) „Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabeln". Ces Annalen Bd. 28, 1884.

II) former toutes les équations dont la résolution s'obtient par des irrationalités de nature connue.

Il semble même que de la réponse à cette dernière question on saurait tirer la réponse à la première, mais il faut remarquer pourtant à ce propos, que les équations en quelque sorte les plus générales qui se trouvent résolues par une irrationalité donnée, renferment cette résolution comme une résolution tout-à-fait singulière.

Commençons à envisager un cas bien particulier du problème posé: il s'agit de determiner les *équations que l'on peut résoudre sans aucune irrationalité*, cela revient à dire par des fonctions rationnelles d'un paramètre.

Elles sont complétement déterminées, car on sait bien, d'après Clebsch, qu'*elles forment la classe dont le genre est* 0. Que l'on veuille former ensuite les *équations résolubles par une racine carrée, à savoir* les équations *hyperelliptiques.* On peut demander p. e. de former toutes les *équations hyperelliptiques ayant un certain genre p donné*, et l'on obtiendra alors *le type*

$$y^2 = f(x)$$

où f est un polynome du degré $2p+2$.

En laissant de côté les équations hyperelliptiques il est aisé d'envisager d'autres exemples qui amènent à des cas particuliers du problème général, où l'on obtient sans difficulté la réponse. Il suffira de citer le cas des équations résolubles par une racine quelconque dont l'ordre est plus grand que 2.

Mais envisageons plutôt le problème général. Que l'on donne le groupe d'une irrationalité $X(t)$; il s'agit de former les fonctions algébriques $X(t)$, en d'autres termes les équations $\varphi(Xt)=0$ appartenant à ce groupe. Pour préciser on peut même chercher les équations $\varphi=0$ nommées ayant un certain genre p. Or on peut transformer le problème de la manière suivante.

L'équation à former étant désignée par

$$\varphi(X\,t)=0,$$

que l'on envisage sa résolvante de Galois en considérant t comme un paramètre; soit

$$\psi(Yt)$$

un facteur irréductible de celle-ci.

On aura X fonction rationnelle de Y et t. L'équation $\psi=0$ est transformée en elle-même par un groupe de transformations birationnelles

$$Y_2=\Theta(Y_1t) \qquad (t_2=t_1=t);$$

le groupe en question correspond justement au groupe de monodromie de X.

Ainsi le problème posé se ramène à celui de déterminer les fonctions algébriques Y, ou les équations $\psi = 0$, admettant un certain groupe de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Le dernier problème a été envisagé par M. Hurwitz*), sous une forme géométrique. Mais ces recherches fort intéressantes nous apprennent seulement à construire la surface de Riemann la plus générale, qui correspond à un groupe donné; elle montrent ainsi l'existence d'une telle surface, c'est-à-dire l'existence d'une équation algébrique $\psi = 0$ satisfaisant aux conditions demandées, sans nous donner les moyens de la former effectivement.

Une fois que toutes les équations $\psi(Yt) = 0$ seraient connues, il faudrait encorre former leur transformées simplement rationnelles $\varphi(Xt) = 0$, dont le genre p est assigné. Cela s'effectue aisement, car nous sommes en un cas particulier du problème résolu par M. Painlevé**), pourvu que le genre P de ψ soit aussi connu; or c'est ce que l'on peut supposer, car il y a tout au plus un nombre fini de valeurs que l'on peut donner à P, en correspondance de la valeur assignée de p et du groupe de X.

11. Au problème de la résolution des équations renfermant deux inconnues se rattachent quelques cas remarquables de résolution où l'on a un plus grand nombre d'inconnues. Il s'agit d'un procédé de réduction que nous allons expliquer par quelques exemples. C'est ainsi que nous serons amenés a parler d'un problème arithmétique, qui se présente ici.

Soit l'équation
$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (n > 2).$$
Nous avons déjà remarqué que l'on peut envisager quelques unes des inconnues comme des paramètres; si tous les paramètres (à savoir $n-1$) sont choisis de la sorte, la dernière inconnue résulte une fonction algébrique tout-à-fait déterminée de ceux-ci, et il se peut que l'irrationalité introduite ainsi pour la résolution de la $f = 0$, ne soit pas telle qu'on l'avait demandée.

Que l'on envisage à présent $n - 2$ inconnues seulement $x_3 \ldots x_n$, comme des paramètres, auxquels on attribuera pour le moment des valeurs constantes; on aura une équation en x_1, x_2
$$\bar{f}(x_1 x_2) = 0.$$
Supposons qu'elles se trouve résolue à l'aide d'une irrationalité donnée $X(t)$; c'est à dire qu'il soit possible de choisir un nouveau paramètre $t(x_1 x_2)$ de telle façon que l'on ait

*) „Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich". Ces Annalen Bd. 41.

**) l. c.

(1) $$x_1 = \varphi(\chi t) \qquad x_2 = \psi(\chi t),$$
où φ, ψ désignent des fonctions rationnelles.

En s'arrêtant aux apparences il semblerait tout d'abord que les formules (1) donnent aussi une résolution de l'équation
$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = 0$$
à l'aide de la seule irrationalité X. Il n'en est rien. En effet les coefficients de φ, ψ ne seront pas en général des quantités rationnelles dans le domaine défini par les coefficients de f; ils renfermeront au contraire des irrationnelles numériques, et ces derniers déviendront des irrationnelles *algébriques* lorsqu'on fera varier les paramètres $x_3 \ldots x_n$.

On voit par suite que le procédé de réduction indiqué ne saurait s'appliquer sans d'autres remarques; mais il amène à se poser les deux questions suivantes:

1) de quelles irrationnelles numériques, a savoir de quelles opérations arithmétiques peut on faire dépendre la résolution de l'equation
$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$$
obtenue à l'aide de l'irrationalité algébrique X?

2) comment ces irrationnelles dépendront-elles algébriquement des paramètres $x_3 \ldots x_n$; et, en particulier, sera-t-il possible de s'arranger de manière qu'elles n'en dépendent pas du tout?

12. Arrêtons nous sur le cas le plus simple où l'équation
$$\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$$
saurait être résolue d'une manière rationnelle, c'est à dire en posant $x_1\, x_2$ fonctions rationnelles d'un paramètre t.

De quelles opérations arithmétiques pourra-t-on faire dépendre une telle résolution?

C'est M. Nöther*) qui a posé le problème et il lui a donné une réponse très simple. En effet, il résulte de son étude que:

Si une équation $\bar{f}(x_1\, x_2) = 0$ *entre deux inconnues peut être résolue d'une manière rationnelle* (ce qui arrive si elle a le genre 0), *la résotution indiquée pourra toujours s'effectuer:*

a) *ou bien sans ajouter aucune irrationnelle numérique lorsque le degré de* f *en* x_1 *ou en* x_2, *où même le degré complexif, est impair;* b) *ou bien* (tout au plus) *à l'aide d'une seule racine carrée, s'il arrive le contraire.*

Supposons maintenant que l'on ait $n = 3$; nous avons à résoudre l'équation
$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0,$$

*) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen". Ces Annalen Bd. 3.

et nous savons que l'équation $\bar{f} = 0$ où l'on attribue à x_3 une valeur constante a le genre 0. On peut résoudre $\bar{f} = 0$ en posant x_1, x_2 fonctions rationnelles d'un paramètre convenable t, mais les coefficients de ces fonctions renfermeront *en général* une racine carrée qui portera aussi sur x_3, de sorte que l'on n'obtiendra pas ainsi une résolution rationnelle de $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. Eh bien, c'est encore un résultat de M. Nöther (l. c.): *par un choix convenable de t on pourra toujours s'arranger de manière que la racine susnommée ne vienne pas dépendre de x_3, de sorte que la methode de réduction amène en ce cas à résoudre l'équation*

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

par des fonctions rationnelles de x_3 et de t.

On pourrait penser que ce beau théorème s'éteindrait au cas d'une équation renfermant plus de trois inconnues.

Mais il n'en est pas ainsi. Lorsque $n > 3$, et l'équation

$$f(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) = 0$$

envisagée en x_1, x_2 a le genre 0 et le degré pair, il peut bien arriver que la racine carrée qui figure dans les expressions de $x_1\, x_2$ par le paramètre t, vienne toujours dépendre des autres inconnues, de quelque façon que l'on s'arrange. La méthode de réduction employée nous amène alors à résoudre la $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ non pas rationnellement, mais à l'aide d'une racine carrée portant sur une fonction rationnelle des paramètres $x_3 \ldots x_n$.

13. Du théorème cité de M. Nöther découlent quelques conséquences qui se rapportent au cas où le procédé de réduction s'applique à une équation

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

qui, envisagée en $x_1\, x_2$, soit hyperelliptique. Nous ne nous y arrêterons pas. Et nous passerons, plutôt, à une question en quelque sorte générale qui trouve ici sa place.

Que l'on envisage l'équation

$$f(x_1 x_2) = 0$$

ayant un certain genre p et un degré quelconque. Supposons d'abord $p > 1$. Sera-t-il possible d'assigner d'avance une résolution de l'équation $f = 0$ qui s'effectue d'une manière arithmétiquement rationnelle, à l'aide d'une irrationalité algébrique dont le degré ne dépende pas de celui de f?

Il est aisé de repondre par l'affirmative, car il suffit d'envisager une fonction *canonique* $\psi(x_1 x_2)$ pour obtenir d'une façon arithmétiquement rationnelle, une résolution de $f = 0$ par une irrationalité du degré $2p - 2$.

Que pourra-t-on dire maintenant lorsque $p = 1$?

Il n'y a plus ici de fonctions canoniques. Mais l'équation $f(x_1 x_2) = 0$ se résout en une infinité de manières et on peut même assigner à loisir le degré de l'irrationalité dont la résolution vient dépendre (pourvu naturellement qu'il s'agisse d'un nombre > 1). Chaque résolution pourtant, lorsque le degré en question est plus petit que celui de f, exige des opérations arithmétiques que l'on peut effectuer de différentes manières (p. e. à l'aide des équations pour la division des arguments des fonctions elliptiques), mais qui sont liées justement au degré de f. Ainsi, nous tirons la démonstration de quelques exemples, l'équation $f(x_1 x_2) = 0$, supposée la plus générale entre celles du genre 1 et du degré n, ne saura se résoudre par des irrationalités de degré moindre que n, d'une manière arithmétiquement rationnelle.

Il est aisé de reconnaître les conséquences auxquelles les remarques précédentes nous amènent à l'égard du procédé de réduction. Nous allons les énoncer tout simplement en y joignant aussi celles dont nous avons déjà parlé qui se rapportent au cas de $p = 0$. Voici le résultat:

Que l'on ait à résoudre une équation

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \qquad (n > 2)$$

et que l'on s'engage par la méthode de réduction expliquée, en choisissant $x_3 \ldots x_n$ comme $n - 2$ paramètres, et en considérant l'équation $f(x_1 x_2) = 0$ que l'on obtient en $x_1 x_2$. Soit p le genre de cette équation. Lorsque $p \neq 1$ il est toujours possible de résoudre $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ par une irrationalité dont le degré a la valeur absolue de $2p - 2$ (ou moindre que celle-là), mais le cas $p = 1$ est distingué de tous les autres d'une manière essentielle, car en ce cas le procédé de réduction nous amenera à une irrationalité dont on ne pourra d'avance fixer la valeur, qui en général ne sera pas moindre que le degré de f par rapport à x_1 ou à x_2.

Remarque. Pour s'assurer que l'exception relative en cas $p = 1$ est vraiment essentielle il suffit d'envisager une surface (donnée par une équation $f(xyz) = 0$ que l'on peut supposer du degré n en xy), qui soit représentée point par point sur le plan, de manière qu'aux courbes $z =$ const. correspondent des courbes de degré $3n$ ayant 9 points-base de l'ordre n, c'est à dire des courbes composant un des faisceaux bien connus découverts par Halphen.

Enfin il faut encore remarquer explicitement qu'il y a bien de cas particuliers où l'on obtient quelques simplifications par rapport à l'énoncé général. Ainsi p. e. lorsque l'équation $\overline{f}(x_1 x_2) = 0$ est hyperelliptique ($p > 1$) l'équation $f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$ pourra toujours se résoudre par l'extraction d'une seule racine carrée lorsque p est pair, ou par l'extraction successive de deux racines carrées si p est impair.

14. C'est à présent aux équations renfermant trois inconnues

$$f(xyz) = 0$$

que nous allons consacrer quelques mots. Commençons par des cas particuliers. La résolution des équations générales des premiers degrés $n = 1, 2, 3$ s'effectue par des fonctions rationnelles de la manière bien connue. Lorsque $n = 4$, une telle résolution n'est plus possible en général, puisque le genre de f est $= 1$.

Mais *l'équation la plus générale du quatrième degré, en trois inconnues, peut se résoudre à l'aide d'une seule racine carrée* (portant sur une fonction rationnelle de deux paramètres). Cette résolution peut se déduire d'une circonstance géométrique bien simple, puisque la surface de l'ordre 4 admet des sections planes unicursales et les droites s'appuyant à deux courbes pareilles coupent en deux points la surface. La résolution obtenue de la sorte n'est pas simple, car (on le voit bien) les deux paramètres dont dépend le choix d'une droite du système nommé ne seront pas des fonctions rationnelles des coordonnés des points de la surface (puisqu'il y a plus qu'une droite passant par chaque point).

Il est donc naturel de chercher si l'on peut donner de notre équation une résolution différente, exigeant de même une racine carrée seulement, de sorte que les paramètres dépendent rationnellement des inconnues. Mais cela n'est pas possible dans le cas général.

On parvient à cette conclusion de la manière suivante.

Lorsque la résolution demandée est possible, l'équation peut être transformée en une autre de la forme

$$z^2 = f(xy);$$

ainsi nous avons une équation du quatrième ordre représentée sur un plan double

$$(x\,y\,\sqrt{f(xy)}).$$

Que l'on cherche maintenant tous les plans doubles que l'on peut représenter sur une surface du quatrième ordre. Il faut remarquer d'abord que leurs genres ont la valeur 1.

Or les plans doubles de tels genres se partagent en quatre classes*); mais le type général de chaque classe ne correspond pas à une surface du quatrième ordre. Comme d'ailleurs il renferme le même nombre de modules, on voit que la surface générale du quatrième ordre ne saura pas être représentée sur un plan double.

Si maintenant nous laissons de côté les équations du quatrième degré, pour passer à celles dont le degré $n > 4$, nous ne sommes aujourd' hui en mesure de répondre à aucune question se rapportant

*) Enriques „Sui piani doppi di genere uno". Memorie della Società italiana delle Scienze, 1896.

aux résolutions *minima* qu'elles peuvent admettre. Il est aisé de résoudre l'équation du degré n par une irrationalité du degré $n-1$, mais on ne saurait dire s'il sera possible ou non de descendre au dessous de cette valeur (soit en considérant des résolutions simples, soit sans remplir cette condition).

15. Passons maintenant à considérer les équations $f(xyz)=0$ en tant qu'elles appartiennent à telle ou telle autre classe définie par les valeurs des genres. Ce point de vue est certainement plus important que celui qui prend comme point de départ le degré de l'équation.

Malheureusement les résultats obtenus dans ce champ se bornent à bien peu de chose.

Étant donnée une équation

$$f(xyz)=0,$$

que l'on envisage ses caractères (genres)

$$p_n,\ p_g,\ p^{(1)},\ P_2,\ P_3\ldots$$

déjà nommés.

Nous ne savons rien en ce qui concerne la question d'assigner la *résolution du degré minimum appartenant à une équation dont les genres sont connus.*

Peut-on, au moins, assigner une résolution de celle-ci ayant un certain degré donné d'avance qui ne dépende pas du degré de l'équation?

Que l'on suppose $p^{(1)}>1$. Il faut alors repondre à la question posée par l'affirmative. En effet soit d'abord $p_g>2$; il suffit en ce cas d'envisager la valeur $p^{(1)}-1$, on obtiendra toujours une résolution de l'équation proposée dont le degré ne surpassera cette valeur. Si $p_g=2$ il suffira d'envisager à sa place la valeur double $2p^{(1)}-2$. Ces affirmations s'appuyent sur la considération des courbes canoniques de la surface représentée par l'équation (car ces courbes ont le genre $p^{(1)}$ et lorsque $p_g>2$ ce coupent deux a deux en $p^{(1)}-1$ points). Or comme cette considération fait défaut lorsque $p_g<2$, il faut la remplacer par la considération d'autres courbes invariantes dont les caractères dépendent des genres $p_n\, p_g\, P_2\, P_3\ldots p^{(1)}$. Comme nous avons supposé $p^{(1)}>1$ il y a toujours de telles courbes: ce seront les courbes bicanoniques ou bien tricanoniques etc. Elles nous permettront de conclure d'une manière générale que *l'on peut toujours assigner d'avance le degré d'une irrationalité suffisant à résoudre une équation $f(xyz)=0$ dont on connait les genres, pourvu que l'on ait $p^{(1)}>1$, et cela quelque soit le degré de f.* La valeur du degré susnommé, que l'on sait assigner, dépend essentiellement de $p^{(1)}$ et de p_n; elle croît lorsqu'on augmente $p^{(1)}$ ou lorsqu'on diminue p_n.

Il n'en est plus ainsi lorsque $p^{(1)}\lessgtr 1$. En ce cas on n'est plus en mesure d'assigner le degré d'une irrationalité capable de résoudre l'équation $f(xyz) = 0$, qui ne dépende pas du degré de f. Vraiment il y aurait lieu d'établir de nouvelles distinctions et certains cas permettraient d'arriver à quelques conclusions.

Mais nous ne nous y arrêterons pas. Il nous suffira d'avertir que pour $p^{(1)} = 1$ l'exception est essentielle.

Remarque. Les résolutions dont on parle ci-dessus sont obtenues d'une manière arithmétiquement rationnelle; elles se prêtent par suite au procédé de réduction que l'on peut essayer pour résoudre une équation renfermant $n > 3$ inconnues, en considérant dans celle-ci $n - 3$ inconnues comme des paramètres.

16. Les remarques qui précèdent se rapportaient au problème de résoudre une équation $f(xyz) = 0$ que l'on supposait donnée. Comme nous l'avons fait pour ce qui concerne les équations renfermant deux inconnues, on peut ici encore renverser la question. Il s'agira donc de former toutes les équations $f(xyz) = 0$ qui admettent une certaine résolution à l'aide d'une irrationalité dont la nature est assignée d'avance.

Nous nous bornerons à dire quelques mots sur ce sujet en prenant en consideration deux cas particuliers bien simples.

Tout d'abord on demande de déterminer toutes les équations entre trois inconnues qui se laissent résoudre d'une manière rationnelle, c'est à dire par des fonctions rationnelles. La réponse à cette question est fournie par un théorème de M. Castelnuovo*):

Les équations que l'on peut résoudre d'une manière rationnelle sont caractérisées par ce que leurs genres p_n P_n (et par suite tous les autres genres) s'évanouissent.

Une question en quelque sorte successive à celle résolue par M. Castelnuovo, consiste à chercher toutes les équations $f(xyz) = 0$ que l'on peut résoudre à l'aide d'une seule racine carrée. Les genres de telles équations ne sont nullement déterminés, mais on peut supposer de les assigner d'avance. En se bornant à considérer des résolutions simples on sera donc amené à chercher les polynomes $f(xy)$ pour lesquels les genres de l'équation

$$z^2 - f(xy) = 0$$

prennent certaines valeurs données. Or nous montrerons ailleurs comment on peut aborder ce problème général. Nous nous bornerons ici à rappeler le résultat, déjà cité**), concernant le cas très simple où

*) „Sulle superficie di genere zero". Memorie della Societá italiana delle Scienze (dei XL) 1896.

**) „Sui piani doppi di genere uno" l. c.

il s'agit d'équations dont les genres p_n P_2 (et par suite aussi tous les autres) ont la valeur 1:

Les équations ayant les genres $p_n = P_2 = 1$ qui sont résolubles (simplement) à l'aide d'une seule racine carrée, peuvent se ramener à quatre types

$$z^2 - f(xy) = 0,$$

où f est un polynôme général du sixième degré, ou bien un polynôme du degré, 8, 10, 12 ayant des particularités déterminées.

17. À la résolution d'une équation

$$f(xyz) = 0$$

par des irrationalités données, on peut rattacher un problème arithmétique analogue à celui dont nous avons parlé dans le cas de deux inconnues, à savoir le problème d'assigner les irrationnelles numériques dont la résolution elle même vient à dépendre. C'est le problème qui sert de fondement au procédé de réduction par lequel on cherche de ramener la résolution d'une équation proposée à celle d'une autre équation renfermant un plus petit nombre d'inconnues.

Nous avons déjà fait à cet égard une simple remarque (n⁰ 15) ayant un certain degré de généralité. Nous nous bornerons ici à rappeler, en peu de mots, le résultat qui concerne la détermination des irrationnelles numériques dont vient à dépendre la résolution d'une équation

$$f(xyz) = 0$$

par des fonctions rationnelles (supposé qu'une telle résolution soit possible, c'est-à-dire que l'on ait $p_n = P_2 = 0$)*).

La question a été traitée d'abord par Clebsch, MM. Klein et Burkhardt, M. Nöther, à l'égard de bien de classes particulières d'équations $f = 0$. Or par un procédé de réduction on est toujours ramené à l'un de ces cas. De sorte que l'on arrive à la conclusion générale suivante:

La résolution rationnelle d'une équation $f(xyz) = 0$, supposée possible, se ramène, à l'aide de racines carrées ou cubiques (tout au plus), à la résolution analogue d'une certaine équation de la forme $z^2 = \varphi(xy)$, où le polynome φ a la degré 4 ou 6 en xy, ou le degré 2 en x et un degré quelconque en y. D'après cette réduction, elle s'effectue à l'aide des irrationalités définies par une des équations pour la bisection de fonctions abéliennes du genre 3 ou 4, ou respect. de fonctions hyperelliptiques dont le genre p est celui de φ. En ce dernier cas les

---

*) Voir dans ce même journal l'article: Enriques „Sulle irrazionalità . . .", Bd. 49.

irrationalités en question deviennent autant élevées que l'on veut, suivant la valeur de p.

Le théorème précédent donne lieu à des applications se rapportant à la résolution rationnelle de quelques équations qui renferment plus de trois inconnues. Encore, on est amené à de nouvelles questions tout-à-fait simples, qui demeurent pourtant sans réponse. Nous avons insisté sur celles-ci dans notre article cité du Bd. 49.

Bologne, Octobre 1897.