

## Strahlformen incompressibler reibungsloser Flüssigkeiten.

Auszüglih mitgetheilt aus den Abhandlungen der ung. Akad. der Wissenschaften

von

Dr. M. RÉTNY in Budapest.\*)

Im Anschluss an die Untersuchungen von Kirchhoff\*\*) sollen bei denselben Voraussetzungen neue Specialfälle von wirbelfreien Strahlbildungen incompressibler reibungsloser Flüssigkeiten beschrieben werden. Auch die Bezeichnungen von Kirchhoff halte ich fest; bezeichne also die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Strömungsebene mit  $x, y$ , — die Componenten der reciproken Geschwindigkeit in diesem Punkt mit  $\xi, \eta$ , — endlich mit  $\varphi = \text{const.}$  und  $\psi = \text{const.}$  die Gleichungen der in ihm sich schneidenden Niveau- resp. Strömungslinien; auch sei

$$(1) \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad w = \varphi + \psi i,$$

wo zwischen  $z, \zeta, w$  die Beziehung stattfindet

$$(2) \quad \zeta = \frac{dz}{dw}.$$

### § 1.

**Strom von endlicher Breite, der Querschnitt des Damms eine geradlinige Strecke.**

I. Zwischen den Bildebenen von  $\zeta$  und  $w$  möge die Gleichung bestehen:

$$(3) \quad \left( \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \right)^2 = k^2 (1 - e^w),$$

wo  $k$  reell und  $> 1$  ist. Mittelst dieser Gleichung wird das  $\zeta$ -Gebiet

\*) Die Abhandlung wurde vom Verfasser der math. phys. Classe der ung. Akad. der Wiss. am 11. December 1893 vorgelegt; ist erschienen im ung. Original in dem „Ertekezések a Matematikai Tudományok köréből“ 1894, Bd. XV, und erscheint in ausführlicher Uebersetzung in den Berichten aus Ungarn Bd. XII, pag. 144—194.

\*\*) Math. Phys. Mech. 1876, pag. 273—307.

(Fig. 1 b), begrenzt einerseits durch die concentrischen Kreisquadranten (34) und (55) mit Radien = 1 resp. =  $\infty$ , andererseits durch die un-

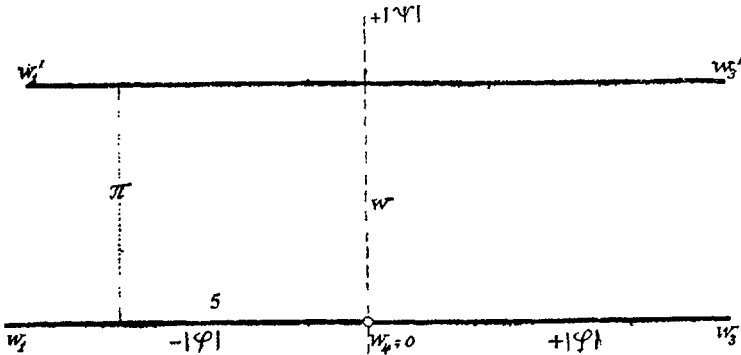


Fig. 1 a.

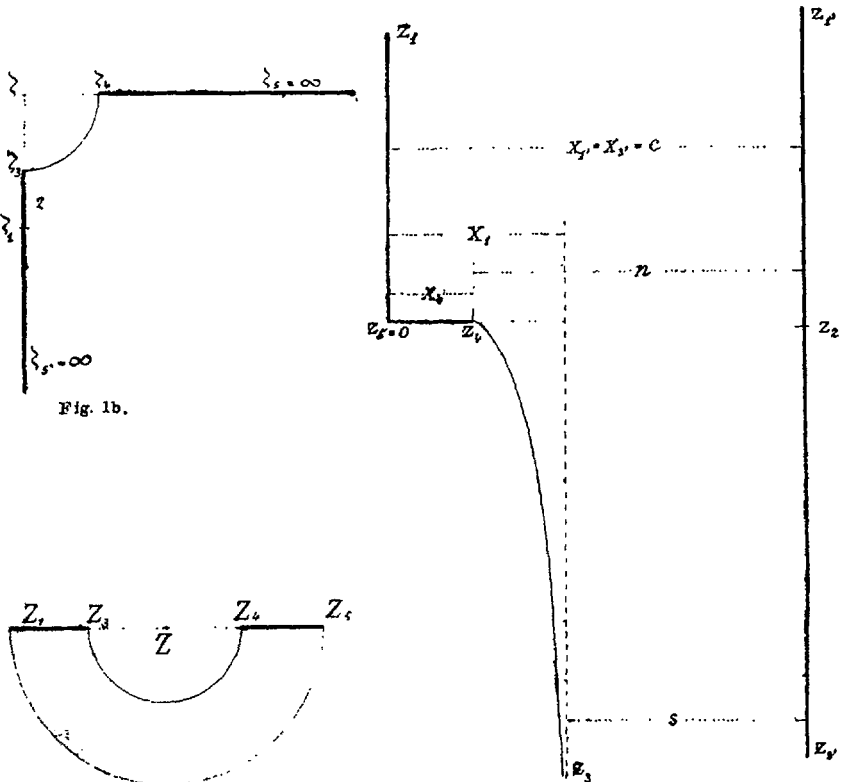


Fig. 1 b.

Fig. 1 c.

Fig. 1 d.

$(k = 2, c = \sqrt{3}, s = 1, x_4 = 0.34, n = 1.383.)$

endlichen Strahlentheile (45) und (53), in den kleinsten Theilen ähnlich und bei gewissen Festsetzungen eindeutig abgebildet auf das  $w$ -Gebiet

(Parallelstreifen, Fig. 1a), begrenzt durch die in beiden Richtungen unendlichen Geraden  $\psi = 0$  und  $\psi = \pi$ ; es entsprechen sich die Punkte

$$(4) \quad \begin{aligned} w_1 &= -\infty, & w_4 &= 0, & w_3 &= +\infty, \\ \xi_1 &= -i\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2}}, & \xi_4 &= +1, & \xi_3 &= -i. \end{aligned}$$

Durch die Gleichung

$$\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2 = k^2(1-e^w)$$

wird nämlich das  $Z$ -Gebiet (Fig. 1c) begrenzt durch concentrische Halbkreise (34) und (55) mit Radien  $= 1$  resp.  $= \infty$  und durch die unendlichen Strahlentheile (45) und (53) auf das genannte  $w$ -Gebiet conform und eindeutig abgebildet; während durch die Gleichung  $Z = \xi^2$  einem jeden Punkt des Quadranten in  $\xi$  ein einziger Punkt der Halbebene  $Z$  zugeordnet wird.

Umgekehrt wird einem jeden Punkt des  $w$ -Gebietes ein einziger Punkt des  $\xi$ -Gebietes zugeordnet mittelst der Gleichungen

$$(5) \quad u = k\sqrt{1-e^w}, \quad \xi = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}},$$

(die mit der Gleichung (3) äquivalent sind) wenn wir festsetzen, dass

$$w = -\infty, \quad u = k, \quad \xi = -i\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

einander zugeordnete Punkte sind; dadurch sind nämlich die Wurzelzeichen in diesen Punkten, daher im ganzen Gebiet eindeutig bestimmt.

Die Grenzen des  $z$ -Gebietes (Fig. 1d) construiren wir mit Hilfe des aus (2) sich ergebenden Integrals

$$z = \int_1^u \xi \frac{dw}{du} du$$

d. i. (zufolge (5)) aus

$$(6) \quad z = 2 \int_1^u \frac{u^2 + u}{u^2 - k^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

wo demnach dem Anfangspunkt  $z = 0$  der an der Grenze gelegene Punkt  $u = 1$  des  $u$ -Gebietes zugeordnet ist; hier ist  $\xi = \infty$ , also die Geschwindigkeit  $= 0$ .

Die Ausführung der Rechnungen ergibt das folgende Resultat:

Die Flüssigkeit strömt (Fig. 1d)\*) aus der Unendlichkeit zwischen

\*) Die Construction der Strömungslinien in den Figuren 1—8 wurde (mit Ausnahme der Fig. 6) von Herrn Ingenieur Josef Beke in Budapest nach

zwei der  $y$ -Axe parallelen Ufern in Richtung der negativen  $y$ -Axe mit der Geschwindigkeit  $\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; die Breite des Canals ist  $\pi\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Das eine Ufer ist eine zur  $y$ -Axe parallele in beiden Richtungen unendliche Gerade. Das andere Ufer wird von den Schenkeln eines rechten Winkels gebildet: der eine Schenkel ist die ganze positive  $y$ -Axe, der zweite die von  $x=0$  an bis  $x=x_4$  reichende Strecke der positiven Axe, die als ein Damm aufgefasst werden kann. Die Flüssigkeit strömt hier durch eine Oeffnung von der Breite

$$x_1 - x_4 = \pi + \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \arccos \frac{1}{k}$$

in ruhende Flüssigkeit, und bildet einen Halbstrahl, dessen Breite im Unendlichen  $= \pi$  ist. Bezeichnet man demnach die Breiten des Canals, der Oeffnung und dieses Strahls im Unendlichen mit  $c$ ,  $n$ ,  $s$ , so hat man

$$(7) \quad c : n : s = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1 + \frac{2 \arccos \frac{1}{k}}{\pi(k^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right) : 1.$$

Die Grösse  $k$  bestimmt das Verhältniss der Canalbreite zur Oeffnung, wie auch umgekehrt dieses Verhältniss die Grösse  $k$  bestimmt. Die Formel (7) steht aber in Widerspruch mit einem von Herrn F. Auerbach ohne Beweis aufgestellten Zusammenhang, nach welchem sogar in einem (sub XI, pag. 15 zu beschreibenden) allgemeineren Fall  $n$  das harmonische Mittel zwischen  $c$  und  $s$  sein sollte.\*)

Was schliesslich die Form des Strahls anbelangt, so ist ihre freie Grenze in parametrischer Form durch folgende Gleichungen gegeben:

$$x = z_4 + \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \left( \arccos \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \arccos \frac{1}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

$$y = -2 \cdot l \cdot (v + (1+v^2)^{\frac{1}{2}}) + \frac{k}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot l \cdot \frac{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1-k^{-2})^{\frac{1}{2}}}{(1+v^2)^{\frac{1}{2}} + v(1-k^{-2})^{\frac{1}{2}}},$$

wo

$$z_4 = \pi \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} - \pi - \frac{2}{(k^2-1)^{\frac{1}{2}}} \arccos \frac{1}{k}.$$

Wächst  $v$  von 0 ins Unendliche, so beschreiben diese Gleichungen die freie Grenze der Flüssigkeit.

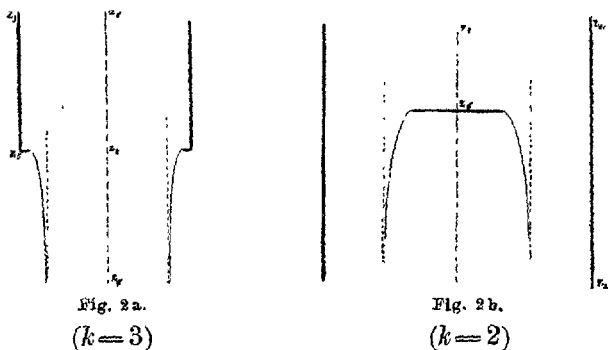
---

grafischer Methode ausgeführt, für welche Freundlichkeit ich ihm auch hier meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Die übrigen Figuren (auch Fig. 6) sind nur als Skizzen zu betrachten, die zur Illustration des Textes dienen sollen.

\*) Winkelmann, Handbuch der Physik pag. 419. Bd. I.

II. Mittelst Spiegelung des  $z$ -Gebietes an der Geraden  $z_1 z_2 z_3$  erhält man den Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem Canal durch eine in der Mitte des Damms angebrachte Oeffnung von beliebiger Grösse (Fig. 2a).

Der Specialfall  $k = 1$  liefert  $c : n = \infty$ ; dieser Grenzfall ist der



von Kirchhoff beschriebene Ausfluss durch eine Oeffnung angebracht an einer unendlichen Wand. Wir haben in Folge von

$$\arccos \frac{1}{k} = \arcsin \frac{(k^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k}$$

in diesem Grenzfall

$$\frac{s}{n} = \frac{\pi}{2 + \pi}$$

in Uebereinstimmung mit Kirchhoff.

III. Mittelst Spiegelung des  $z$ -Gebietes an der  $y$ -Axe erhält man hingegen (Fig. 2b) einen Strom mit zwei parallelen Ufern, in dessen Mitte senkrecht zu diesen eine unbewegliche Wand von beliebiger Breite angebracht ist. Bezeichnet man die Breiten des Stroms, dieser Wand, und der ruhenden Flüssigkeit im Unendlichen, mit  $C, W, R$ , so hat man

$$C : R : W = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} : \frac{x_1 - \pi}{\pi} : \frac{x_2}{\pi},$$

d. i.

$$C : R : W = (k+1)^{\frac{1}{2}} : \left((k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}\right) : \left((k+1)^{\frac{1}{2}} - (k-1)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{2 \arccos \frac{1}{k}}{\pi (k+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für den Grenzfall  $\lim. k = \infty$  findet man

$$C : R : W = k^2 : k : \frac{1}{2}.$$

Ist die Breite des Stroms  $C$  endlich und die Wand  $W$  unendlich schmal, so ist demnach im Unendlichen die Breite  $R$  der ruhenden Flüssigkeit unendlich klein im Vergleich zur Stromesbreite, jedoch unendlich gross in Vergleich zu jener der Querwand.

Auch dieser Grenzfall wurde von Kirchhoff behandelt: die Breite der Querwand ist da endlich, hingegen  $C$  und  $R = \infty$ .

#### IV. Durch fortgesetzte Spiegelung des $z$ -Gebietes (in Fig. 2b)

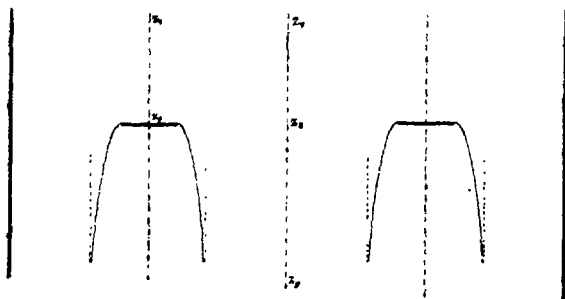


Fig. 2c.  
( $k=2$ )

erhält man die in Fig. 2c dargestellte Strömung. Die Anzahl der äquidistanten Querwände von gleicher Grösse ist beliebig.

### § 2.

Der Querschnitt des Damms eine geradlinige Strecke (Fortsetzung).

V. Die im Eingang des § 1 stehende Gleichung (3) soll verallgemeinert werden durch die Substitution

$$\frac{k_0^2(\alpha^2 - e^w)}{\beta^2 - e^w}$$

an Stelle von  $k^2(1 - e^w)$ . Man hat dann an Stelle der Gleichungen (5) die folgenden:

$$(9) \quad \xi = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad u = k_0 \sqrt{\frac{\alpha^2 - e^w}{\beta^2 - e^w}};$$

daher ist

$$(9a) \quad e^w = \beta^2 \frac{u^2 - k_1^2}{u^2 - k_0^2},$$

wo  $k_1$  die Grösse  $\frac{k_0 \alpha}{\beta}$  bedeutet. Dadurch sind die in den Fig. 1 dargestellten  $\xi$  und  $w$ -Gebiete bei gehöriger Festsetzung bezüglich der Vorzeichen der Wurzelgrössen eindeutig aufeinander bezogen, so dass die Punkte coordinirt sind:

$$w = -\infty, \quad w = +\infty,$$

$$\xi = -i\sqrt{\frac{k_1+1}{k_1-1}}, \quad \xi = -i\sqrt{\frac{k_0+1}{k_0-1}}.$$

Aus (9a) folgt

$$\frac{dw}{du} = \frac{2u}{u^2 - k_1^2} - \frac{2u}{u^2 - k_0^2};$$

man hat daher

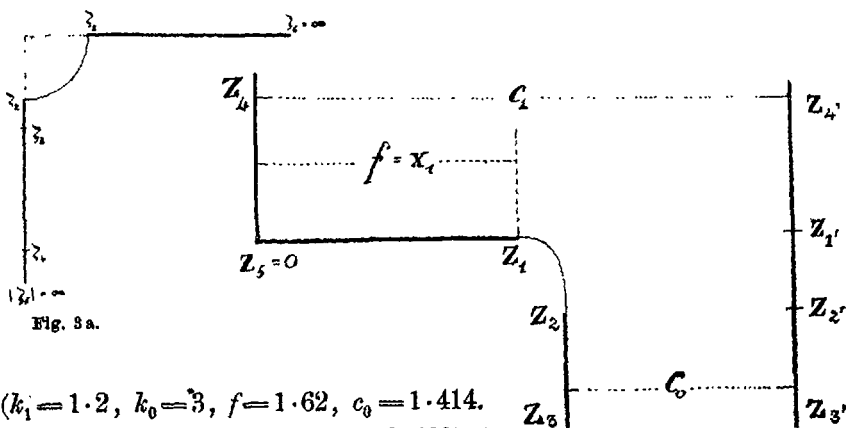
$$(9b) \quad \frac{dz}{du} = \xi \frac{dw}{du} = \frac{2u(1+u)}{(u^2 - k_1^2)\sqrt{1-u^2}} - \frac{2u(1+u)}{(u^2 - k_0^2)\sqrt{1-u^2}}.$$

Es besteht demnach  $\frac{dz}{du}$  aus zwei additiven Theilen von derselben Form wie in § 1. Zur Bestimmung des  $z$ -Gebietes setzen wir fest:

$$k_0 > k_1 > 1.$$

Es ergibt sich bei dieser Festsetzung nach der bekannten Methode des Umlaufs der Grenzen des abzubildenden Gebietes das folgende Resultat:

Die Flüssigkeit (Fig. 3b) strömt aus der Unendlichkeit mit der Geschwindigkeit  $\left(\frac{k_1-1}{k_1+1}\right)^{\frac{1}{2}}$  in einem Canal zwischen zwei parallelen Wänden 40 und 4'1', welcher im Querschnitt 011' abgeschlossen ist



$$(k_1 = 1.2, k_0 = 3, f = 1.62, c_0 = 1.414.$$

$$c_2 = 3.303, x_3 = 1.904, y_2 = 0.473).$$

Fig. 3b.

durch eine Querwand 01 und eine Oeffnung 11'; die Wand 4'1' des Canals setzt sich in unveränderter Richtung fort und bildet mit der zu ihr parallelen Wand 23 einen zweiten schmälern Canal. Die Flüssigkeit strömt aus dem ersten Canal in den zweiten und bietet inzwischen auf der einen Seite eine freie Grenze dar.

Bezeichnet man die Breiten der Canäle und der Oeffnung mit  $C_1, C_0, O$ , so bestehen die Relationen

$$(10) \quad C_1 : C_0 : O = \left(\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{k_0 + 1}{k_0 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} : \frac{x_1}{\pi};$$

wo der Werth von  $x_1$  gegeben ist durch die Formel:

$$(10a) \quad x_1 = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \pi k_j + 2 \arctan (k_j^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Sind die Verhältnisse  $C_1 : C_0 : O$  gegeben, so sind auch  $k_1$  und  $k_0$  festgesetzt; die Strömung ist daher nur dann möglich, wenn die Projection der freien Grenze auf die Canalwand von der Länge ist:

$$(11) \quad |y_2| = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^j k_j}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k_j - (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{k_j + (k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Man findet ferner als Gleichungen der freien Grenze:

$$(12) \quad x = x_1 + 2 \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^{j+1}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \arctan \frac{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \arctan \frac{1}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

$$g = \sum_{j=0,1} \frac{(-1)^j k_j}{(k_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} - v(1 - k_j^{-2})^{\frac{1}{2}}}{(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} + v(1 - k_j^{-2})^{\frac{1}{2}}}.$$

VI. Auch diese Strömung lässt sich durch Spiegelung mannigfach gestalten. Man erhält z. B. durch Spiegelung an der Wand 4'3' den freien Ausfluss aus einem an seinem Ende verengten Canal in einen dünneren einfachen Canal; die beiden Canäle haben eine gemeinsame Axe; etc.

VII. Ich gehe über zur Interpretation derselben Abbildungsformeln, wenn statt  $k_0$  und  $\beta$  imaginäres gesetzt wird; an Stelle von (9), (9a), etc. kommen dann, wenn wir mit  $k_0$  und  $\beta$  die absoluten Werthe bezeichnen:

$$(13) \quad \xi = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad e^w = \beta^2 \frac{u^2 - k_1^2}{u^2 + k_0^2},$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{2(k_1^2 + k_0^2)u}{(u^2 + k_0^2)(u^2 - k_1^2)},$$

$$z = \int_1^u \xi \frac{dw}{du} du = \int_1^u \left( \frac{1}{u^2 - k_1^2} - \frac{1}{u^2 + k_0^2} \right) \frac{2u(1+u) du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Dem Punkt  $w = -\infty$  entspricht demnach auf der  $\xi$ -Ebene der Punkt

$$\xi = -i \left( \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}};$$

nehmen wir auch hier  $k_1 > 1$  an, so ist die Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen parallel zur  $y$ -Axe.



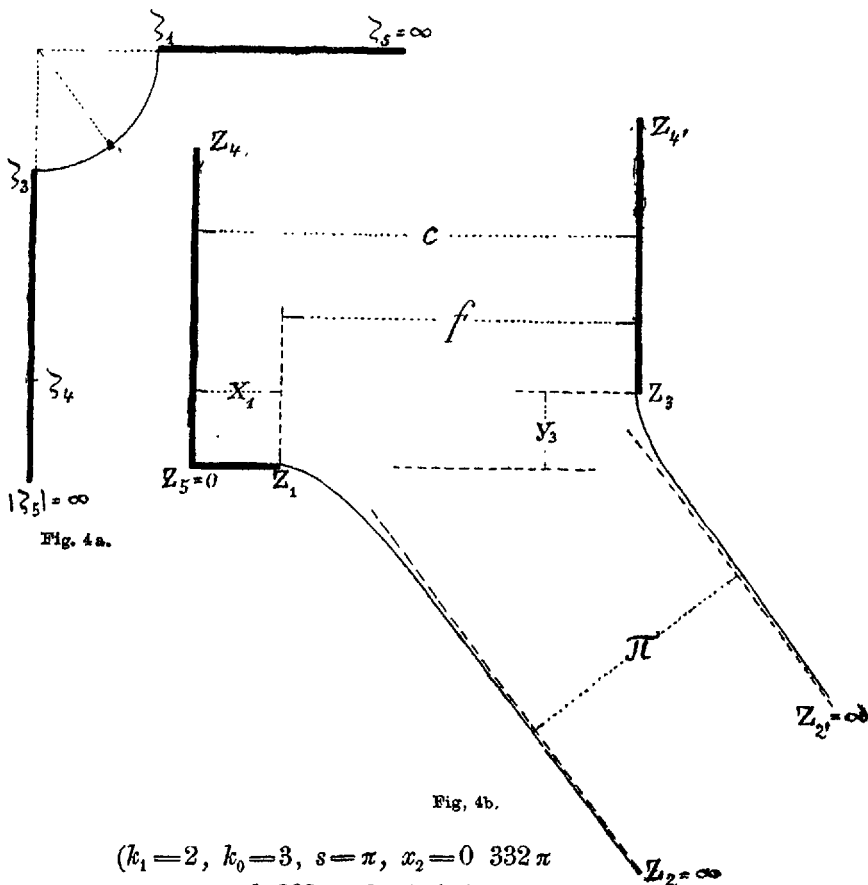
Dem Punkte  $w = +\infty$  hingegen entspricht auf der  $\xi$ -Ebene

$$\xi = \sqrt{\frac{1 - k_0 i}{1 + k_0 i}}$$

da  $k_0$  reell, daher  $|\xi| = 1$  ist, so endet der Strom in einem Strahl, dessen Grenzlinien zur Asymptote eine gegen die  $y$ -Axe geneigte Gerade haben.

Wir construiren die Grenzen des  $z$ -Gebietes bei der Annahme, dass die Grenzen des  $w$ -Gebietes die parallelen Geraden  $\psi = \pi$  und  $\psi = 2\pi$  sind.

Die Grenzen des Stromgebietes sind dann, wie folgt, festgestellt: Die Flüssigkeit strömt aus der Unendlichkeit zwischen zwei parallelen



$$(k_1 = 2, k_0 = 3, s = \pi, x_2 = 0.332\pi, y_3 = 0.283\pi, f = 1.4\pi).$$

Wänden 45, 4'3, geht bei der Querwand 51 vorüber, und strömt gegen die Oeffnung 13, wo sie in eine ruhende Flüssigkeit ausfließt in einem Strahl mit den Grenzen  $12\infty$  und  $32'\infty'$ .

Die Breite des Strahls im Unendlichen ist  $\pi$ . Die Länge der Querwand 51 ist

$$\begin{aligned}
 (14) \quad z_1 = x_1 &= \int_1^0 \xi \frac{dw}{du} du \\
 &= \frac{1}{(k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \pi k_1 + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (k_1^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \pi k_0 + 1 \cdot \frac{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1} \right).
 \end{aligned}$$

Die Breite des Canals ist

$$c = \pi \left( \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right)^{\frac{1}{2}};$$

und die Höhe des Endpunktes 3 oberhalb der Querwand 51 ist

$$y_3 = \int_1^{\infty} \xi \frac{dw}{du} du,$$

bei welcher Integration  $u$  reelle Werthe durchläuft, jedoch mit Umgehung des Punktes  $k_1$ , da in diesem  $\frac{dw}{du} = \infty$  ist; man findet

$$\begin{aligned}
 (15) \quad y_3 &= \frac{\pi}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2k_0}{(k_0^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{l.} \left( (k_1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - k_0 \right) \\
 &\quad + \frac{2k_1}{(k_1^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{l.} \left( k_1 + (k_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen der freien Grenze 12 $\infty$  wird in parametrischer Form

$$\begin{aligned}
 (16) \quad x &= x_1 + \int_0^v \left( \frac{1}{v_1^2 + k_1^2} - \frac{1}{v^2 - k_0^2} \right) \frac{2v dv}{\sqrt{1 + v^2}}, \\
 y &= \int_0^v \left( \frac{1}{v^2 - k_0^2} - \frac{1}{v_1^2 + k_1^2} \right) \frac{2v^2 dv}{\sqrt{1 + v^2}},
 \end{aligned}$$

bei welchen Integrationen  $v$  reelle Werthe durchläuft. Die Gleichungen der freien Grenze 32' $\infty'$  sind bei derselben Bemerkung

$$\begin{aligned}
 (17) \quad x &= c + \int_{\infty}^v \left( \frac{1}{v^2 + k_1^2} - \frac{1}{v^2 - k_0^2} \right) \frac{2v dv}{\sqrt{1 + v^2}}, \\
 y &= y_3 + \int_{\infty}^v \left( \frac{k_1^2}{v^2 + k_1^2} + \frac{k_0^2}{v^2 - k_0^2} \right) \frac{2dv}{\sqrt{1 + v^2}}.
 \end{aligned}$$

Die ausführlichen Rechnungen finden sich in der Originalabhandlung,

wo  $y_3$  auch auf einem zweiten Integrationsweg berechnet ist. Man sieht leicht ein, dass  $y_3$  bei gehöriger Wahl von  $k_0$  und  $k_1$  auch negativ ausfallen kann.

Bei Einführung eines Vergrößerungscoefficienten  $a$  erleiden die drei Grössen  $c$ ,  $x_1$  und  $y_3$  eine  $a$ -fache Vergrößerung, und die Formeln enthalten ebenfalls drei zwischen gewissen Grenzen willkürliche Werthe  $k_0$ ,  $k_1$  und  $a$ . Mit der Lösung der Aufgabe, welches die Werthe der Letzteren bei beliebig gegebenen  $c$ ,  $x_1$ ,  $y_3$  sind, habe ich mich nicht befasst.

VIII. Mittelst Spiegelung an der Linie  $z_4 z_5$  erhält man (Fig. 5) die Zerlegung eines aus einem Canal von endlicher Breite ausfliessenden

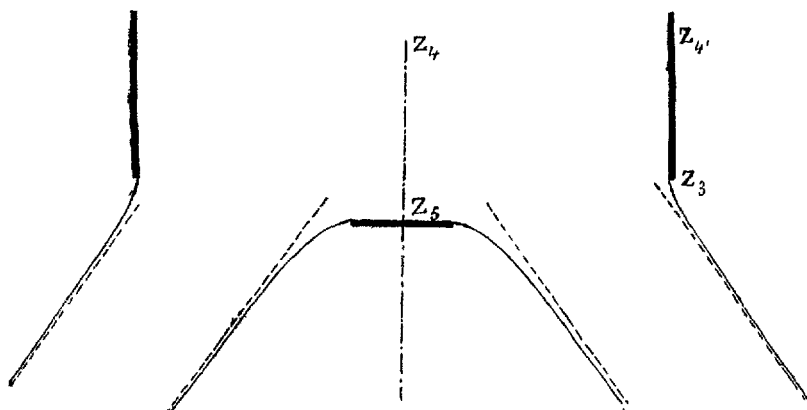


Fig. 5.

Strahls in zwei Strahlen in Folge einer festen Querwand, die in der Mitte des Canals senkrecht zur Axe angebracht ist.

Die Wand  $z_5$  kann bei gehörigen Werthen von  $k_0$  und  $k_1$  auch in's Innere des Canals fallen.

IX. Ohne mich in ausführliche Rechnungen einzulassen, füge ich im Anschluss an die eben beschriebene die folgende Abbildung bei.

Es seien in den Gleichungen

$$\xi = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad e^w = \beta^2 \frac{u^2 + k_1^2}{u^2 + k_0^2}$$

die Grössen  $\beta$ ,  $k_0$ ,  $k_1$  reell; dann sind

$$w = -\infty, \quad u = -k_1 i, \quad \xi = \sqrt{\frac{1-k_1 i}{1+k_1 i}},$$

$$w = +\infty, \quad u = -k_0 i, \quad \xi = \sqrt{\frac{1-k_0 i}{1+k_0 i}},$$

$$w = 1. \frac{\beta^2 k_1^2}{k_0^2}, \quad u = 0, \quad \xi = 1$$

zusammengehörige Werthe, und zwar fallen die so definirten  $\xi$ -Punkte auf den Einheitskreis (Fig. 6a). Daraus ergibt sich als Skizze der Strömung die Fig. 6b.

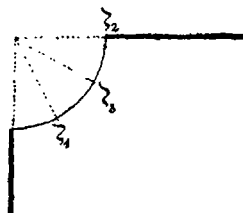


Fig. 6 a.

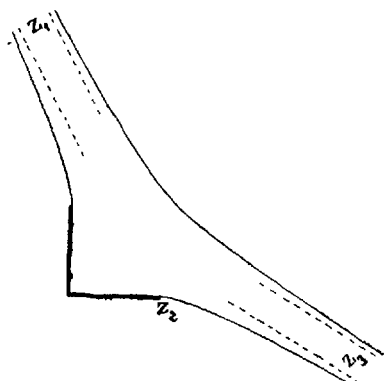


Fig. 6 b.

### § 3.

Der Querschnitt des Damms ist von der Winkelform  $\perp$ .

X. Die Grenzen des  $\xi$ -Gebietes (Fig. 7b) seien: Ein Halbkreis, dessen Endpunkte 3 und 2 auf der  $\xi$ -Axe liegen; die aus den Punkten 3 und 2 in's Unendliche laufenden Radien des Kreises; die im Unendlichen gelegenen Quadranten  $BB$ ; endlich die doppelt zu zählenden Radientheile  $BA$  resp.  $AB$ , deren Endpunkte  $B, B$  im Unendlichen sind, während der Punkt  $A$  sich vom Mittelpunkt in einer Entfernung  $> 1$  befindet.

Dieses  $\xi$ -Gebiet ist auf einen Parallelstreifen von der Breite  $2\pi$  abzubilden (Fig. 7a), so dass drei beliebige Punkte der Grenzen sich gegenseitig entsprechen. Die Gleichung (3) liefert schon eine solche Abbildung nur bei specieller Zuordnung der Randpunkte. Um die

Aufgabe allgemein zu lösen, haben wir nur zu setzen anstatt  $e^{\frac{w}{2}}$  die linear-gebrochene Function

$$\frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}},$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  zu bestimmende Constanten sind. Wir kommen so auf die Abbildungsformel

$$(18) \quad \xi = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad u = k \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{2}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{2}}} \right)^2}.$$

Die daraus entspringenden mannigfaltigen Strömungen lassen sich leicht skizziren, man hat nur den Punkten  $-\infty, 0, +\infty$  des  $w$ -Gebietes beliebige, nur in demselben Sinne aufeinander folgende, Randpunkte des  $\xi$ -Gebietes zuzuordnen.

Man führe ein  $v$ -Gebiet ein mittelst der Substitution:

$$(19) \quad v = \frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{\delta}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{\delta}}},$$

d. i.

$$e^{\frac{w}{\delta}} = \frac{-\alpha + \gamma v}{\beta - \delta v};$$

aus ihr folgt

$$\frac{dw}{dv} = 2 \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\alpha - \gamma v)(\beta - \delta v)}.$$

Mit Beziehung von  $\xi = \frac{dz}{dw}$  hat man daher

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha - \gamma v)(\beta - \delta v)},$$

d. i.

$$(20) \quad \frac{dz}{dv} = \frac{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\alpha - \gamma v)(\beta - \delta v)} \frac{1 + k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2 + k^2v^2}}.$$

Es ist demnach  $z$  im Allgemeinen ein elliptisches Integral von  $v$ .

Wir berechnen ausführlich bloss die Fälle, wo bei reellem positivem  $\alpha_0$  entweder

$$\text{I.} \quad \begin{array}{lll} \xi = -\alpha_0, & \xi = -1, & \xi = +1. \\ w = -\infty, & w = +\infty, & w = 0 \end{array}$$

oder

$$\text{II.} \quad \begin{array}{lll} \xi = +\alpha_0, & \xi = -1, & \xi = +1, \\ w = -\infty, & w = \infty, & w = 0 \end{array}$$

zugeordnete Punkte sind. Es entspringen aus

$$u = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \quad v^2 = 1 - \frac{u^2}{k^2} = \left( \frac{\alpha + \beta e^{\frac{w}{\delta}}}{\gamma + \delta e^{\frac{w}{\delta}}} \right)^2$$

die folgenden Bestimmungsgleichungen für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$1 - \frac{1}{k^2} \left( \frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0^2 + 1} \right)^2 = \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^2,$$

$$1 = \left( \frac{\beta}{\delta} \right)^2,$$

$$1 = \left( \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} \right)^2.$$

Den Gleichungen geschieht genüge, wenn entweder

$$a) \quad \alpha = -2a, \quad \beta = 1 + a, \quad \delta = 1 + a, \quad \gamma = -2;$$

oder

$$b) \quad \alpha = 2a, \quad \beta = 1 - a, \quad \delta = -1 + a, \quad \gamma = 2.$$

Im ersten Falle ist  $\frac{\beta}{\gamma} = +1$ , im zweiten  $= -1$ .

Der Werth von  $\frac{\alpha}{\gamma}$  ist in beiden Fällen  $= a$ .

Der Werth von  $\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$  ist im ersten Fall  $= -1$ , im zweiten  $= +1$ .

Im Falle a) hat man

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -2a(1+a) + 2(1+a) = 2(1-a^2).$$

Im Falle b)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 2a(a-1) - 2(1-a) = 2(a^2-1),$$

und in derselben Reihenfolge

$$(20a) \quad \frac{dz}{dv} = \frac{2(1-a)}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}};$$

$$(20b) \quad \frac{dz}{dv} = \frac{2(1+a)}{(a-v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}.$$

Diese Gleichungen gehen in einander über, wenn man statt  $v$ ,  $a$  setzt  $-v$ ,  $-a$ .

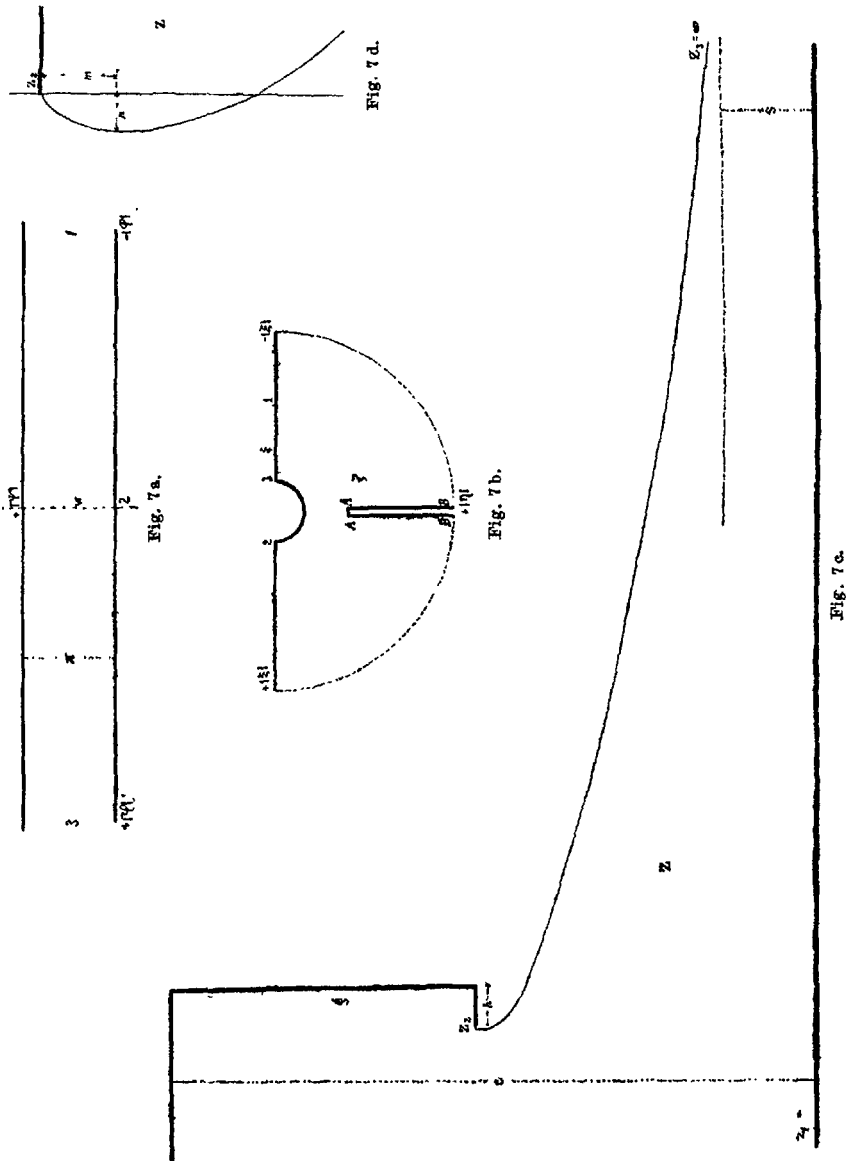
Zur ersteren Gleichung (Fall I) gehört die Substitution:

$$(19a) \quad v = \frac{-2a + (1+a)e^{\frac{w}{2}}}{-2 + (1+a)e^{\frac{w}{2}}};$$

zur zweiten (Fall II)

$$(19b) \quad v = \frac{2a + (1-a)e^{\frac{w}{2}}}{2 + (-1+a)e^{\frac{w}{2}}}.$$

XI. Im ersten Fall strömt die Flüssigkeit (Fig. 7) in einem Canal von der Breite  $c$  aus der Unendlichkeit gegen einen Damm von der Breite  $g$ , der mit einer Einbiegung von der Länge  $h$  versehen ist,



und tritt dann als freier Strahl zum Vorschein; die freie Grenze hat zur Asymptote eine zur entgegengesetzten Wand parallele Gerade; letztere gerade Wand reicht in entgegengesetzten Richtungen in's Unendliche.

Zu berechnen sind  $c$ ,  $g$ ,  $h$  und die Dicke des Strahls im Unendlichen  $s$ .

Man hat

$$\begin{aligned} s &= 2\pi, \\ c &= 2\pi a_0. \end{aligned}$$

Die Breite des  $w$ -Streifens ist nämlich  $= s = 2\pi$ , und die Geschwindigkeit der Strömung hat im unendlich entfernten Querschnitt ( $w = -\infty$ ) des Canals den Werth  $\frac{1}{a_0}$ .

Zur Berechnung von  $g$  und  $h$  setze man

$$(20a) \quad \frac{dz}{dv} = \frac{2(1-a)}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2+k^2v^2}},$$

und

$$(21) \quad f(v) = \frac{2(1-a):k}{(v-a)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}},$$

wo gesetzt ist

$$\lambda^2 = \frac{k^2-1}{k^2}.$$

Da im Bereich der Breite  $g$  die Ungleichheiten Bestand haben:

$$-\lambda < v < +\lambda; \quad \lambda < 1$$

demnach

$$v^2 < \lambda^2 < 1,$$

so ist  $f(v)$  überall imaginär. Daher ist

$$(22) \quad g = \frac{2(1-a)}{k} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{(a-v)(1-v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{\lambda^2-v^2}} dv,$$

wo die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Ebenso ist in allen Punkten des Einsprungs von der Tiefe  $h$

$$\lambda < -v < 1,$$

daher  $f(v)$  überall reell und demzufolge

$$(23) \quad h = \frac{2(1-a)}{k} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{(a+v)(1+v)} \frac{1+k\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{v^2-\lambda^2}} dv.$$

Die Differentialgleichungen der freien Grenze sind endlich:

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= \frac{2(1-a)}{k} \frac{1}{(v-a)(1-v)\sqrt{v^2-\lambda^2}}, \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{2(1-a)}{k} \frac{\sqrt{v^2-1}}{(v-a)(1-v)\sqrt{v^2-\lambda^2}}, \end{aligned}$$

wo das Zahlengebiet von  $v$  gegeben ist durch

$$1 \leq v^2 \leq \infty,$$



XII. Bezüglich der Reduction von  $g$  und  $h$  auf Normalintegrale verweise ich auf die oben angeführte Publication. Ich unterlasse auch die nähere Beschreibung des in Fig. 8 skizzirten Falles, welcher der An-

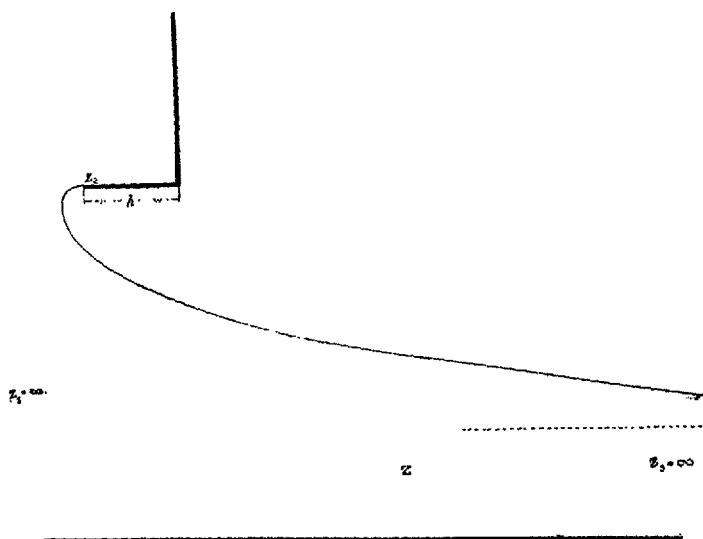


Fig. 8.

nahme  $a = \lambda$  entspricht und übergehe zur Beschreibung des in X skizzirten zweiten Falles. Die Flüssigkeit strömt aus der Unendlichkeit in einem Canal von der Breite  $c$  (Fig. 9) gegen eine Wand von der Länge  $g > c$ , die mit den Wänden des Canals einen rechten Winkel einschliesst und die Fortsetzung der einen Wand bildet; die Wand  $g$  ist ein Theil des Dammes, der zweite Theil läuft parallel den Wänden des Canals und reicht in die Unendlichkeit. Die Berechnung der Dimensionen der Strömung, wie auch die der freien Grenzen finden sich a. a. O.

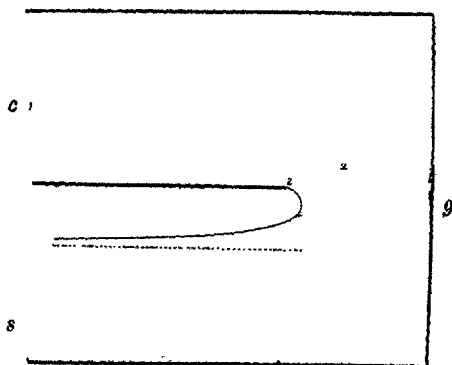


Fig. 9.

Es versteht sich von selbst, dass man durch Spiegelung aus den bisher beschriebenen, wie auch aus den im folgenden Paragraphen zu beschreibenden Strömungen scheinbar andere Formen ableiten kann.

## § 4.

## Allgemeinere Strömungsformen mit freier Grenze.

XIII. Man erhält in gewisser Hinsicht eine Zusammensetzung von einfachen Strömungen auf folgende Weise:

Es mögen

$$\xi_j = f_j(\omega); \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

in beschränkten Gebieten im Innern überall isogonale Abbildungen darstellen, bei welchen einem speciellen Stücke der Geraden  $\psi = 0$  der  $w$ -Ebene in den  $\xi_j$ -Ebenen, für sämtliche  $j$ , Kreisbögen mit dem Radius 1 entsprechen; dann liefert die Beziehung

$$\xi = \prod_{j=1}^m \xi_j$$

eine im Innern des schmalsten der  $w$ -Streifen überall isogonale Abbildung der Art, dass die Beziehung

$$z = \int \xi dw$$

eine Strömung mit freier Grenze beschreibt.

Es seien insbesondere  $\varphi_j$  reelle,  $k_j$  und  $n_j$  positive Zahlen, und zwar  $n_j < 1$ . Es seien ferner

$$U_j = \frac{1 + u_j}{1 - u_j}; \quad u_j = k_j (e^{\varphi_j} - e^w)^{\frac{1}{2}},$$

$$\xi = \prod_{j=1}^m U_j^{n_j},$$

wo  $\Pi$  das Symbol der Multiplication bedeutet.

Wenn keines der  $k_j$  kleiner ist als 1, und keines der  $\varphi_j$  kleiner als 0, so erhalten wir jedenfalls eine Strömung mit freier Grenze, wenn wir die Abbildung der  $\xi$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene, auf den zwischen  $\psi = 0$  und  $\psi = h$  befindlichen Streifen beschränken; dabei  $h$  so bestimmen, dass im Innern des Streifens kein Punkt sich befindet, in welchem  $\frac{dz}{dw} = 0$  oder  $\infty$  wird.

Da nämlich keiner der Factoren  $U_j^{n_j}$ , dem absoluten Betrag nach,  $< 1$  wird, so ist auch das Product aller, nämlich  $\xi > 1$ . Da ferner sämtliche  $u_j$  imaginär werden, wenn  $w$  über einen gewissen positiven Werth  $w_0$  hinaus wächst, so werden auch sämtliche  $U_j$ , daher auch  $\xi$  gleich der complexen Einheit. Jenem Theil der Geraden  $\psi = 0$ , auf welchem  $\varphi > w_0$  ist, entspricht daher auf der Strömungslinie eine freie Grenze; denn auf dieser Linie ist die Geschwindigkeit, wie soeben

gezeigt wurde,  $= 1$ , während sie im Innern der Strömungsebene überall  $< 1$  ist. Unendlich kann  $\xi$  nur in den Punkten werden, wo

$$u_j = 1, \text{ d. i. } e^w = e^{\varphi_j} = \frac{1}{k_j^2}$$

wird; hier wie auch dort, wo  $\frac{dz}{dw} = 0$  oder  $= \infty$  wird, müssen sich feste Wände befinden.

Die Bedingung, dass keiner der  $k_j$  kleiner sei als 1, und keines der  $e_j$  kleiner als 0, ist aber keinesfalls eine nothwendige.

Die Strömung wird am einfachsten, wenn sämtliche  $\varphi_j = 0$  werden, und

$$n_1 + n_2 + \dots + n_m = 1$$

stattfindet; die Strömungsebene wird in diesem Fall durch Figur 10b dargestellt; die Seitenanzahl des Dammpolygons ist  $= m$ ; die Grössen der Winkel werden durch die Exponenten  $n_j$ , die Seiten durch die

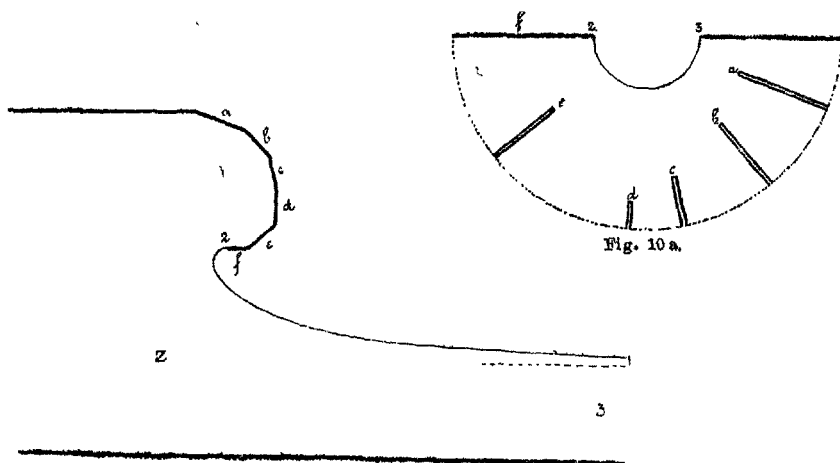


Fig. 10 b.

Werthe von  $n_j$  und  $k_j$  bestimmt. Die Geschwindigkeit wird  $= 0$  in allen Ecken des Polygons, während sie sich auf den Seiten continuirlich ändert (Fig. 10a). Der Uebergang von Damm-Polygon auf stetig gekrümmte Damm-Curven ist demzufolge auf diesem Weg nicht statthaft.

1. Als Beispiel zur Zusammensetzung von einfachen Strömungen diene

$$\xi = \sqrt{\frac{1+k_1u}{1-k_1u}} \sqrt{\frac{1+k_2u}{1-k_2u}},$$

$$u = \sqrt{1-e^w}, \quad k_1 > k_2 > 1.$$

Die  $w$ -Ebene sei der Parallelstreifen zwischen  $\psi = 0$  und  $\psi = \pi$ .

Die einzelnen

$$\xi_j = \sqrt{\frac{1+k_j u}{1-k_j u}} \quad (j=1, 2)$$

werden durch Fig. 1 b und 11 a<sub>1</sub>, daher die aus ihnen entspringende  $\xi$ -Ebene durch Fig. 7 dargestellt. Die Abbildungsformel und demzufolge auch die Strömung selbst ist enthalten in der im vorigen Paragraphen zu Grunde liegenden. Ich unterdrücke den Beweis, und füge nur hinzu, dass dies auch dann zutreffen kann, wenn  $k_1$  und  $k_2$  complex conjugirt sind; auch kann das Eine von ihnen  $< 1$ , zugleich muss aber das Andere  $> 1$  sein.

2. Als zweites Beispiel sei angeführt

$$\xi = \sqrt{\frac{1+k_1 u}{1-k_1 u}} \sqrt{\frac{1+k_2 u}{1-k_2 u}} \sqrt{\frac{1+k_3 u}{1-k_3 u}}, \quad u = \sqrt{1 - e^w},$$

Die Figur 11a und 11b zeigen bei speciellen Annahmen für  $k_1 > k_2 > k_3 > 1$  die entsprechenden reciproken Geschwindigkeits-

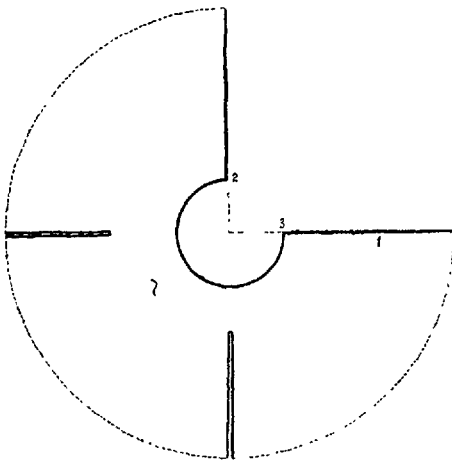


Fig. 11 a.

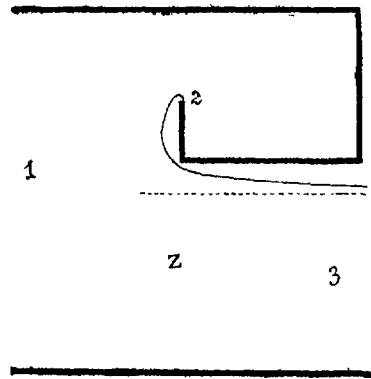


Fig. 11 b.

und Strömungs-Gebiete, während das  $w$ -Gebiet ein Parallelstreifen von der Breite  $\pi$  ist.

Dass  $\xi$  und  $u$  (nach getroffener Wahl der Wurzelzeichen in einem Punkt) sich auf einander eindeutig beziehen, folgt daraus, dass  $\frac{\partial \xi}{\partial u}$  nur in Randpunkten 0 oder  $\infty$  wird. Es ist nämlich

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{\xi}{2} \left( \frac{k_1}{1-k_1^2 u^2} + \frac{k_2}{1-k_2^2 u^2} + \frac{k_3}{1-k_3^2 u^2} \right);$$

dies wird aber nur unendlich, wenn einer der Werthe  $1 - k_j u$  ver-

schwindet, also in Punkten wo  $\xi = \infty$  wird d. i. in Randpunkten. Ferner wird  $\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0$  in zwei Punkten, die aber reellen  $u$  entsprechen, demzufolge ebenfalls Punkte der Grenzen sind; es entsprechen denselben auf der  $\xi$ -Ebene die beiden Cuspidalpunkte der Grenze.

Ist die Anzahl der  $\xi_j$  grösser als 3, so erhält man Strömungen mit freier Grenze, deren Beschreibung mittelst hyperelliptischer Integrale geschieht. Sind alle Grössen  $k_j$  reell, so sind auf jeden Fall sämtliche feste Wände gerade; der allgemeinere Fall bleibt spätern Untersuchungen vorbehalten.

3. Zur Beschreibung der Strömung genügen hyperelliptische Integrale, sobald im allgemeinen Ausdruck für  $\xi$  (Art. XIII, pag. 266) sämtliche  $n_j = \frac{1}{2}$  sind. Ich beschränke mich auf die nähere Betrachtung des Falles, wo nur zwei  $\xi_j$  auftreten, demzufolge zur Beschreibung elliptische Integrale genügen. Es sei demnach

$$\xi = \sqrt{\frac{1+k_1 u_1}{1-k_1 u_1}} \sqrt{\frac{1+k_2 u_2}{1-k_2 u_2}},$$

$$u_1 = \sqrt{e^{\varphi_1} - e^w};$$

$$u_2 = \sqrt{e^{\varphi_2} - e^w}.$$

Man setze

$$u = e^w,$$

$$a_1 = e^{\varphi_1},$$

$$a_2 = e^{\varphi_2};$$

man erhält

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u} \frac{(1+k_1 \sqrt{a_1-u})(1+k_2 \sqrt{a_2-u})}{\sqrt{(1-k_1^2(a_1-u))(1-k_2^2(a_2-u))}}.$$

Wir setzen speciell fest, dass die Grössen  $k_j$  und  $\varphi_j$  reell seien, u. zw.

$$k_1 > k_2 \geq 1; \quad \varphi_1 > \varphi_2.$$

Die Gebiete der  $\xi_j$  seien dieselben wie (pag. 250, 257) mit dem Unterschiede, dass die Punkte  $\xi_j = 1$  nicht dem Punkt  $w = 0$  sondern  $w = \varphi_j$  entsprechen (Fig. 12a<sub>1</sub>, 12a<sub>2</sub>; 13a<sub>1</sub>, 13a<sub>2</sub>).

Ist  $\psi = 0$ , und  $\varphi < \varphi_2$ , so beschreibt das  $\xi$ -Bild des untern Randes vom  $w$ -Streifen dieselbe Linie wie im ersten Beispiel (pag. 267); wenn hingegen

$$\varphi_1 > \varphi > \varphi_2,$$

so ist  $\xi_2$  gleich der complexen Einheit, während bezüglich  $\xi_1$  zwei Fälle möglich sind: entweder ist  $\xi_1$  reell und positiv im *ganzen* Intervall, oder es ist in der ersten Hälfte noch imaginär.

In Fig. 12b, 12c ist der erste Fall, in Fig. 13b, 13c der zweite skizzirt; ich bemerke, dass im zweiten Fall die beiden krummen Aeste

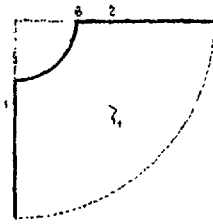


Fig. 12a<sub>1</sub>.

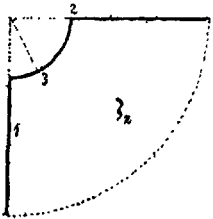


Fig. 12a<sub>2</sub>.

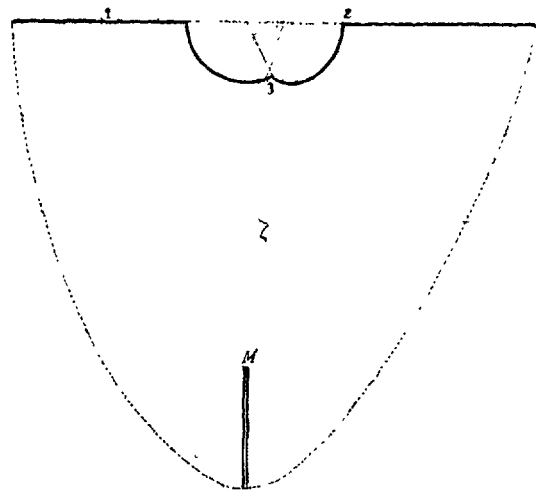


Fig. 12b.

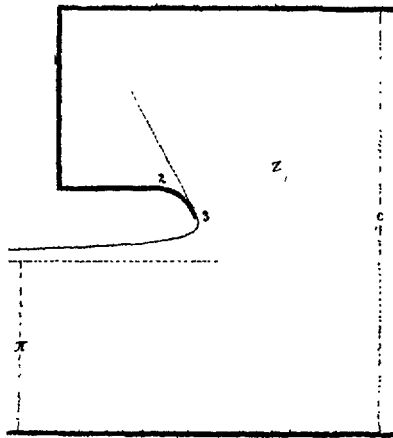


Fig. 12c.

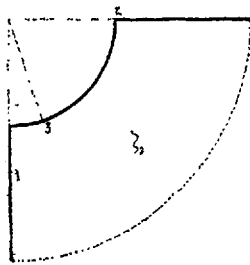


Fig. 13a<sub>1</sub>.

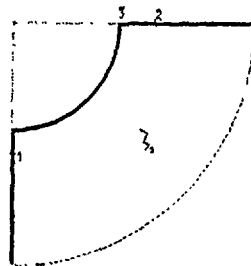


Fig. 13a<sub>2</sub>.

auf dem Rand der  $\xi$ -Ebene eine gemeinschaftliche Asymptote besitzen. Eine leichte Rechnung, die ich hier unterdrücke, zeigt, dass ausser den Punkten, wo  $\xi = 0$  oder  $= \infty$  wird, noch in jenen Punkten Singularitäten auftreten, wo die Gleichung stattfindet

$$k_2(1 - k_1^2 u_1^2) u_1 + k_1(1 - k_2^2 u_2^2) u_2 = 0;$$

in diesen Punkten ist nämlich  $\frac{dz}{dw} = 0$ .

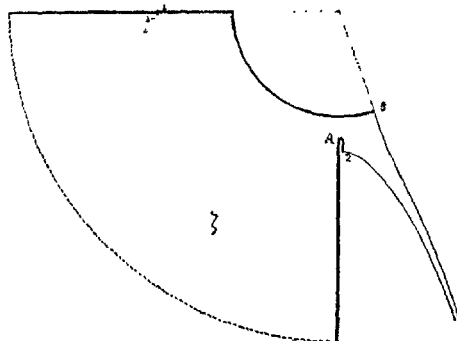


Fig. 13 b.

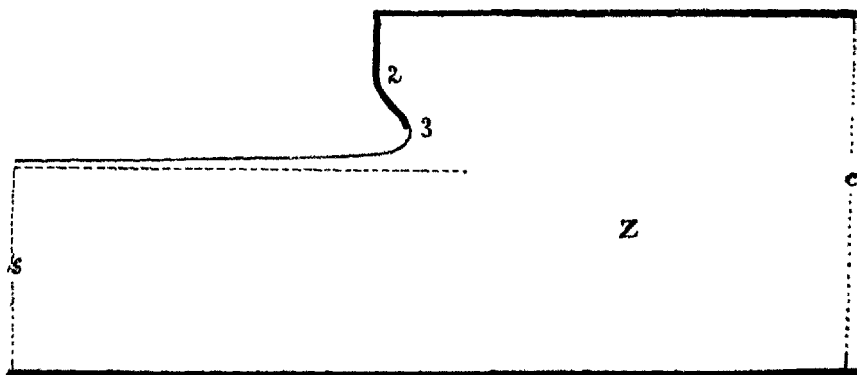


Fig. 13 c.

XVII. Die eine Seite des Strömungs-Gebietes endet in den hier beschriebenen Fällen in einer freien Grenze des ausfliessenden Strahls, was eine Folge dessen ist, dass dem Punkt  $w = \infty$  imaginäre  $u_j$  Werthe entsprechen für alle  $j$ . Man entfernt diese Beschränkung, wenn man in den  $\xi$ -Formeln an Stelle von  $e^w$  eine linear-gebrochene Function von  $e^w$  einführt. Man erhält so Strömungsebenen, die zu den ursprünglichen dieselbe Beziehung darbieten, wie Strömungen in § 2 zu denen in § 1.

Man erhält ähnliche Strömungen von allgemeinerer Natur bei Zugrundelegung der Beziehung

$$\xi = \prod_{j=1}^m \left( \frac{u_j + k_j v_j}{u_j - k_j c_j} \right)^{n_j},$$

$$u_j = ((a_{j_1} - e^w) \dots (a_{j_p} - e^w))^{\frac{1}{2}},$$

$$v_j = ((b_{j_1} - e^w) \dots (b_{j_p} - e^w))^{\frac{1}{2}},$$

wo die  $a, b, k, n$  Constante bezeichnen, und die Breite des  $w$ -Streifens so zu bestimmen ist (pag. 266), dass die Abbildung im *Innern* überall conform bleibt.

Budapest, December 1893.

---