Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks.

Von

H. Schubert in Hamburg.

§ 1.

Definition der Lagebedingungen und der invarianten Bedingungen beim Dreieck.

Das im Folgenden behandelte Gebilde besteht aus drei in fester Ebene befindlichen Punkten a, b, c (Ecken) und deren Verbindungsstrahlen α, β, γ (Seiten), so dass α und a, β und b, γ und c einander gegenüberliegen. Wir nennen dieses Gebilde, dessen Constantenzahl 6 ist, kurz „*Dreieck*", fassen es aber zugleich als Dreiseit auf, d. h., wir rechnen zu seinen wesentlichen Bestandtheilen ebenso gut seine 3 Seiten, wie seine 3 Ecken, was natürlich nur dann von Bedeutung wird, wenn zwei Ecken oder alle drei Ecken zusammenfallen. Nach den Bezeichnungsregeln des Bedingungskalküls*) bedeuten die eingeführten Symbole a, b, c resp. α, β, γ zugleich die einfachen Bedingungen, dass die Ecke a oder b oder c auf einer gegebenen Geraden liege, resp., dass die Seite α, β, γ durch einen gegebenen Punkt gehe. Durch Zusammensetzung dieser Bedingungen erhält man eine grosse Menge von Lagebedingungen höherer Dimension. Jede solche, dem Dreieck auferlegte i-fache Bedingung bedeutet, gemäss den Grundsätzen des Kalküls, zugleich auch die *Zahl* der Dreiecke, welche einem vorliegenden i-stufigen Systeme angehörig, jene i-fache Bedingung erfüllen.

Da jede Ecke zweien Seiten *incident* ist, so gelten zunächst die folgenden 6 Gleichungen, welche aus der Incidenzformel für Punkt und Strahl (Kalkül, pag. 25) resultiren:

*) Man vergleiche wegen dieser Bezeichnungsregeln und wegen des *Rechnens* mit Bedingungssymbolen entweder meine Abhandlung in Bd. X der Math. Ann. (pag. 1 bis 116, Abschnitte I, II, III) oder meinen bei Teubner 1879 erschienenen „Kalkül der abzählenden Geometrie", ein Buch, das ich kurz mit „Kalkül" citiren werde.

$$a\beta = a^2 + \beta^2, \qquad a\gamma = a^2 + \gamma^2,$$
$$b\gamma = b^2 + \gamma^2, \qquad b\alpha = b^2 + \alpha^2,$$
$$c\alpha = c^2 + \alpha^2, \qquad c\beta = c^2 + \beta^2.$$

Hieraus erhält man durch Multiplication mit den Bedingungen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ viele andere Formeln, z. B.

$$a^2\beta = a\beta^2, \quad cb\alpha = cb^2 + c\alpha^2 = bc^2 + b\alpha^2,$$
$$b^2c^2 = bc\alpha^2, \quad a^2b^2c - a^2b^2\alpha = a^2bc^2 - a^2c^2\alpha,$$
$$a^2b^2\alpha + b^2c^2\beta + c^2a^2\gamma = a^2c^2\alpha + b^2a^2\beta + c^2b^2\gamma.$$

Umformungen, welche nur auf einer derartigen Benutzung der Incidenzformel für Punkt und Strahl beruhen, sollen im Folgenden immer ohne besondere Begründung angestellt werden.

Zu den eingeführten 6 einfachen Lagebedingungen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ gesellen sich 5 einfache *invariante* Bedingungen, das sind Bedingungen, welche verlangen, dass das Dreieck *ausgeartet* sei. Ausgeartet ist ein Dreieck, wenn es die allgemeine Definition des Dreiecks erfüllt, aber Ecken oder Seiten besitzt, die zu einander nicht allgemein, sondern unendlich nahe liegen. Man gewinnt die Beschreibung der Ausartungen des Dreiecks leicht durch homographische Abbildung aus dem allgemeinen Dreieck oder auch durch Specialisirung der einer Curve ein- oder umbeschriebenen Dreiecke. Betrachtet man z. B. das dreistufige System aller einer Curve einbeschriebenen Dreiecke, so erkennt man sofort, dass dieses System ein zweistufiges System von solchen Dreiecken enthält, bei denen die drei Ecken in gerader Linie liegen. Man gelangt daher zu folgender Definition:

I. *Die Ausartung ε besteht aus einem Strahle g, welcher zugleich als Seite α, Seite β und Seite γ aufzufassen ist, und auf welchem irgendwie die Ecken a, b, c liegen.*

Durch duale Uebertragung erhält man aus dieser Definition die folgende:

II. *Die Ausartung τ besteht aus einem Punkte s, welcher die Ecken a, b, c so in sich vereinigt, dass die 3 Seiten α, β, γ drei durch s hindurchgehende Strahlen sind.*

Zu einer dritten Ausartungsdefinition gelangt man, wenn man von drei auf einer Curve liegenden Punkten zwei unendlich nahe legt. Da der dritte Punkt dann noch jede beliebige Lage auf der Curve haben kann, so bilden alle möglichen Tripel von solchen Punkten ein zweistufiges System von ausgearteten, einbeschriebenen Dreiecken mit folgender Definition.

III. *Die Ausartung ϑ_a besteht aus einem Strahle g, in welchem die Seiten β und γ unendlich nahe liegen, und aus einem auf g liegenden*

Punkte s, in welchem die Ecken b und c unendlich nahe liegen; dabei liegt die Ecke a irgendwo auf g, und der Strahl α ist irgend ein Strahl durch s. Diese Dreiecksausartung geht durch duale Umwandlung in sich selbst über.

IV. und V. *Die Ausartungen* ϑ_b *und* ϑ_c *sind* ϑ_a *analog*,*) d. h. sie gehen aus ϑ_a durch cyklische Vertauschung der Buchstaben a, b, c, α, β, γ hervor.

Jede der eben aufgestellten 5 Ausartungsdefinitionen erniedrigt die Constantenzahl 6 des Dreiecks um 1, d. h. sie erzeugt eine *einstufige Ausartung* und eine *einfache* Ausartungsbedingung, oder, was dasselbe ist, von derartig ausgearteten Dreiecken giebt es in einem einstufigen Dreieckssysteme eine endliche Anzahl, in einem i-stufigen Systeme ∞^{i-1}.

Wir setzen nun fest, dass jedes der 5 eben eingeführten Ausartungssymbole

$$\varepsilon,\ \tau,\ \vartheta_a,\ \vartheta_b,\ \vartheta_c$$

zugleich auch die einfache *Bedingung* bedeute, dass ein Dreieck in der angegebenen Weise ausarten soll. Ferner sollen die bei der Beschreibung der Ausartungen benutzten Buchstaben für Punkte und Strahlen zugleich die zugehörigen einfachen Grundbedingungen bedeuten; und zwar haben s und g bei den verschiedenen Ausartungen auch verschiedene Bedeutung. Wir wollen nämlich immer mit s denjenigen Punkt einer Ausartung bezeichnen, in welchem zwei oder drei Ecken vereinigt liegen, und mit g denjenigen Strahl, in welchem zwei oder drei Seiten vereinigt liegen. Es ist also z. B.

$$\varepsilon g \text{ identisch mit } \varepsilon\alpha \text{ oder } \varepsilon\beta \text{ oder } \varepsilon\gamma,$$

$$\vartheta_a s \text{ identisch mit } \vartheta_a b \text{ oder } \vartheta_a c.$$

Ferner bedeuten z. B.

τs^2 die dreifache Bedingung, dass ein Dreieck seine drei Ecken in einem gegebenen Punkte vereinigen soll;

$\varepsilon a^2 g = \varepsilon a g^2$ die vierfache Bedingung, dass die drei Ecken in einer gegebenen geraden Linie liegen sollen, und dabei die Ecke a in einen gegebenen Punkt fallen soll;

$\vartheta_a \alpha^2 g^2$ die fünffache Bedingung, dass das Dreieck die Definition von ϑ_a erfülle, und dass der Strahl α sowohl wie auch der Coincidenzstrahl g gegeben sei.

Die Zusammensetzung von *zwei* oder mehr Ausartungsbedingungen mit einander schliessen wir aus.

---

*) Ueberhaupt wollen wir hier einander „analog“ solche Definitionen, Bedingungen und Formeln nennen, welche aus einander durch cyklische Vertauschung von a, b, c, α, β, γ hervorgehen.

Zweistufige Ausartungen, d. h. solche, welche seine Constantenzahl 6 um 2 zu erniedrigen vermögen, erhalten wir wieder sehr leicht durch Betrachtung des dreistufigen Systems aller einer Curve einbeschriebenen Dreiecke. Dieses System enthält ein einstufiges System von Dreiecken, deren jedes auf einer Tangente durch die beiden im Berührungspunkte unendlich nahen Curvenpunkte und einen der sonstigen Schnittpunkte gebildet wird. Daher können wir die folgenden Definitionen aussprechen.

VI. *Die Ausartung ω_a ist eine Ausartung ε, bei welcher die Ecken b und c in einem Punkte s unendlich nahe liegen. ω_a ist aber nicht bloss als eine specielle ε, sondern auch als eine specielle ϑ_a anzusehen.*

VII. und VIII. *Die Ausartungen ω_b und ω_c sind ω_a analog.*

IX., X., XI. *Die Ausartungen ω_α, ω_β, ω_γ gehen aus ω_a durch duale Umwandelung hervor.*

Eine siebente, zweistufige Ausartung erhalten wir durch Betrachtung aller derjenigen einer Curve einbeschriebenen Dreiecke, deren drei Ecken drei aufeinanderfolgende unendlich nahe Punkte sind. Auch solche Dreiecke bilden ein in dem dreistufigen Systeme liegendes, einstufiges System. Daher:

XII. *Die Ausartung ψ besteht aus einem einzigen Punkte s, dem die drei Ecken unendlich nahe liegen, und aus einem einzigen durch s gehenden Strahle g, dem die drei Seiten unendlich nahe liegen, jedoch so, dass die drei Ecken im Allgemeinen nicht in gerader Linie, sondern wie drei aufeinanderfolgende Punkte einer Curve liegen, und dass die drei Seiten sich im Allgemeinen nicht in demselben Punkte schneiden. Daher darf ψ als eine specielle ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c, nicht aber als eine specielle ε oder τ angesehen werden.* Ein Dreieck ψ ist also durch die Lage seines Strahls g und seines Punktes s noch nicht hinreichend bestimmt. Es muss zu seiner vollkommenen Bestimmung noch eine einfache Bedingung hinzutreten, welche ausspricht, mit welcher *Krümmung a, b, c* einander unendlich nahe liegen, also etwa die einfache Bedingung, dass die drei Ecken auf ψ drei consecutive Punkte eines der ∞^2 Kegelschnitte sein sollen, die durch 3 gegebene Punkte gelegt werden können, oder die metrische Bedingung, dass der Radius des durch die drei Ecken von ψ gehenden Kreises eine gegebene Länge habe. Ein zu der zweistufigen Ausartung ψ specialisirtes Dreieck wollen wir kurz *unendlich kleines* Dreieck nennen. Beim Viereck erhält man eine analoge, aber dreistufige Ausartung, beim n-Eck eine analoge, $(n-1)$-stufige Ausartung.

Eine *dreistufige* Ausartung des Dreiecks erkennt man bei dem dreistufigen Systeme der einer Curve einbeschriebenen Dreiecke in jedem Wendepunkte, wo drei aufeinanderfolgende, unendlich nahe Curvenpunkte in gerader Linie liegen. Also:

XIII. *Die dreistufige Ausartung η ist eine Ausartung ε, bei welcher alle drei Ecken a, b, c auf dem Strahle g in dem Punkte s unendlich nahe liegen. η ist specieller Fall von ω_a, von ω_b, von ω_c und von ψ, nicht aber von ω_α, ω_β, ω_γ.*

Durch duale Umwandlung erhält man aus η eine zweite, dreistufige Ausartung ζ mit folgender Definition.

XIV. *Die dreistufige Ausartung ζ ist eine Ausartung τ, bei welcher die drei sich in s schneidenden Seiten α, β, γ einander im Strahle g unendlich nahe liegen. ζ ist also specieller Fall von ω_α, ω_β, ω_γ, ψ, nicht aber von ω_a, ω_b, ω_c.* Ein Dreieck ζ bilden also z. B. die drei in einem Rückkehrpunkte berührenden, unendlich nahen Tangenten.

Die zweistufigen und die dreistufigen Ausartungsbedingungen setzen wir ebenso wie die einstufigen mit allen möglichen Lagebedingungen zusammen. Z. B. bedeutet ψg die dreifache Bedingung, dass ein Dreieck ein unendlich kleines werde, und dabei seinen Strahl g durch einen gegebenen Punkt schicke.

Bei einer analytischen Ableitung der Ausartungen des Dreiecks findet man ausser den oben definirten noch andere Ausartungsbedingungen, welche dadurch hervorgerufen werden, dass die oben nur als zweistufig erkannten Ausartungen auch bei gewissen, *einstufigen* Systemen in endlicher Anzahl vorkommen können, und dass überhaupt i-stufige Dreieckssysteme denkbar sind, welche von oben k-stufig genannten Ausartungen nicht ∞^{i-k}, sondern ∞^r enthalten, wo $r > i-k$ ist. Ein Beispiel bietet das zweistufige System aller Dreiecke, welche immer durch je zwei Punkte b und c einer festen Curve und den Schnittpunkt a der in b und in c berührenden Tangenten γ und β gebildet werden (§ 9.). Zu diesem Dreieckssysteme gehören nicht bloss die ∞^1 Dreiecke ε, welche durch einen ganz beliebigen Punkt a einer Doppeltangente und deren beide Berührungspunkte b und c erzeugt werden, sondern auch diejenigen ∞^1 Dreiecke, welche durch einen ganz beliebigen Punkt a einer Wendetangente und deren beide unendlich nahe gerückte Berührungspunkte gebildet werden. Solche Dreiecke erfüllen aber die oben für die zweistufige Ausartung ω_a aufgestellte Definition. Trotzdem müssen sie aber als einstufig betrachtet werden, weil von ihnen ∞^1 in einem zweistufigen Dreieckssysteme liegen. Ebenso ergeben die Rückkehrpunkte ein einstufiges System von Ausartungen, welche die Definition von ω_a erfüllen. Endlich ist auch in jedem Curvenpunkte eine die Definition von ψ erfüllende Ausartung erzeugt.

Derartige Ausartungen, welche die Definition einer oben k-stufig genannten Ausartung erfüllen, aber nicht k-stufig genannt werden dürfen, weil von ihnen ein i-stufiges Dreieckssystem nicht ∞^{i-k}, sondern ∞^r enthält, wo $r > i-k$ ist, wollen wir *Halphen'sche Aus-*

artungen nennen; ferner soll jedes System, welches irgend eine Halphen'sche Ausartung enthält, ein „*Halphen'sches System*", und jedes System, welches von solchen Ausartungen ganz frei ist, ein „*gewöhnliches System*" heissen. Die Wahl dieser Namen ist durch die Untersuchungen des Herrn Halphen über Kegelschnittcharakteristiken hervorgerufen. Herr Halphen war es nämlich, welcher zuerst (cf. Proc. of the London Math. Soc., vol. IX, Math. Ann. Bd. XIV) darauf aufmerksam gemacht hat, dass, um in unserer Terminologie zu reden, einstufige Kegelschnittsysteme denkbar sind, welche eine Ausartung enthalten, die scheinbar die Constantenzahl 3, nicht 4 hat, und in Wirklichkeit die letztere dadurch bekommt, dass die Differenz der Ordnungen der durch die Coincidenz hervorgerufenen unendlich kleinen Grössen jede beliebige Zahl sein kann. Diese von Halphen aufgefundene Kegelschnittausartung lässt sich nämlich so definiren. Ihre Punkte bilden zwei einer einzigen Geraden g unendlich nahe Geraden, ihre Tangenten zwei Strahlbüschel, deren Scheitel einem auf der Geraden g liegenden Punkte s unendlich nahe liegen. Das aus der Geraden g und dem Punkte s bestehende Gebilde, welches für sich ja die Constantenzahl 3 hat, bestimmt aber die Kegelschnittausartung noch nicht vollständig. Wenn man nämlich mit d die unendlich kleine Strecke bezeichnet, welche die Kegelschnittausartung auf einer beliebigen Geraden ausschneidet, und mit δ den unendlich kleinen Winkel bezeichnet, den zwei von einem beliebigen Punkte ausgehende Tangenten mit einander bilden, so giebt es immer eine rationale Zahl h, für welche der Bruch $\frac{d^h}{\delta}$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth hat. Betrachtet man dann die Kenntniss der Zahl h als für die Definition der Halphen'schen Kegelschnittausartung wesentlich, so gewinnt dieselbe die Constantenzahl 4. Wie Herr Halphen nachgewiesen hat, gilt der bekannte, von Clebsch in den Math. Ann. Bd. VI, von Lindemann in Clebsch's Vorl. p. 398 und vom Verfasser im Verein mit Hurwitz in den Gött. Nachr. von 1876 bewiesene Chasles'sche Satz $\alpha \cdot \mu + \beta \cdot \nu$ nur für solche einstufige Kegelschnittsysteme, welche die Halphen'sche Ausartung *nicht* enthalten. Diese Voraussetzung ist also jenen Beweisen hinzuzufügen.*) Herrn Halphen ist es, zunächst für den Fall des einstufigen und vierstufigen Systems, gelungen, die Zahl der gemeinsamen Kegelschnitte zweier Systeme auch in dem Falle zu bestimmen, wo die Systeme die erwähnte Ausartung enthalten. Dann ist man aber auf analytische Untersuchungen angewiesen, und opfert der Allgemeinheit der Systeme

*) Ich sprach dies schon im Bulletin de la Soc. math., tome VIII, p. 61 aus mit Rücksicht auf § 38. meines Kalküls, wo der Beweis aus den Gött. Nachr. wiederholt ist.

die Einfachheit der Ableitung und der Darstellung der gesuchten Zahl nach der Analogie des Bezout'schen Satzes von der Zahl der Schnittpunkte zweier Curven.

Ebenso ist es beim Dreieck. Die Nichtberücksichtigung von Halphen'schen Systemen macht es möglich, eine Reihe von Formeln zwischen Lagebedingungen und invarianten Bedingungen aufzustellen (§ 2.), und auch die Zahl der zwei Dreieckssystemen gemeinsamen Dreiecke als Summe von Producten je zweier den Systemen angehörigen Anzahlen auf einfachste Weise zu bestimmen (§ 3.). *Deshalb wird es gerechtfertigt erscheinen, wenn bei dieser ersten anzahlgeometrischen Behandlung des Dreiecks Halphen'sche Systeme ausgeschlossen werden. Den folgenden Betrachtungen ist daher, ausser, wenn das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist*), stets die Voraussetzung hinzuzufügen, dass die Systeme, auf welche die Formeln bezogen werden, gewöhnliche Systeme sind.*

Damit ist nicht gesagt, dass nicht gewisse der folgenden Formeln für gewisse Halphen'sche Systeme doch richtig sind, oder wenigstens bei richtiger Deutung der Symbole auf solche Systeme anwendbar sind; nur wollen wir, der Einfachheit wegen, bei der Ableitung der Formeln auf solche Anwendbarkeit keine besondere Rücksicht nehmen.

§ 2.

Gleichungen zwischen den in § 1. definirten Bedingungen.

A. Gleichungen erster Dimension.

In § 1. sind für das Dreieck 6 einfache Lagebedingungen

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

und 5 einfache Ausartungsbedingungen

$$\varepsilon,\ \tau,\ \vartheta_a,\ \vartheta_b,\ \vartheta_c$$

definirt. Zwischen diesen 11 Bedingungen bestehen 4 von einander unabhängige Gleichungen, welche wir leicht durch die Coincidenzformel erster Dimension für Punktepaare erhalten können. Wir setzen nämlich ein beliebiges gewöhnliches, einstufiges System allgemeiner Dreiecke voraus, und fassen auf jedem Dreiecke dieses Systems die Ecke b und die Ecke c zu einem Punktepaar zusammen. Dann erhalten wir eine Coincidenz der beiden Ecken b und c auf jedem Dreieck des Systems, welches entweder nach der Definition von τ (§ 1., Nr. II) oder nach der Definition von ϑ_a (§ 1., Nr. III) ausgeartet ist. Daher kommt:

$$(1) \qquad b + c - \alpha = \tau + \vartheta_a.$$

*) Wie in § 9.

Der Formel (1) sind analog:

$$c + a - \beta = \tau + \vartheta_b, \tag{2}$$

$$a + b - \gamma = \tau + \vartheta_c. \tag{3}$$

Die dual entsprechende Betrachtung liefert:

$$\beta + \gamma - a = \varepsilon + \vartheta_a, \tag{4}$$

$$\gamma + \alpha - b = \varepsilon + \vartheta_b, \tag{5}$$

$$\alpha + \beta - c = \varepsilon + \vartheta_c. \tag{6}$$

Subtrahirt man nun (4) von (1), (5) von (2), (6) von (3), so erhält man jedes Mal eine und dieselbe Gleichung, nämlich:

$$a + b + c - \alpha - \beta - \gamma = \tau - \varepsilon. \tag{7}$$

Daraus geht hervor, dass diese Gleichungen nur 4 von einander unabhängige Gleichungen repräsentiren. Es ist überhaupt unmöglich, irgend eine der Bedingungen ε, τ, ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c durch a, b, c, α, β, γ allein auszudrücken (§ 4.).

Aus den obigen Gleichungen erhält man ferner die 3 Gleichungen:

$$a + \alpha = \varepsilon + \tau + \vartheta_b + \vartheta_c, \tag{8}$$

$$b + \beta = \varepsilon + \tau + \vartheta_c + \vartheta_a, \tag{9}$$

$$c + \gamma = \varepsilon + \tau + \vartheta_a + \vartheta_b, \tag{10}$$

welche man auch geometrisch gewinnen kann, wenn man fragt, bei wieviel Dreiecken des zu Grunde gelegten einstufigen Systems eine Ecke auf die Gegenseite fällt (Kalkül, p. 83).

Aus den eben aufgestellten Gleichungen erster Dimension erhält man durch Multiplication mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, durch gelegentliche Benutzung der Incidenzformeln und durch zweckmässige Eliminationen eine grosse Reihe von Gleichungen höherer Dimension, welche wieder für alle gewöhnlichen Systeme gültig sind. Man kann viele derselben auch direct erkennen, wenn man die allgemeinen Punktepaar- und Strahlenpaarformeln benutzt, welche ich in den Math. Ann. Bd. X und im Kalkül (p. 44, 45, 62, 63) aufgestellt habe. Der Kürze wegen erwähnen wir nur diejenigen Gleichungen, welche im Folgenden vorzugsweise zur Anwendung gelangen. Ferner schreiben wir von solchen Gleichungen, die durch cyklische Vertauschung aus einander hervorgehen, immer nur eine. Zu den so abgeleiteten Gleichungen i-ter Dimension gesellen wir dann immer noch diejenigen, welche die in § 1. definirten, höheren Ausartungsbedingungen enthalten.

B. Gleichungen zweiter Dimension.

Aus den Gleichungen erster Dimension erhält man leicht:

$$bc = \alpha^2 + \tau s + \vartheta_a s, \tag{11}$$

$$\beta\gamma = a^2 + \varepsilon g + \vartheta_a g, \tag{12}$$

$$(13)\qquad \varepsilon a = a^2 + a\alpha - \tau s - \vartheta_b s - \vartheta_c s,$$

$$(14)\qquad \tau\alpha = \alpha^2 + a\alpha - \varepsilon g - \vartheta_b g - \vartheta_c g,$$

$$(15)\qquad \vartheta_a a = a(b + c - \alpha - \tau)$$

$$= \beta^2 + \gamma^2 - a\alpha + \vartheta_b s + \vartheta_c s + \tau s,$$

$$(16)\qquad \vartheta_a \alpha = b^2 + c^2 - a\alpha + \vartheta_b g + \vartheta_c g + \varepsilon g.$$

Bei diesen Formeln erscheinen rechts nur die Bedingungen

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ \tau s,\ \varepsilon g,$$
$$\vartheta_a s,\ \vartheta_a g,\ \vartheta_b s,\ \vartheta_b g,\ \vartheta_c s,\ \vartheta_c g.$$

Durch diese 17 Bedingungen lassen sich schliesslich auch die in § 1. definirten Bedingungen:

$$\omega_a,\ \omega_b,\ \omega_c,\ \omega_\alpha,\ \omega_\beta,\ \omega_\gamma,\ \psi$$

ausdrücken. Zu diesem Zweck beachten wir, dass die Ausartung ω_a sowohl eine Ausartung ε ist, bei welcher b und c coincidiren, wie auch eine Ausartung ϑ_a ist, bei welcher α und g coincidiren, und ferner, dass ψ eine Ausartung ϑ_a ist, bei welcher sowohl α und g, wie auch a und s unendlich nahe liegen. Demgemäss geben die Coincidenzformeln:

$$(17)\qquad \omega_a = \varepsilon b + \varepsilon c - \varepsilon g,$$

$$(18)\qquad \omega_\alpha = \tau\beta + \tau\gamma - \tau s,$$

$$(19)\qquad \omega_a + \psi = \vartheta_a \alpha + \vartheta_a g - \vartheta_a s,$$

$$(20)\qquad \omega_\alpha + \psi = \vartheta_a a + \vartheta_a s - \vartheta_a g.$$

Nun substituiren wir für εb, εc, $\tau\beta$, $\tau\gamma$, $\vartheta_a\alpha$, $\vartheta_a a$ die aus den Formeln (13) bis (16) resultirenden Werthe. Dann erhalten wir schliesslich:

$$(21)\qquad \omega_a = b^2 + c^2 + b\beta + c\gamma - 2\cdot\tau s - \varepsilon g - 2\cdot\vartheta_a s - \vartheta_b s - \vartheta_c s,$$

$$(22)\qquad \omega_\alpha = \beta^2 + \gamma^2 + b\beta + c\gamma - 2\cdot\varepsilon g - \tau s - 2\cdot\vartheta_a g - \vartheta_b g - \vartheta_c g,$$

und mit Benutzung von (21) oder (22):

$$(23)\qquad \psi = \vartheta_a g + \vartheta_b g + \vartheta_c g + \vartheta_a s + \vartheta_b s + \vartheta_c s$$
$$- a\alpha - b\beta - c\gamma + 2\cdot\tau s + 2\cdot\varepsilon g.$$

Der Umstand, dass diese Formel für die sich selbst duale Bedingung ψ durch duale Umwandlung in sich selbst übergeht, liefert eine Controle der Rechnung.

C. Gleichungen dritter Dimension.

Aus den Gleichungen erster Dimension erhält man zunächst:

$$(24)\qquad b^2 c = b^2\alpha + \tau s^2 + \vartheta_a s^2,$$

$$(25)\qquad b c^2 = c^2\alpha + \tau s^2 + \vartheta_a s^2,$$

$$(26)\qquad \beta^2\gamma = a^2\beta + \varepsilon g^2 + \vartheta_a g^2,$$

$$(27)\qquad \beta\gamma^2 = a^2\gamma + \varepsilon g^2 + \vartheta_a g^2,$$

(28) $a^2\alpha = \tau s^2 + \varepsilon a^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2,$

(29) $a\alpha^2 = \varepsilon g^2 + \tau\alpha^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2,$

(30) $\vartheta_a s a = abc - \varepsilon g^2 - \tau s^2 - \tau\alpha^2 - \vartheta_b g^2 - \vartheta_c g^2,$

(31) $\vartheta_a g\alpha = \alpha\beta\gamma - \tau s^2 - \varepsilon g^2 - \varepsilon a^2 - \vartheta_b s^2 - \vartheta_c s^2,$

(32) $\vartheta_a a^2 = a^2\beta + a^2\gamma - \varepsilon a^2,$

(33) $\vartheta_a \alpha^2 = b^2\alpha + c^2\alpha - \tau\alpha^2,$

(34) $\vartheta_a a\alpha = b^2\gamma + c^2\beta + \tau s^2 + \varepsilon g^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2.$

Dazu fügen wir noch zwei Formeln für ψs und für ψg, welche aus (23) hervorgehen, wenn man dafür sorgt, dass wieder nur die eben rechts erschienenen Symbole auftreten.

(35) $\psi s = abc - \tau\alpha^2 - \tau\beta^2 - \tau\gamma^2 - 2\cdot\tau s^2 - \varepsilon g^2 - \vartheta_a g^2 - \vartheta_b g^2 - \vartheta_c g^2,$

(36) $\psi g = \alpha\beta\gamma - \varepsilon a^2 - \varepsilon b^2 - \varepsilon c^2 - 2\cdot\varepsilon g^2 - \tau s^2 - \vartheta_a s^2 - \vartheta_b s^2 - \vartheta_c s^2.$

Um auf die in § 1. definirten, dreifachen Ausartungsbedingungen η und ζ zu kommen, beachten wir, dass η eine ω_a ist, bei welcher auch s und a unendlich nahe liegen, und dass ζ eine ω_α ist, bei welcher auch g und α unendlich nahe liegen. Wir erhalten dementsprechend:

(37) $$\eta = \omega_a s + \omega_a a - \omega_a g,$$

(38) $$\zeta = \omega_\alpha g + \omega_\alpha \alpha - \omega_\alpha s,$$

woraus sich mit Benutzung von (21) und (22) und nach einigen aus (24) bis (34) folgenden Substitutionen, schliesslich ergiebt:

(39) $$\eta = a^2\beta + a^2\gamma + b^2\gamma + b^2\alpha + c^2\alpha + c^2\beta - 3.abc$$
$$+ 6\cdot\tau s^2 + 2\cdot\tau\alpha^2 + 2\cdot\tau\beta^2 + 2\cdot\tau\gamma^2 - \varepsilon a^2 - \varepsilon b^2 - \varepsilon c^2 + 3\cdot\varepsilon g^2$$
$$+ 4\cdot\vartheta_a g^2 + 4\cdot\vartheta_b g^2 + 4\cdot\vartheta_c g^2 + \vartheta_a s^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2,$$

(40) $$\zeta = a^2\beta + a^2\gamma + b^2\gamma + b^2\alpha + c^2\alpha + c^2\beta - 3\cdot\alpha\beta\gamma$$
$$+ 6\cdot\varepsilon g^2 + 2\cdot\varepsilon a^2 + 2\varepsilon b^2 + 2\cdot\varepsilon c^2 - \tau\alpha^2 - \tau\beta^2 - \tau\gamma^2 + 3\cdot\tau s^2$$
$$+ 4\cdot\vartheta_a s^2 + 4\cdot\vartheta_b s^2 + 4\cdot\vartheta_c s^2 + \vartheta_a g^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2.$$

Aus (35), (36), (39), (40) folgt, dass die 4 Bedingungen ψs, ψg, ζ, η durch eine Gleichung von einander abhängen. Subtrahirt man nämlich (40) von (39), so kommt:

$$\eta - \zeta = 3\cdot\alpha\beta\gamma - 3\cdot abc + 3\cdot\tau s^2 - 3\cdot\varepsilon g^2$$
$$+ 3\cdot\tau\alpha^2 + 3\cdot\tau\beta^2 + 3\cdot\tau\gamma^2 - 3\cdot\varepsilon a^2 - 3\cdot\varepsilon b^2 - 3\cdot\varepsilon c^2$$
$$+ 3\cdot\vartheta_a g^2 + 3\cdot\vartheta_b g^2 + 3\cdot\vartheta_c g^2 - 3\cdot\vartheta_a s^2 - 3\cdot\vartheta_b s^2 - 3\cdot\vartheta_c s^2.$$

Subtrahirt man andererseits (35) von (36), so kommt:

$$\psi g - \psi s = \alpha\beta\gamma - abc + \tau s^2 - \varepsilon g^2$$
$$+ \tau\alpha^2 + \tau\beta^2 + \tau\gamma^2 - \varepsilon a^2 - \varepsilon b^2 - \varepsilon c^2$$
$$+ \vartheta_a g^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2 - \vartheta_a s^2 - \vartheta_b s^2 - \vartheta_c s^2.$$

Durch Vergleichung der beiden so erhaltenen Differenzen ergiebt sich:

(41) $$3 \cdot \psi s + \eta = 3 \cdot \psi g + \zeta,$$

eine Formel, welche in § 7. bei der Behandlung der unendlich kleinen Dreiecke wieder auftreten wird. Da η und ζ specielle Ausartungen ψ sind, so kann die interessante Formel (41) in Worten so ausgesprochen werden:

Addirt man bei einem einstufigen Systeme von unendlich kleinen Dreiecken erstens die Zahl derjenigen, deren 3 Ecken in gerader Linie liegen, zu der dreifachen Ordnung der von den Ecken beschriebenen Curve, zweitens die Zahl derjenigen, deren 3 Seiten sich in einem und demselben Punkte schneiden, zu dem dreifachen Range der von den Seiten eingehüllten Curve, so erhält man beide Mal dieselbe Summe.

D. Gleichungen vierter Dimension.

Von den Gleichungen vierter Dimension heben wir folgende hervor:

(42) $$a^2 \alpha^2 = \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \alpha + \vartheta_b s^2 g + \vartheta_c s^2 g,$$

(43) $$\vartheta_a s^2 a = \vartheta_a s^2 g + \tau s^2 \beta + \tau s^2 \gamma + \psi s^2,$$

(44) $$\vartheta_a g a^2 = \beta^2 \gamma^2 - \varepsilon g^2 a,$$

(45) $$\vartheta_a s a^2 = \beta^2 \gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \beta + \tau s^2 \gamma + \psi s^2,$$

(46) $$\tau s \alpha \gamma = \gamma^2 \alpha^2 - \varepsilon g^2 b + \tau s^2 \alpha + \tau s^2 \gamma + \vartheta_b s^2 g - \psi g^2,$$

(47) $$a^2 b c = \beta^2 \gamma^2 + \vartheta_b s^2 g + \vartheta_c s^2 g + \tau s^2 \alpha + \tau s^2 \beta + \tau s^2 \gamma + \psi s^2,$$

und die diesen Gleichungen dual entsprechenden.

E. Gleichungen fünfter Dimension.

(48) $$a b^2 c^2 = \varepsilon b^2 c^2 + \tau \alpha^2 \gamma^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 + 2 \cdot \psi s^2 g,$$

(49) $$\alpha \beta^2 \gamma^2 = \tau \beta^2 \gamma^2 + \varepsilon a^2 c^2 + \varepsilon a^2 b^2 + 2 \cdot \psi s^2 g,$$

(50) $$b^2 c^2 \beta = \varepsilon b^2 c^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 + \psi s^2 g,$$

(51) $$\beta^2 \gamma^2 b = a^2 b^2 \beta = \varepsilon a^2 b^2 + \tau \beta^2 \gamma^2 + \psi s^2 g,$$

(52) $$\vartheta_b s^2 b^2 = \tau \alpha^2 \gamma^2 + \psi s^2 g,$$

(53) $$\vartheta_b g^2 \beta^2 = \varepsilon a^2 c^2 + \psi s^2 g.$$

F. Ueberblick.

Aus den unter (A) abgeleiteten Gleichungen *erster Dimension* geht hervor, dass alle auf die Ecken, Seiten und Ausartungen eines Dreiecks bezüglichen, einfachen Bedingungen durch die folgenden 7 *Bedingungen* ausdrückbar sind:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \tau,$$

oder durch:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \varepsilon.$$

Die Gleichungen *zweiter Dimension* drücken alle derartigen zweifachen Bedingungen durch die folgenden 17 *Bedingungen* aus:

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2,\ a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ \tau s,\ \varepsilon g,$$
$$\vartheta_a s,\ \vartheta_b s,\ \vartheta_c s,\ \vartheta_a g,\ \vartheta_b g,\ \vartheta_c g.$$

Die Gleichungen *dritter Dimension* zeigen, dass man alle derartigen, dreifachen Bedingungen als Functionen der folgenden 22 *Bedingungen* darstellen kann:

$$a^2\beta,\ a^2\gamma,\ b^2\alpha,\ b^2\gamma,\ c^2\alpha,\ c^2\beta,\ abc,\ \alpha\beta\gamma,$$
$$\varepsilon a^2,\ \varepsilon b^2,\ \varepsilon c^2,\ \tau\alpha^2,\ \tau\beta^2,\ \tau\gamma^2,\ \varepsilon g^2,\ \tau s^2,$$
$$\vartheta_a s^2,\ \vartheta_b s^2,\ \vartheta_c s^2,\ \vartheta_a g^2,\ \vartheta_b g^2,\ \vartheta_c g^2.$$

Ebenso überzeugt man sich leicht, dass man jede derartige *vierfache* Bedingung durch die folgenden 17 *Bedingungen* ausdrücken kann:

$$b^2c^2,\ c^2a^2,\ a^2b^2,\ \beta^2\gamma^2,\ \gamma^2\alpha^2,\ \alpha^2\beta^2,\ \tau s^2\alpha,\ \tau s^2\beta,\ \tau s^2\gamma,$$
$$\varepsilon g^2 a,\ \varepsilon g^2 b,\ \varepsilon g^2 c,\ \vartheta_a s^2 g,\ \vartheta_b s^2 g,\ \vartheta_c s^2 g,\ \psi s^2,\ \psi g^2.$$

Endlich kann man jede derartige, *fünffache* Bedingung durch die folgenden 7 *Bedingungen* darstellen:

$$\varepsilon b^2c^2,\ \varepsilon c^2a^2,\ \varepsilon a^2b^2,\ \tau\beta^2\gamma^2,\ \tau\gamma^2\alpha^2,\ \tau\alpha^2\beta^2,\ \psi s^2 g.$$

Durch die eben angeführten 7 einfachen, 17 zweifachen, 22 dreifachen, 17 vierfachen, 7 fünffachen Bedingungen wird in den Paragraphen 4. bis 6. *jede beliebige*, dem Dreiecke auferlegte i-fache Bedingung ausgedrückt werden, unter der *Beschränkung*, dass das zu Grunde gelegte i-stufige System und das durch die i-fache Bedingung definirte, $(6 - i)$-stufige System *gewöhnliche* Systeme sind.

G. Beispiele zu den Formeln.

I. Um die Formel (41) zu controliren, betrachte man das einstufige System aller derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche auf einer gegebenen Curve durch alle möglichen drei consecutiven, unendlich nahen Punkte festgestellt werden. Man hat dann ψs gleich der Ordnung n der Curve, ψg gleich dem Range n' der Curve, η gleich der Zahl $\varkappa'$ der Wendepunkte, ζ gleich der Zahl $\varkappa$ der Rückkehrpunkte zu setzen. So erhält man aus Formel (41) die bekannte *Plücker'sche Formel:*

$$3 \cdot n + \varkappa' = 3 \cdot n' + \varkappa.$$

Man beachte aber, dass Formel (41) *allgemeiner* ist, als diese Plücker'sche Formel, weil die Ecken der bei der Anwendung von (41) betrachteten unendlich kleinen Dreiecke nicht eine und dieselbe Curve zu bilden brauchen.

II. Um ein Beispiel für die Formeln dritter Dimension zu haben, betrachten wir das dreistufige System aller einer festen Curve n^{ter} Ordnung einbeschriebenen Dreiecke, indem wir jeden Punkt dieser Curve als Ecke a, jeden zweiten Punkt als Ecke b und jeden dritten als Ecke c eines Dreiecks auffassen. Für das so definirte System haben alle dreifachen Bedingungen, die sich nur durch die cyklische Vertauschung von a, b, c, α, β, γ unterscheiden, einen und denselben Werth. Desshalb erwähnen wir von solchen Bedingungen immer nur einen. Man findet leicht:

$$b^2c = 0,\ b^2\alpha = 0,\ a^2\alpha = 0,\ \beta^2\gamma = n(n-1)^2,\ a\alpha^2 = n^2(n-1),$$
$$abc = n^3 \text{ und } \varepsilon g^2 = n(n-1)(n-2),\ \vartheta_a s^2 = 0,\ \varepsilon a^2 = 0,\ \tau s^2 = 0,$$
$$\tau\alpha^2 = 0,\ \tau\alpha\beta = 0,\ \vartheta_a s a = n^2,\ \vartheta_a a^2 = 0,\ \vartheta_a\alpha^2 = 0,\ \vartheta_a g^2 = n(n-1).$$

Diese Werthe stehen mit den Formeln (24) bis (34) in Einklang. Aus (34) folgt $\vartheta_a a\alpha = n^2(n-1)$, und aus Formel (31):

$$\alpha\beta\gamma - \vartheta_a g\alpha = n(n-1)(n-2).$$

Um $\vartheta_a g\alpha$ zu bestimmen, multipliciren wir Formel (1) mit $\alpha\beta$. Dann kommt:

$$\tau\alpha\beta + \vartheta_a g\alpha = b\alpha\beta + c\alpha\beta - \alpha^2\beta,$$

oder:

$$\vartheta_a g\alpha = b^2\beta + c^2\beta + \alpha^2\beta = 0 + 0 + n(n-1)^2.$$

Demnach ist:

$$\alpha\beta\gamma = n(n-1)(n-2) + n(n-1)^2,$$

oder

$$\alpha\beta\gamma = n(n-1)(2n-3).$$

Einer Curve n^{ter} Ordnung lassen sich also

$$n(n-1)(2n-3)$$

Dreiecke einbeschreiben, deren 3 Seiten bezüglich durch 3 gegebene Punkte gehen. Die dual entsprechende Betrachtung ergiebt, dass unter den einer Curve n'^{ten} Ranges *umbeschriebenen* Dreiecken

$$n'(n'-1)(2n'-3)$$

Dreiecke existiren, welche jede ihrer drei Ecken auf einer zugehörigen Geraden haben.

Auch die Formeln (35) bis (41) lassen sich durch die oben angegebenen Werthe leicht controliren. Man beachte dabei, dass das in unserem, oben definirten, dreistufigen Systeme liegende einstufige System von Dreiecken ψ nicht identisch ist mit dem im Beispiel I. betrachteten Systeme, weil bei letzterem immer die drei unendlich nahen Ecken Punkte eines und desselben Curvenzweigs sein sollten. Demgemäss wurde die Bedingung η in einem Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt beim Beispiel I. nicht erfüllt, bei unserem Systeme aber erfüllt, und zwar, gemäss den Plücker'schen Formeln, in einem Doppelpunkt 6 mal, in einem Rückkehrpunkt 8 mal.

III. Für das dreistufige System aller in Bezug auf einen festen Kegelschnitt sich selbst conjugirten Dreiecke erhält man:

$$a^2 b = 1, \ a^2\beta = 1, \ a^2\alpha = 0, \ \vartheta_a s a = 2, \ \vartheta_a a^2 = 2, \ abc = 2, \ \psi s = 2,$$

und dieselben Werthe für die analogen und die dual entsprechenden Bedingungen. Für die übrigen, oben erwähnten, dreifachen Bedingungen ergiebt sich Null, was mit den abgeleiteten Formeln in Einklang steht.

IV. Für das vierstufige System aller einem Kegelschnittbüschel einbeschriebenen Dreiecke ergiebt sich:

$$a^2\alpha^2 = 2, \ \beta^2\gamma^2 = 1, \ a^2 bc = 4, \ \varepsilon g^2 a = 0, \ \tau s^2\alpha = 0, \ \vartheta_b s^2 g = 1,$$
$$\vartheta_a s^2 a = 2, \ \vartheta_a g a^2 = 1, \ \vartheta_a s a^2 = 2, \ \tau s\alpha\beta = 0, \ \psi s^2 = 1,$$

aber

$$\psi g^2 = 2.$$

Diese Werthe stehen mit den Formeln (42) bis (47) im Einklang. Um auf die Ausartungen η und ζ zu kommen, leiten wir aus Formel (41) noch 2 neue Formeln ab, indem wir dieselbe mit s und mit g multipliciren. Dadurch kommt zunächst:

$$3 \cdot \psi s^2 + \eta s = 3 \cdot (\psi s^2 + \psi g^2) + \zeta s,$$

oder:

(54) $$\eta s = 3 \cdot \psi g^2 + \zeta s,$$

ebenso:

(55) $$\zeta g = 3 \cdot \psi s^2 + \eta g.$$

Nun ist für unser vierstufiges Dreieckssystem $\psi s^2 = 1$, $\psi g^2 = 2$, und ausserdem:

$$\eta s = 3 \cdot 2, \ \eta g = 0, \ \zeta s = 0, \ \zeta g = 3.$$

Diese 4 Werthe erhält man, wenn man beachtet, dass in dem Kegelschnittbüschel 3 mal ein Kegelschnitt existirt, dessen Punkte ein Geradenpaar bilden, dass in jedem Punkte einer der beiden Geraden ein Dreieck η liegt, und dass im Schnittpunkt der beiden Geraden unendlich viele Dreiecke ζ liegen, weil jeder durch den Schnittpunkt gehende Strahl als das g einer Ausartung ζ anzusehen ist. Setzt man die so erkannten 4 Werthe in die Formeln (54) und (55) ein, so erhält man Identitäten.

V. Bei metrischen Beispielen ist es wegen der speciellen Beziehung zum unendlich fernen, imaginären Kugelkreise nothwendig, denselben zuvor die projective Fassung zu geben. Für das fünfstufige System aller Dreiecke, bei denen die Ecken b und c einen gegebenen Abstand haben, erhält man dann:

$ab^2c^2 = 0$, $a^2bc^2 = 2$, $a^2b^2c = 2$, $\varepsilon b^2c^2 = 0$, $\varepsilon c^2a^2 = 2$, $\varepsilon a^2b^2 = 2$, $b^2c^2\beta = 0$, $a^2b^2\alpha = 2$, $\beta^2\gamma^2 b = a^2b^2\beta = 2$, $\vartheta_b g^2\beta^2 = 2$, u. s. w.

Diese Werthe controliren die Formeln (48) bis (53) und ergeben ausserdem:

$$\alpha\beta^2\gamma^2 = 4,$$

d. h., es lässt sich durch jeden Punkt 4 mal ein Strahl ziehen, auf welchem zwei gegebene Strahlen eine gegebene Länge abschneiden, wie aus den Elementen der Planimetrie bekannt ist.

§ 3.

Ableitung der Stammformel für die Zahl der zwei gewöhnlichen Dreieckssystemen gemeinsamen Dreiecke.

Wir stehen jetzt vor der Frage, ob es, wie beim Punkte (Bezout's Satz) und beim Strahle, auch beim Dreieck möglich ist, jede beliebige, algebraisch ausdrückbare, geometrische Bedingung durch eine gewisse Anzahl i-facher Bedingungen auszudrücken, oder, was dasselbe ist*), ob sich die Zahl der Dreiecke, welche einem beliebigen, i-stufigen und einem davon unabhängigen, $(6-i)$-stufigen Systeme von Dreiecken gemeinsam sind, als algebraische Summe von Producten je zweier Anzahlen darstellen lässt, von denen immer die eine auf das i-stufige, die andere auf das $(6-i)$-stufige System Bezug nimmt. Für mehrere aus einzelnen Punkten, Strahlen und Ebenen zusammengesetzte Gebilde hat der Verfasser diese Darstellung in den Gött. Nachr. von 1877 und in seinem Kalkül geleistet. Für das Gebilde, welches aus n in gerader Linie befindlichen Punkten besteht, liess sich die gesuchte Darstellung unter der Beschränkung leisten**), dass die Coincidenz von i solchen Punkten als eine Bedingung auftritt, deren Dimension $i-1$ und nicht etwa kleiner ist. Aehnlich ist es beim Dreieck. Formeln, welche der Bezout'schen Formel vom Producte der Gradzahlen analog sind,

---

*) Man vergleiche die Formulirung des Charakteristikenproblems für ein beliebiges Gebilde Γ in meinem Kalkül, p. 274 bis 284, sowie in den Gött. Nachr. von 1877, p. 401.

**) Man vergleiche im Kalkül, p. 307 bis 319. Die eben angedeutete Beschränkung ist in meinem Buche an der betreffenden Stelle nicht ausdrücklich erwähnt, aber nach der Bedeutung der dort eingeführten Symbole selbstverständlich. Dies hob ich schon im Bull. de la Soc. math. tome VIII, p. 60 hervor, nachdem Herr Halphen kurz zuvor in derselben Zeitschrift (tome VIII, p. 31) ein Beispiel angeführt hatte, welches die Ungenauigkeit einer meiner Formeln beweisen sollte. Das Beispiel behandelte aber einen Fall, wo die Coincidenz von *drei* Punkten einer Geraden nicht eine zweifache, sondern eine *einfache* Bedingung ist, war also durch die in meinen Formeln auftretenden Symbole von selbst ausgeschlossen.

lassen sich auch für das Dreieck ableiten, vorausgesetzt, dass die gegebenen Systeme *gewöhnliche* sind, d. h. der am Schluss von § 1. ausgesprochenen Beschränkung unterliegen. Indem wir das Wort „Charakteristiken" für Untersuchungen im Sinne Halphen's aufsparen, wollen wir solche der Bezout'schen Formel analoge Formeln „*Productenformeln*" und die darauf bezüglichen Sätze „Productensätze"*) nennen.

Um zu einer Stammformel für die Productenformeln des Dreiecks zu gelangen, beginnen wir, der Einfachheit wegen, mit der Betrachtung eines i-stufigen Systems von Punkten b und eines $(2-i)$-stufigen Systems von Punkten b'. Beide Systeme haben b^2 oder bb' oder b'^2 Punkte gemein, jenachdem $i=2$, 1 oder 0 ist. Also giebt der Ausdruck

$$b^2 + b \cdot b' + b'^2$$

für die Zahl der vollen Coincidenzen eines zweistufigen Systems von Punktepaaren (b, b') zugleich auch durch seine 3 Glieder die Zahl der gemeinsamen Punkte eines i-stufigen und eines $(2-i)$-stufigen Punktsystems an, indem in jedem Falle zwei von den 3 Gliedern des Ausdrucks wegen der Stufen der Systeme Null werden. Nun fassen wir den Punkt b mit einem durch b gehenden Strahle α zu einem Gebilde zusammen, ebenso den Punkt b' mit dem durch b' gehenden Strahle α', und betrachten ein i-stufiges und ein $(3-i)$-stufiges System solcher Gebilde als gegeben. Es fragt sich, wieviel Gebilde den beiden Systemen gemeinsam sind. Wir wählen den Fall $i=2$. Dann bilden die Punkte b' eine Curve, während ein Punkt b in jedem Punkte der Ebene, also auch in jedem Punkte dieser Curve, liegt, und zwar, gemäss unserer Bezeichnung, b^2 mal. Von jedem Curvenpunkte geht nun ein Strahl α und ein Strahl α' aus. Ein den beiden Systemen gemeinsames Gebilde kann also nur dann entstehen, wenn die von einem Curvenpunkte ausgehenden Strahlen α und α' coincidiren. Um zu berechnen, wie oft dies vorkommt, haben wir die Strahlenpaarformel erster Dimension anzuwenden. Wir müssen dann zuerst bestimmen, wieviel Strahlen α durch einen beliebigen Punkt P gehen, und dabei solche Punkte b besitzen, die zugleich Punkte b' sind. Unserer Bezeichnung gemäss bilden die Punkte P, welche auf sämmtlichen, durch P gehenden Strahlen α liegen, eine Curve vom Grade αb. Diese schneidet also die Curve der Punkte b' in $\alpha b \cdot b'$ Punkten. Soviel Strahlen giebt es demnach auch, welche durch P

---

*) Diesen Ausdruck gebrauchte ich schon in den Math. Ann. Bd. X, p. 91, wo die Zahlen für die gemeinsamen Punkte zweier Punktsysteme und für die gemeinsamen Strahlen zweier Systeme von Strahlen abgeleitet sind.

gehen und einen Punkt besitzen, der zugleich b und b' ist. Zweitens haben wir zu bestimmen, wieviel Strahlen α' durch einen beliebigen Punkt P' so gehen, dass auf jedem ein Punkt liegt, der sowohl b wie b' ist. Es sind dies, nach unserer Bezeichnung, $\alpha' \cdot b^2$ Strahlen, weil in jedem auf einem Strahle α' liegenden Punkte b' b^2 mal ein Punkt b zu denken ist. Drittens haben wir zu bestimmen, wieviel Punkte auf einer beliebigen Geraden liegen, welche zugleich b und b' sind und dabei einen Strahl α und einen Strahl α' aussenden. Man erhält dafür die Zahl $b' \cdot b^2$. Demnach ergiebt sich für die Zahl z derjenigen Gebilde, welche einen Punkt enthalten, der zugleich b und b' ist, und dabei einen Strahl α enthalten, der mit α' coincidirt:

$$z = \alpha b \cdot b' + \alpha' \cdot b^2 - b' \cdot b^2.$$

In der Zahl z sind jedenfalls die gesuchten, den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde enthalten. Ausserdem würde z auch Gebilde aus Σ mitzählen, welche Gebilden in Σ' bloss unendlich nahe liegen mit bestimmter Coincidenzrichtung der Punkte b und b' oder mit bestimmtem Coincidenzschnitt der Strahlen α und α'. Solche Fälle sind aber unmöglich, wenn, wie es hier geschieht, die beiden Systeme als von einander *unabhängig* vorausgesetzt werden. Ebenso wenig können ja die ∞^2 aus den Punkten zweier beliebiger Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung gebildeten Punktepaare noch andere Coincidenzen bilden, als die $m \cdot n$ vollen Coincidenzen. Demnach giebt der Ausdruck für z genau die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde an. Ist ferner das System Σ der aus b und α zusammengesetzten Gebilde dreistufig, das andere System Σ' nullstufig, so ist natürlich $b^2\alpha$ die Zahl der gemeinsamen Gebilde. Ist Σ nullstufig, Σ' dreistufig, so ist für diese Zahl $b'^2\alpha'$ zu setzen. Ist endlich Σ einstufig, Σ' zweistufig, so ergiebt sich, analog wie oben,

$$\alpha' b' \cdot b + b'^2 \cdot \alpha - b'^2 \cdot b$$

für die Zahl der gemeinsamen Gebilde. Addirt man nun die in den 4 Fällen $i = 3, 2, 1, 0$ erhaltenen 4 Anzahlen, so erkennt man leicht, dass genau dasselbe herauskommt, als wenn wir den Ausdruck:

$$b^2 + bb' + b'^2$$

mit

$$\alpha + \alpha' - b$$

oder mit

$$\alpha + \alpha' - b'$$

multipliciren und dann in jedem Gliede die gestrichelten Symbole von den nichtgestrichelten durch ein Multiplicationszeichen trennen. Also liefert der Ausdruck

$$(b^2 + bb' + b'^2)\ (\alpha + \alpha' - b')$$

nach Ausführung der Multiplication immer die Zahl der gemeinsamen

Gebilde eines i-stufigen Systems Σ und eines $(3 - i)$-stufigen Systems Σ', da ja dann nur diejenigen Glieder von null verschieden werden, welche ein i-faches, auf Σ bezügliches, und ein $(3 - i)$-faches, auf Σ' bezügliches Symbol enthalten. Wir kommen also immer zu einem richtigen Resultat, wenn wir bei Aufsuchung der Zahl der Σ und Σ' gemeinsamen Gebilde jedes in Σ liegende Gebilde mit jedem in Σ' liegenden Gebilde zu einem Paare zusammenfassen, dann dem erhaltenen dreistufigen Systeme von Paaren die zweifache Bedingung auferlegen, dass ein Punkt b und ein Punkt b' eine volle Coincidenz bilden sollen (Kalkül, § 13), und endlich mit dieser zweifachen Bedingung die einfache Bedingung zusammensetzen, dass die α und α' Strahlen, welche sich in einem solchen sowohl b wie b' darstellenden Punkte schneiden, unendlich nahe liegen sollen.

Wir gehen nun so weiter zu einem Gebilde, welches aus zwei sich in einem Punkte b schneidenden Strahlen α und γ besteht. Dieses Gebilde erzeuge ein i-stufiges System Σ. Ausserdem sei ein $(4 - i)$-stufiges System Σ' von ebensolchen Gebilden gegeben, bei denen der Punkt b' und die Strahlen α' und γ' heissen mögen. Beide Systeme haben dann gemeinsam

$$(56) \qquad w = (b^2 + b\,b' + b'^2)\,(\alpha + \alpha' - b')\,(\gamma + \gamma' - b')\,^{*)}$$

Gebilde, wo nach Ausführung der Multiplication nur diejenigen Glieder von null verschieden werden, welche ein i-faches, auf Σ bezügliches, und ein $(4 - i)$-faches, auf Σ' bezügliches Symbol enthalten, und wo immer die dem nichtgestrichelten Symbole zukommende Anzahl mit der dem gestrichelten Symbole angehörigen Anzahl multiplicirt werden muss.

Hierauf betrachten wir das Gebilde, welches aus zwei sich in einem Punkte b schneidenden Strahlen α, γ und einem auf α liegenden Punkte c besteht. Von diesem Gebilde sei ein i-stufiges System Σ und ein $(5 - i)$-stufiges System Σ' gegeben, bei welchem letzteren die Buchstaben für die Punkte b und c und für die Strahlen α und γ gestrichelt sein mögen. Man erhält dann in ganz derselben Weise, wie oben,

$$(57) \quad v = (b^2 + b\,b' + b'^2)\,(\alpha + \alpha' - b')\,(\gamma + \gamma' - b')\,(c + c' - \alpha')$$

für die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Gebilde, *ausgenommen*, wenn Σ ein $(i - 1)$-stufiges System, und auch Σ' ein $(5 - i - 1)$-stufiges System von derartig ausgearteten Gebilden enthielte, dass sowohl b und c, wie auch α und γ unendlich nahe läge.

---

*) Dieser Formel entspricht dual eine Formel, aus welcher ich schon in den Gött. Nachr. von 1877 die Productenformeln des Punktepaares abgeleitet habe. (Kalkül, § 42.)

Dann würde es nämlich vorkommen können, dass sowohl der Coincidenzpunkt eines b und eines c mit dem Coincidenzpunkte eines b' und eines c', wie auch der Coincidenzstrahl eines α und eines γ mit dem Coincidenzstrahl eines α' und eines γ' zusammenfiele. Ein solcher Fall wäre dann sicher durch den obigen Ausdruck für v mitgezählt. Man könnte jedoch nicht sicher wissen, ob ein solcher Fall auch ein den gegebenen Systemen Σ und Σ' *gemeinsames* Gebilde vorstellt. Wir müssen also, um richtige Productenformeln haben zu können, den gegebenen Systemen die oben angedeutete Beschränkung auferlegen.

Wir kommen endlich zum *Dreieck selbst.* Gegeben sei ein i-stufiges System Σ und ein davon unabhängiges $(6 - i)$-stufiges System Σ' von Dreiecken. In Σ mögen die drei Ecken a, b, c, die drei Seiten α, β, γ, und in Σ' die drei Ecken a', b', c' und die drei Seiten α', β', γ' heissen. Wiederholen wir die eben angestellten Betrachtungen, indem wir nur noch auf dem Strahle γ einen Punkt a annehmen, der mit dem auf γ' liegenden Punkte a' zusammenfallen soll, so gelangen wir zu der Formel:

$$(58)\quad y = (b^2 + bb' + b'^2)(\alpha + \alpha' - b')(\gamma + \gamma' - b')(c + c' - \alpha')(a + a' - \gamma').$$

Es wäre jedoch falsch, anzunehmen, dass diese Zahl y immer die Zahl der den beiden Systemen gemeinsamen Dreiecke lieferte. Zunächst legen wir, nach der Analogie der schon bei Formel (57) nothwendig gewordenen Einschränkung, den beiden Dreieckssystemen die am Schluss von § 1. besprochene Beschränkung auf, *dass sie gewöhnliche Systeme seien.* Aber auch dann ist die Zahl y nicht gleich der Zahl der gemeinsamen Dreiecke. Denn y zählt, wie oft es vorkommt, dass b mit b', α mit α', γ mit γ', c mit c', a mit a' zusammenfällt, zählt also auch diejenigen Fälle mit, *wo ausserdem β und β' nicht zusammenfallen.* Dies kann natürlich nur bei ausgearteten Dreiecken eintreten, und zwar unter der Voraussetzung von gewöhnlichen Systemen, nur in zwei Fällen; nämlich erstens, wenn bei einer Σ angehörigen Ausartung τ und bei einer Σ' angehörigen Ausartung τ' die Seiten α und α', sowie γ und γ' zusammenfallen; zweitens, wenn bei einer Σ angehörigen Ausartung ϑ_b und bei einer Σ' angehörigen Ausartung ϑ_b' der Strahl g mit g', der Punkt s mit s' und der Punkt b mit b' zusammenfällt. Beide Fälle sind durch y mitgezählt, ergeben aber keine den Systemen gemeinsamen Dreiecke, weil die Seite β nicht auch mit β' zusammenfällt. Also muss man wegen des ersten dieser beiden Fälle gemäss der oben abgeleiteten Formel (56) den Ausdruck

$$\tau\tau'(s^2 + ss' + s'^2)(\alpha + \alpha' - s')(\gamma + \gamma' - s')$$

und wegen des zweiten Falles auch den Ausdruck

$$\vartheta_b \vartheta_b'(s^2 + ss' + s'^2)(g + g' - s')(b + b' - g')$$

von dem in Formel (58) gegebenen Ausdrucke für y subtrahiren, um *die Zahl x der gemeinsamen Dreiecke der beiden Systeme Σ und Σ' zu erhalten. Demnach ergiebt sich schliesslich die folgende Stammformel für alle Productenformeln des Dreiecks:*

$$(59)\quad \begin{aligned} X' = & (b^2 + bb' + b'^2)(\alpha + \alpha' - b')(\gamma + \gamma' - b')(c + c' - \alpha')(a + a' - \gamma') \\ & - \tau\tau'(s^2 + ss' + s'^2)(\alpha + \alpha' - s')(\gamma + \gamma' - s') \\ & - \vartheta_b \vartheta_b'(s^2 + ss' + s'^2)(g + g' - s')(b + b' - g'). \end{aligned}$$

Bei der Ableitung dieser Formel ist die Seite β in gewisser Weise bevorzugt. In derselben Weise könnte man auch α, γ, sowie a, b, c bevorzugen. Man erhielte dann im Ganzen 6 formell verschiedene Ausdrücke für x. Aus allen diesen 6 Ausdrücken kann man nach Ausführung der angedeuteten Multiplicationen, bei geschickter Benutzung der Incidenzformeln und der Formeln des § 2., *schliesslich einen und denselben Ausdruck erhalten, welcher sowohl den Anforderungen der Symmetrie entspricht, wie auch durch Vertauschung der gestrichelten Symbole mit den nichtgestrichelten in sich selbst übergeht.* Statt diesen Ausdruck hier hinzuschreiben, werden wir im Folgenden aus der rechten Seite der Stammformel (59) immer nur diejenigen Glieder herausschälen, welche bei dem jedesmal vorliegenden Werthe von i nicht verschwinden. Wir haben nämlich drei verschiedene Fälle zu behandeln:

I) Σ ist fünfstufig, Σ' einstufig,

II) Σ ist vierstufig, Σ' zweistufig,

III) Σ ist dreistufig, Σ' auch dreistufig.

Im ersten Falle sind von den Gliedern, welche die rechte Seite der Formel (59) ergiebt, nur diejenigen von Null verschieden, welche 5 nichtgestrichelte und 1 gestricheltes Symbol zu Factoren haben. Den Zahlenwerth eines solchen Gliedes erhält man dann, wenn man die Zahl derjenigen Dreiecke aus Σ, welche die durch das nichtgestrichelte Symbol dargestellte fünffache Bedingung erfüllen, mit der Zahl derjenigen Dreiecke multiplicirt, welche Σ' angehören, und zugleich die durch das gestrichelte Symbol bezeichnete einfache Bedingung erfüllen. Analog verfährt man in den beiden anderen Fällen.

§ 4.

Die Zahl der gemeinsamen Dreiecke eines einstufigen und eines fünfstufigen gewöhnlichen Systems.

Wir setzen hier ein einstufiges System Σ' und ein fünfstufiges System Σ von Dreiecken als gegeben voraus. Dann haben wir aus der Stammformel alle diejenigen Glieder herauszuziehen, welche ein gestricheltes und fünf nichtgestrichelte Symbole enthalten. Wir erhalten so für die Zahl der Σ und Σ' gemeinsamen Dreiecke:

$$(60)\qquad \begin{aligned} x = {} & a' \cdot (b^2 \alpha \gamma c) + b' \cdot (b \alpha \gamma a c - b^2 \gamma a c - b^2 \alpha a c) \\ & + c' \cdot (b^2 \alpha \gamma a) + \alpha' \cdot (b^2 \gamma a c - b^2 \alpha \gamma a) \\ & + \gamma' \cdot (b^2 \alpha a c - b^2 \alpha \gamma c) - \tau' \cdot \tau s^2 \alpha \gamma - \vartheta_b' \cdot \vartheta_b s^2 g b. \end{aligned}$$

Hier bedeutet gemäss § 3. jedes gestrichelte Symbol die Zahl derjenigen Dreiecke in Σ', welche die durch das Symbol dargestellte, einfache Bedingung erfüllen, jedes aus 5 Factoren bestehende, nichtgestrichelte Symbol die Zahl derjenigen Dreiecke in Σ, welche die durch das Symbol dargestellte, zusammengesetzte, fünffache Bedingung erfüllen. *Die Punkte deuten an, dass die resultirenden Zahlen zu multipliciren sind.*

Um den in Formel (60) erhaltenen Ausdruck in eine symmetrische und übersichtliche Form zu bringen, setzen wir in demselben gemäss Formel (3)

$$\vartheta_b' = a' + c' - \beta' - \tau',$$

und formen ihn dann vermöge der Incidenzformeln und der in § 2. entwickelten Formeln zweckmässig um. Dann kommt:

$$\begin{aligned} x = {} & a' \cdot b^2 c^2 \gamma + b' \cdot (a^2 \gamma a c - b^2 \alpha a c) + c' \cdot a^2 b^2 \alpha \\ & + \alpha' \cdot (a^2 b^2 c - a^2 b^2 \alpha) + \gamma' \cdot (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \gamma) \\ & - \tau' \cdot \tau s^2 \alpha \gamma - (a' + c' - \beta' - \tau') \cdot \vartheta_b s^2 b^2 \\ = {} & a' \cdot (b^2 c^2 \gamma - \vartheta_b s^2 b^2) + b' \cdot \alpha a c (\alpha \gamma - b^2) + c' \cdot (a^2 b^2 \alpha - \vartheta_b s^2 b^2) \\ & + \alpha' \cdot (a^2 b^2 c - a^2 b^2 \alpha) + \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + \gamma' \cdot (a b^2 c^2 - b^2 c^2 \gamma) \\ & + \tau' \cdot (\vartheta_b s^2 b^2 - \tau \alpha^2 \gamma^2) \\ = {} & a' \cdot \varepsilon b^2 c^2 + b' \cdot g a c (\varepsilon g + \vartheta_b g) + c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 \\ & + \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 a^2 + \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2 + \tau' \cdot \psi s^2 g, \end{aligned}$$

also schliesslich:

$$(61)\qquad \begin{aligned} x' = {} & a' \cdot \varepsilon b^2 c^2 + b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 \\ & + \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 a^2 + \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2 + \tau' \cdot \psi s^2 g. \end{aligned}$$

Diese Productenformel ist zwar symmetrisch, aber sie geht durch duale Umwandelung nicht in sich selbst über. Wir setzen desshalb noch gemäss Formel (52):

$$\vartheta_a s^2 a^2 = \tau \beta^2 \gamma^2 + \psi s^2 g$$

und das Analoge für $\vartheta_b s^2 b^2$ und $\vartheta_c s^2 c^2$. Dann kommt:

$$(62)\qquad \begin{aligned} x = {} & a' \cdot \varepsilon b^2 c^2 + b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 \\ & + \alpha' \cdot \tau \beta^2 \gamma^2 + \beta' \cdot \tau \gamma^2 \alpha^2 + \gamma' \cdot \tau \alpha^2 \beta^2 \\ & + (\tau' + \alpha' + \beta' + \gamma') \cdot \psi s^2 g. \end{aligned}$$

Da die duale Umwandelung dieser Formel nichts anderes verändert, als $\tau' + \alpha' + \beta' + \gamma'$ in $\varepsilon' + a' + b' + c'$, so müssen diese beiden Summen gleich sein, was durch Formel (7) bestätigt wird. Es gelingt auch, eine einzige Bedingung zu definiren, deren Anzahl statt jeder der beiden Summen gesetzt werden kann. Es ist dies *die einfache Bedingung, dass ein Dreieck einem der* ∞^2 *Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, welche durch drei gegebene Punkte gelegt werden können.* Für das durch diese Bedingung definirte, fünfstufige System sind nämlich $\varepsilon b^2 c^2$, $\varepsilon c^2 a^2$, $\varepsilon a^2 b^2$, $\tau\beta^2\gamma^2$, $\tau\gamma^2\alpha^2$, $\tau\alpha^2\beta^2$ gleich Null zu setzen, dagegen ist $\psi s^2 g = 1$. Demnach erhält man bei Anwendung der Productenformel (62) die Zahl derjenigen Dreiecke, welche Σ' angehörig sind, und die eben definirte Bedingung erfüllen, gleich

$$(\tau' + \alpha' + \beta' + \gamma') \cdot 1.$$

Bezeichnet man also jene Bedingung, insofern sie auf Σ' bezogen wird, mit d', so ergiebt sich schliesslich die *Productenformel*:

$$(63) \qquad x' = a' \cdot \varepsilon b^2 c^2 + b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + \alpha' \cdot \tau\beta^2\gamma^2 + \beta' \cdot \tau\gamma^2\alpha^2 + \gamma' \cdot \tau\alpha^2\beta^2 + d' \cdot \psi s^2 g.$$

Abgeleitete Productenformeln entstehen hieraus, wenn man mit gestrichelten Symbolen von Lagebedingungen multiplicirt. Dies ist erlaubt, weil man sich das als gewöhnlich vorausgesetzte einstufige System Σ' durch eine fünffache Bedingung definirt denken kann, welche die betreffende Lagebedingung als Factor enthält. Multipliciren wir Formel (63) z. B. mit a', so kommt:

$$x a' = a'^2 \cdot \varepsilon b^2 c^2 + a' b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + a' c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + a'\alpha' \cdot \tau\beta^2\gamma^2 + a'\beta' \cdot \tau\gamma^2\alpha^2 + a'\gamma' \cdot \tau\alpha^2\beta^2 + a' d' \cdot \psi s^2 g.$$

oder

$$(64) \quad x a' = a'^2 \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \tau\gamma^2\alpha^2 + \tau\alpha^2\beta^2) + \beta'^2 \cdot (\tau\gamma^2\alpha^2 + \varepsilon a^2 b^2) + \gamma'^2 \cdot (\tau\alpha^2\beta^2 + \varepsilon c^2 a^2) + \vartheta_b' s' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + \vartheta_c' s' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + \tau' s' \cdot (\varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2) + a'\alpha' \cdot \tau\beta^2\gamma^2 + a' d' \cdot \psi s^2 g.$$

Dieser Ausdruck für xa' giebt die Ordnung der Curve, die von der Ecke a aller derjenigen ∞^1 Dreiecke beschrieben wird, welche einem gegebenen zweistufigen Systeme Σ' und einem gegebenen fünfstufigen Systeme Σ gemeinsam sind.

Multiplicirt man ferner Formel (61) mit a'^2, so ergiebt sich:

$$(65) \qquad x a'^2 = a'^2 b' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + a'^2 c' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + a'^2 \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 a^2 + a'^2 \beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + a'^2 \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2 + \tau' s'^2 \cdot \psi s^2 g.$$

Multipliciren wir Formel (61) mit einer vierfachen Bedingung, z. B. mit $b'^2 c'^2$, so können wir, weil wir dann zwei fünfstufige Systeme zu Grunde legen, verlangen, dass der Ausdruck durch Vertauschung der gestrichelten Symbole mit den nichtgestrichelten Symbolen in sich selbst übergeht. In der That erhält man:

$$x'b'^2c'^2 = a'b'^2c'^2 \cdot \varepsilon b^2c^2 + b'^2c'^2\beta' \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + b'^2c^2\gamma' \cdot \vartheta_c s^2 c^2.$$

Benutzt man dann die Formeln des § 2., so kann man zu folgender Form gelangen:

$$x'b'^2c'^2 = a'b'^2c'^2 \cdot ab^2c^2 - \vartheta_b' s'^2 b'^2 \cdot \vartheta_b s^2 b^2 - \vartheta_c s'^2 c'^2 \cdot \vartheta_c s^2 c^2.$$

Dieses Resultat kann man auch direct durch folgende Ueberlegung erhalten. Wenn die Ecken b und c feste Punkte sind, so beschreibt in dem fünfstufigen Systeme Σ die Ecke a eine Curve vom Grade ab^2c^2, und in dem fünfstufigen Systeme Σ' die Ecke a' eine Curve vom Grade $a'b'^2c'^2$. Beide Curven schneiden sich in $ab^2c^2 \cdot a'b'^2c'^2$ Punkten. Zu diesen Schnittpunkten gehören erstens die Ecken a derjenigen den beiden Systemen gemeinsamen Dreiecke, welche ihre Ecken b und c in den festen Punkten haben. Ausserdem aber hat man zu beachten, dass jedes nach der Definition von ϑ_b oder ϑ_c ausgeartetes Dreieck, welches Σ angehört, und seinen Punkt b resp. c in dem einen, seinen Punkt s in dem andern festen Punkte hat, zusammen mit jedem ebenso beschaffenen, aber Σ' angehörigen Dreieck ein Paar von Dreiecken liefert, welche zwar dieselbe Ecke a haben, aber keineswegs den beiden Systemen gemeinsam sind, weil die Seiten β resp. γ in beiden Dreiecken verschieden sind. Demnach fallen von den $ab^2c^2 \cdot a'b'^2c'^2$ Schnittpunkten $\vartheta_b s^2 b^2 \cdot \vartheta_b' s'^2 b'^2$ in den einen, und $\vartheta_c s^2 c^2 \cdot \vartheta_c' s'^2 c'^2$ in den andern der beiden festen Punkte.

Multipliciren wir endlich Formel (61) mit fünffachen Bedingungen, so gelangen wir zu Formeln, welche zu den in § 2. entwickelten gehören. Z. B. ergiebt die Multiplication mit $a'b'^2c'^2$:

$$xa'b'^2c'^2 = 1 \cdot \varepsilon b^2c^2 + 1 \cdot \vartheta_b s^2 b^2 + 1 \cdot \vartheta_c s^2 c^2,$$

dies heisst aber:

$$ab^2c^2 = \varepsilon b^2c^2 + \vartheta_b s^2 b^2 + \vartheta_c s^2 c^2.$$

Die oben neu eingeführte Bedingung d, dass ein Dreieck einem der ∞^2 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, welche durch drei gegebene Punkte gelegt werden können, giebt mit den 6 Bedingungen a, b, c, α, β, γ eine Gruppe von 7 einfachen Bedingungen, durch welche, bei Zugrundelegung eines gewöhnlichen einstufigen Systems jede der 5 Ausartungsbedingungen ausgedrückt werden kann. Wir erhielten schon oben:

$$\tau = d - \alpha - \beta - \gamma,$$

und daraus, mit Benutzung der Formeln des § 2.,

$$\vartheta_a = b + c + \beta + \gamma - d,$$
$$\vartheta_b = c + a + \gamma + \alpha - d,$$

$$\vartheta_c = a + b + \alpha + \beta - d,$$
$$\varepsilon = d - a - b - c.$$

Hieraus folgt aber, dass die oben entwickelte Productenformel (63) auch mit τ', ϑ_a', ϑ_b', ϑ_c', ε' symbolisch multiplicirt werden darf. Ist nämlich Σ' ein zweistufiges, Σ ein fünfstufiges System, Σ'' das ihnen gemeinsame einstufige System von Dreiecken, so erhält man die Zahl der Dreiecke, welche Σ'' angehören, und eine der Bedingungen a, b, c, α, β, γ, d erfüllen, indem man zu jedem der gestrichelten Symbole der Formel (63) eines der Symbole a', b', c', α', β', γ', d' als Factor hinzusetzt. Thut man dies z. B. mit b', c', β', γ', d', addirt die ersten 4 der erhaltenen Gleichungen und subtrahirt von der Summe die letzte, so ist dies wegen der Formel

$$\vartheta_a' = b' + c' + \beta' + \gamma' - d'$$

ganz dasselbe, als setzte man ohne Weiteres zu jedem gestrichelten Symbol ϑ_a' als Factor.

§ 5.

Die Zahl der gemeinsamen Dreiecke eines zweistufigen und eines vierstufigen gewöhnlichen Systems.

Wir setzen hier ein zweistufiges System Σ' und ein vierstufiges System Σ von Dreiecken als gegeben voraus. In diesem Falle haben wir also aus der Stammformel (59) alle diejenigen Glieder herauszuziehen, welche zwei gestrichelte und vier nichtgestrichelte Bedingungsfactoren enthalten. Demgemäss ergiebt sich für die Zahl x der den beiden Systemen gemeinsamen Dreiecke zunächst:

$$
\begin{aligned}
(66)\quad x = {} & b'^2 \cdot (a\gamma c a - b\gamma c a - b\alpha c a + b^2 a c) \\
& + b'\alpha' \cdot (b\gamma c a - b\alpha\gamma a - b^2 c a + b^2\gamma a + b^2\alpha a) \\
& + b'\gamma' \cdot (b\alpha c a - b\alpha\gamma c - b^2 c a + b^2\gamma c + b^2\alpha c) \\
& + b'c' \cdot (b\alpha\gamma a - b^2\gamma a - b^2\alpha a) + b'a' \cdot (b\alpha\gamma c - b^2\gamma c - b^2\alpha c) \\
& + \alpha'\gamma' \cdot (b^2 c a - b^2\gamma c - b^2\alpha a + b^2\alpha\gamma) + c'a' \cdot (b^2\gamma\alpha) + a'\gamma \cdot (b^2\alpha c) \\
& - \alpha'^2 \cdot (b^2\gamma a) - \gamma'^2 \cdot (b^2\alpha c) + a'\alpha' \cdot (b^2\gamma c - b^2\alpha\gamma) \\
& + \gamma' c' \cdot (b^2\alpha a - b^2\alpha\gamma) + a'c' \cdot (b^2\alpha\gamma) \\
& - \tau's' \cdot (\tau s\alpha\gamma - \tau s^2\alpha - \tau s^2\gamma) - \tau'\alpha' \cdot (\tau s^2\gamma) - \tau'\gamma' \cdot (\tau s^2\alpha) \\
& - \vartheta_b's' \cdot (\vartheta_b s g b - \vartheta_b s^2 b) - \vartheta_b' g' \cdot (\vartheta_b s^2 b - \vartheta_b s^2 g) \\
& - \vartheta_b' b' \cdot (\vartheta_b s^2 g).
\end{aligned}
$$

Es handelt sich nun darum, diese Productenformel vermittelst der Incidenzformeln und der Formeln des § 2. so umzugestalten, dass sie eine möglichst kurze, und dabei symmetrische und sich selbst duale

Form erhält. Diesen Forderungen genügt am besten diejenige Form, in welcher von zweifachen Bedingungen nur auftreten:

$$a'^2,\ b'^2,\ c'^2,\ \alpha'^2,\ \beta'^2,\ \gamma'^2,\ a'\alpha',\ b'\beta',\ c'\gamma',$$
$$\vartheta_a's',\ \vartheta_b's',\ \vartheta_c's',\ \vartheta_a'g',\ \vartheta_b'g',\ \vartheta_c'g',\ \varepsilon'g',\ \tau's'.$$

Man hat also z. B. zu ersetzen:

$b'\alpha'$ durch $b'^2+\alpha'^2$,
$b'c'$ durch $\alpha'^2+\tau's'+\vartheta_a's'$ gemäss Formel (11),
$\alpha'\gamma'$ durch $b'^2+\varepsilon'g'+\vartheta_b'g'$ gemäss Formel (12),
$\tau'\alpha'$ durch $\alpha'^2+a'\alpha'-\varepsilon'g'-\vartheta_b'g-\vartheta_c'g'$ gemäss Formel (14)
$\vartheta_b'b'$ durch $\gamma'^2+\alpha'^2-b'\beta'+\vartheta_c's'+\vartheta_a's'+\tau's'$ gemäss Formel (15).

Bringt man dann auch noch die nichtgestrichelten Coefficienten der zweifachen Symbole vermittelst der Formeln (42) bis (47) auf die kürzeste Form, so gelangt man schliesslich zu der folgenden *Productenformel für die Zahl x der Dreiecke, welche einem zweistufigen und einem vierstufigen, gewöhnlichen Systeme gemeinsam sind.*

$$(67)\qquad \begin{aligned} x = {} & a'^2\cdot b^2c^2+b'^2\cdot c^2a^2+c'^2\cdot a^2b^2\\ & +\alpha'^2\cdot\beta^2\gamma^2+\beta'^2\cdot\gamma^2\alpha^2+\gamma'^2\cdot\alpha^2\beta^2\\ & +a'\alpha'\cdot\vartheta_a s^2g+b'\beta'\cdot\vartheta_b s^2g+c'\gamma'\cdot\vartheta_c s^2g\\ & +\vartheta_a's'\cdot\varepsilon g^2a+\vartheta_b's'\cdot\varepsilon g^2b+\vartheta_c's'\cdot\varepsilon g^2c\\ & +\vartheta_a'g'\cdot\tau s^2\alpha+\vartheta_b'g'\cdot\tau s^2\beta+\vartheta_c'g'\cdot\tau s^2\gamma\\ & +\varepsilon'g'\cdot(\tau s^2\alpha+\tau s^2\beta+\tau s^2\gamma+\psi s^2)\\ & +\tau's'\cdot(\varepsilon g^2a+\varepsilon g^2b+\varepsilon g^2c+\psi g^2).\end{aligned}$$

Aus dieser Formel erhält man durch Multiplication abgeleitete Productenformeln für die Fälle, wo die Stufensumme der gegebenen, gewöhnlichen Systeme grösser als 6 ist. Wir multipliciren die Formel (67) z. B. mit a. Dann kommt:

$$\begin{aligned} xa = {} & a'^2\cdot b^2c^2a+\beta'^2\cdot\gamma^2\alpha^2a+\gamma'^2\cdot\alpha^2\beta^2a\\ & +a'\alpha'\cdot\vartheta_a s^2ga+\vartheta_b's'\cdot\varepsilon g^2ab+\vartheta_c's'\cdot\varepsilon g^2ca\\ & +\tau's'\cdot(\varepsilon g^2ab+\varepsilon g^2ac+\psi g^2s).\end{aligned}$$

Nun ist aber xa ganz dasselbe, wie das xa' der Formel (64). Also muss die rechte Seite der vorstehenden Formel sich so umgestalten lassen, dass die rechte Seite der Formel (64) zum Vorschein kommt. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Formeln (48) bis (53) und die Formel:

$$\tau's'=a'd'-a'\alpha'-a'\beta'-a'\gamma',$$

welche aus der oben bei Formel (62) abgeleiteten Formel für die neu eingeführte Bedingung d' folgt. Wir erhalten so:

$$xa = a'^2 \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \tau \alpha^2 \gamma^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 + 2 \cdot \psi s^2 g)$$
$$+ \beta'^2 \cdot (\varepsilon a^2 b^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 + \psi s^2 g) + \gamma'^2 \cdot (\varepsilon a^2 c^2 + \tau \beta^2 \alpha^2 + \psi s^2 g)$$
$$+ a'\alpha' \cdot (\tau \beta^2 \gamma^2 + \psi s^2 g) + \vartheta_b' s' \cdot \varepsilon a^2 b^2 + \vartheta_c' s' \cdot \varepsilon c^2 a^2$$
$$+ \tau' s' \cdot (\varepsilon a^2 b^2 + \varepsilon c^2 a^2) + (a'd' - a'\alpha' - 2 \cdot a'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2) \cdot \psi s^2 g,$$

oder:

$$xa = a'^2 \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 + \tau \alpha^2 \beta^2) + \beta'^2 \cdot (\tau \gamma^2 \alpha^2 + \varepsilon a^2 b^2)$$
$$+ \gamma'^2 \cdot (\tau \alpha^2 \beta^2 + \varepsilon c^2 a^2) + \vartheta_c' s' \cdot \varepsilon c^2 a^2 + \vartheta_b' s' \cdot \varepsilon a^2 b^2$$
$$+ \tau' s' \cdot (\varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2) + a'\alpha' \cdot \tau \beta^2 \gamma^2 + a'd' \cdot \psi s^2 g.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formel mit der Formel (62) giebt eine interessante Controle der Rechnung

Die Formel (67) enthält 17 zweifache Bedingungen, und ebensoviel vierfache Bedingungen. Man erkennt aber leicht, dass nur 15 von einander unabhängige zweifache Bedingungen aufstellbar sind, welche a', b', c', α', β', γ' allein enthalten, nämlich:

$$a'^2,\ b'^2,\ c'^2,\ \alpha'^2,\ \beta'^2,\ \gamma'^2,\ a'\alpha',\ b'\beta',\ c'\gamma',$$
$$b'c',\ c'a',\ a'b',\ \beta'\gamma',\ \gamma'\alpha',\ \alpha'\beta'.$$

Führt man diese 15 Bedingungen in die Formel (67) ein, so bleiben ausserdem noch die beiden Ausartungsbedingungen $\tau' s'$ und $\varepsilon' g'$ darin. Um auch diese herauszuschaffen, definiren wir für das Dreieck zwei neue zweifache Bedingungen, *nämlich e', welche aussprechen soll, dass das Dreieck einem der ∞^1 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, die beziehungsweise durch 4 gegebene Punkte gehen, und die zu e' duale Bedingung f'.* Um e' auszudrücken, wenden wir die Formel (67) an, indem wir Σ das gewöhnliche, vierstufige System aller die Bedingung e' erfüllenden Dreiecke sein lassen. Für dieses ergiebt sich leicht:

$$b^2 c^2 = c^2 a^2 = a^2 b^2 = 0,\quad \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 \alpha^2 = \alpha^2 \beta^2 = 1,$$
$$\vartheta_a s^2 g = \vartheta_b s^2 g = \vartheta_c' s^2 g = 1,\quad \varepsilon g^2 a = \varepsilon g^2 b = \varepsilon g^2 c = 0,$$
$$\tau s^2 \alpha = \tau s^2 \beta = \tau s^2 \gamma = 0,\quad \psi s^2 = 1,\quad \psi g^2 = 2,$$

letzteres, weil es 2 Kegelschnitte giebt, welche durch 4 gegebene Punkte gehen und 1 gegebene Gerade berühren. Durch Einsetzung dieser Werthe erhält man die eben definirte, zweifache Bedingung e' ausgedrückt, wie folgt:

(68) $e' = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \varepsilon' g' + 2 \cdot \tau' s'$,

und dual entsprechend:

(69) $f' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'\alpha' + b\beta' + c'\gamma' + 2 \cdot \varepsilon' g' + \tau' s'$.

Hiernach lässt sich jede der beiden Bedingungen $\tau' s'$ und $\varepsilon' g'$ durch:

$$a'^2,\ b'^2,\ c'^2,\ \alpha'^2,\ \beta'^2,\ \gamma'^2,\ a'\alpha',\ b'\beta',\ c'\gamma',\ e',\ f'$$

ausdrücken. Führen wir demgemäss e' und f' statt $\varepsilon' g'$ und $\tau' s'$ in die Formel (67) ein, nachdem wir durch die Formeln (11) und (12) $\vartheta_a' s'$, $\vartheta_b' s'$, $\vartheta_c' s'$, $\vartheta_a' g'$, $\vartheta_b' g'$, $\vartheta_c' g'$ herausgeschafft haben, so gelangen wir zu einer Productenformel, welche von zweifachen Ausartungsbedingungen ganz frei ist, nämlich zu:

$$
\begin{aligned}
(70) \quad x = {} & a'^2 \cdot (b^2 c^2 - \tau s^2 \alpha) + b'^2 \cdot (c^2 a^2 - \tau s^2 \beta) + c'^2 (a^2 b^2 - \tau s^2 \gamma) \\
& + \alpha'^2 \cdot (\beta^2 \gamma^2 - \varepsilon g^2 a) + \beta'^2 \cdot (\gamma^2 \alpha^2 - \varepsilon g^2 b) + \gamma'^2 \cdot (\alpha^2 \beta^2 - \varepsilon g^2 c) \\
& + a' \alpha' \cdot \vartheta_a s^2 g + b' \beta' \cdot \vartheta_b s^2 g + c' \gamma' \cdot \vartheta_c s^2 g \\
& + b' c' \cdot \varepsilon g^2 a + c' a' \cdot \varepsilon g^2 b + a' b' \cdot \varepsilon g^2 c \\
& + \beta' \gamma' \cdot \tau s^2 \alpha + \gamma' \alpha' \cdot \tau s^2 \beta + \alpha' \beta' \cdot \tau s^2 \gamma \\
& + \tfrac{1}{3} (2f' - e' - 2a'^2 - 2b'^2 - 2c'^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - a' \alpha' - b' \beta' \\
& \qquad - c' \gamma') \cdot \psi s^2 \\
& + \tfrac{1}{3} (2e' - f' - 2\alpha'^2 - 2\beta'^2 - 2\gamma'^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2 - a' \alpha' - b' \beta' \\
& \qquad - c' \gamma') \cdot \psi g^2.
\end{aligned}
$$

Durch die hier auftretenden 17 zweifachen Bedingungen lässt sich auch vermöge der Formeln des § 2. jede zweifache Ausartungsbedingung ausdrücken. Es ergiebt sich z. B. aus Formel (23) zunächst:

$$
\begin{aligned}
(71\,\text{a}) \qquad \psi' = {} & \beta' \gamma' - a'^2 + \gamma' \alpha' - b'^2 + \alpha' \beta' - c'^2 \\
& + b' c' - \alpha'^2 + a' c' - \beta'^2 + a' b' - \gamma'^2 \\
& - a' \alpha' - b' \beta' - c' \gamma' - \tau' s' - \varepsilon' g',
\end{aligned}
$$

und daraus, mit Benutzung von (68) und (69):

$$
\begin{aligned}
(71\,\text{b}) \quad \psi' = {} & \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta' + b' c' + c' a' + a' b' \\
& - \tfrac{2}{3} a'^2 - \tfrac{2}{3} b'^2 - \tfrac{2}{3} c'^2 - \tfrac{2}{3} \alpha'^2 - \tfrac{2}{3} \beta'^2 - \tfrac{2}{3} \gamma'^2 \\
& - \tfrac{1}{3} a' \alpha' - \tfrac{1}{3} b' \beta' - \tfrac{1}{3} c' \gamma' - \tfrac{1}{3} e' - \tfrac{1}{3} f'.
\end{aligned}
$$

Diese Formel bezieht sich auf den Fall, wo eine *Correspondenz* zwischen drei Punkten einer Ebene so stattfindet, dass immer ein Punkt die Lage der beiden übrigen bestimmt, und ergiebt dann die Zahl derjenigen Stellen der Ebene, wo drei durch die Correspondenz zusammengehörige Punkte unendlich nahe liegen. Aus der Formel (71) ersieht man, dass es erlaubt ist, die Productenformeln mit der Ausartungsbedingung ψ' zu multipliciren, vorausgesetzt, dass keins der zu multiplicirenden Symbole selbst eine Ausartungsbedingung ist. Wir thun dies zuerst mit der Formel (63). Dann kommt:

$$
\begin{aligned}
(72) \qquad \psi x = {} & \psi' s' \cdot (\varepsilon b^2 c^2 + \varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2) \\
& + \psi' g' \cdot (\tau \beta^2 \gamma^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 + \tau \alpha^2 \beta^2) \\
& + \psi' d' \cdot (\psi s^2 g).
\end{aligned}
$$

Dann multipliciren wir auch Formel (70) mit ψ', wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}\psi x = \psi' s'^2 \cdot (b^2c^2 - \tau s^2\alpha + \varepsilon g^2 a + c^2 a^2 - \tau s^2 \beta + \varepsilon g^2 b + a^2 b^2 \\ - \tau s^2 \gamma + \varepsilon g^2 c) \\ + \psi' g'^2 \cdot (\beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \alpha + \gamma^2\alpha^2 - \varepsilon g^2 b + \tau s^2 \beta + \alpha^2\beta^2 \\ - \varepsilon g^2 c + \tau s^2 \gamma) \\ + \psi' s' g' \cdot (\vartheta_a s^2 g + \vartheta_b s^2 g + \vartheta_c s^2 g) \\ + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \psi' f' - \psi' e' - 6 \cdot \psi' s'^2 + 3 \ \psi' g'^2 - 3 \cdot \psi' s' g') \cdot \psi s^2 \\ + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \psi' e' - \psi' f' - 6 \cdot \psi' g'^2 + 3 \cdot \psi' s'^2 - 3 \cdot \psi' s' g') \cdot \psi g^2,\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}(73) \quad \psi x = \psi' s'^2 \cdot (b^2c^2 - \tau s^2 \alpha + \varepsilon g^2 a + \vartheta_a s^2 g + c^2 a^2 - \tau s^2 \beta \\ + \varepsilon g^2 b + \vartheta_b s^2 g + a^2 b^2 - \tau s^2 \gamma + \varepsilon g^2 c + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi s^2) \\ + \psi' g'^2 \cdot (\beta^2 \gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \alpha + \vartheta_a s^2 g + \gamma^2 \alpha^2 - \varepsilon g^2 b \\ + \tau s^2 \beta + \vartheta_b s^2 g + \alpha^2 \beta^2 - \varepsilon g^2 c + \tau s^2 \gamma + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi g^2) \\ + \frac{2}{3} \psi' f' \cdot \psi s^2 - \frac{1}{3} \psi' e' \cdot \psi s^2 \\ + \frac{2}{3} \psi' e' \cdot \psi g^2 - \frac{1}{3} \psi' f' \cdot \psi g^2.\end{aligned}$$

Aus den beiden abgeleiteten Productenformeln (72) und (73) werden wir in § 7. weitere Schlüsse ziehen.

§ 6.

Die Zahl der gemeinsamen Dreiecke zweier dreistufiger gewöhnlicher Systeme.

Wir haben hier aus der Stammformel (59) alle diejenigen Glieder herauszuziehen, welche drei gestrichelte und drei nichtgestrichelte Bedingungsfactoren enthalten. Die so resultirende Productenformel haben wir dann vermittelst der Incidenzformeln und der Formeln des § 2. in eine Gestalt zu bringen, welche folgenden Ansprüchen genügt. Die umgestaltete Productenformel muss in sich selbst übergehen, erstens, wenn man zwei der Buchstaben a, b, c und zugleich die entsprechenden griechischen Buchstaben mit einander vertauscht, zweitens, wenn man die lateinischen Buchstaben a, b, c mit den entsprechenden griechischen Buchstaben sowie τ mit ε und s mit g vertauscht, drittens aber auch, wenn man die gestrichelten mit den nichtgestrichelten Symbolen vertauscht. Von allen Formen, welche diesen Ansprüchen genügen, scheint dem Verfasser am kürzesten die folgende zu sein. Die Zahl x der Dreiecke, welche einem dreistufigen Systeme Σ und einem andern dreistufigen Systeme Σ' gemeinsam sind, ergiebt sich durch die Productenformel:

$$
\begin{aligned}
(74)\quad x = {} & a'^2\beta' \cdot b^2\alpha + a'^2\gamma' \cdot c^2\alpha + b'^2\alpha' \cdot a^2\beta \\
& + b'^2\gamma' \cdot c^2\beta + c'^2\alpha' \cdot a^2\gamma + c'^2\beta' \cdot b^2\gamma \\
& + \vartheta'_a s'^2 \cdot \varepsilon a^2 + \vartheta'_b s'^2 \cdot \varepsilon b^2 + \vartheta'_c s'^2 \cdot \varepsilon c^2 \\
& + \vartheta'_a g'^2 \cdot \tau\alpha^2 + \vartheta'_b g'^2 \cdot \tau\beta^2 + \vartheta'_c g'^2 \cdot \tau\gamma^2 \\
& + \varepsilon' a'^2 \cdot \vartheta_a s^2 + \varepsilon' b'^2 \cdot \vartheta_b s^2 + \varepsilon' c'^2 \cdot \vartheta_c s^2 \\
& + \tau'\alpha'^2 \cdot \vartheta_a g^2 + \tau'\beta'^2 \cdot \vartheta_b g^2 + \tau'\gamma'^2 \cdot \vartheta_c g^2 \\
& + \vartheta'_a g'^2 \cdot \vartheta_b g^2 + \vartheta'_a g'^2 \cdot \vartheta_c g^2 + \vartheta'_b g'^2 \cdot \vartheta_c g^2 \\
& + \vartheta'_b g'^2 \cdot \vartheta_a g^2 + \vartheta'_c g'^2 \cdot \vartheta_a g^2 + \vartheta'_c g'^2 \cdot \vartheta_b g^2 \\
& + \vartheta'_a s'^2 \cdot \vartheta_b s^2 + \vartheta'_a s'^2 \cdot \vartheta_c s^2 + \vartheta'_b s'^2 \cdot \vartheta_c s^2 \\
& + \vartheta'_b s'^2 \cdot \vartheta_a s^2 + \vartheta'_c s'^2 \cdot \vartheta_a s^2 + \vartheta'_c s'^2 \cdot \vartheta_b s^2 \\
& + a'b'c' \cdot \varepsilon g^2 + \alpha'\beta'\gamma' \cdot \tau s^2 + \varepsilon' g'^2 \cdot abc + \tau' s'^2 \cdot \alpha\beta\gamma \\
& - \varepsilon' g'^2 \cdot \varepsilon g^2 - \tau' s'^2 \cdot \tau s^2 - 2 \cdot \varepsilon' g'^2 \cdot \tau s^2 - 2 \cdot \tau' s'^2 \cdot \varepsilon g^2 .
\end{aligned}
$$

Man überzeugt sich leicht, dass, wie hier, so auch bei jeder Darstellung der gesuchten Zahl x die Kenntniss von mindestens 22 Anzahlen für jedes System gefordert wird.

Beispiele.

I) Will man eine dreifache, auf a, b, c, α, β, γ bezügliche Lagebedingung durch die eingeführten 22 Bedingungen ausdrücken, so gelangt man durch Anwendung der Formel (74) oft schneller zum Ziel, als durch Anwendung der Formeln des § 2. Handelt es sich z. B. darum, die Bedingung $a^2\alpha$ auszudrücken, so denkt man sich jedes der 22 gestrichelten Symbole mit $a'^2\alpha'$ multiplicirt. Dann erhält man sechsfache gestrichelte Symbole, deren Zahlenwerthe leicht erkennbar sind. Es ist nämlich $\vartheta'_a s'^2 a'^2 \alpha' = 1$, $\alpha'\beta'\gamma' a'^2 \alpha' = 1$, und die übrigen 20 Symbole ergeben Null. Setzt man diese Werthe ein, so kommt:

$$(75)\qquad a^2\alpha = \varepsilon a^2 + \vartheta_b s^2 + \vartheta_c s^2 + \tau s^2,$$

eine Formel, die man auch erhält, wenn man Formel (8) mit a^2 multiplicirt. Die dual entsprechende Betrachtung giebt:

$$(76)\qquad a\alpha^2 = \tau\alpha^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2 + \varepsilon g^2 .$$

II) Um die dreifache Bedingung v auszudrücken, dass ein Dreieck einer Curve $n$ter Ordnung einbeschrieben sein soll, betrachten wir das dreistufige System Σ' aller diese Bedingung erfüllenden Dreiecke, und erkennen für dieses System:

$$\vartheta'_a g'^2 = \vartheta'_b g'^2 = \vartheta'_c g'^2 = n(n-1), \qquad a'b'c' = n^3,$$
$$\alpha'\beta'\gamma' = n(n-1)(2n-3),$$

wie schon in § 2. bei Beispiel II) abgeleitet ist,

$$\varepsilon' g'^2 = n(n-1)(n-2);$$

die übrigen 16 Symbole haben den Werth Null. Also kommt:

$$v = n(n-1)(\tau\alpha^2 + \tau\beta^2 + \tau\gamma^2) + 2 \cdot n(n-1) \cdot (\vartheta_a g^2 + \vartheta_b g^2 + \vartheta_c g^2)$$
$$+ n^3 \cdot \varepsilon g^2 + n(n-1)(2n-3) \cdot \tau s^2 + n(n-1)(n-2) \cdot abc$$
$$- n(n-1)(n-2) \cdot \varepsilon g^2 - 2 \cdot n(n-1)(n-2) \cdot \tau s^2.$$

Vereinfacht man den erhaltenen Ausdruck und führt man dann gemäss Formel (76) die Symbole $a\alpha^2$, $b\beta^2$, $c\gamma^2$ ein, so kommt:

(77) $$v = n(n-1) \cdot (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \tau s^2)$$
$$+ n(n-1)(n-2) \cdot abc + n \cdot \varepsilon g^2.$$

Hiernach kann man bei jedem gewöhnlichen dreistufigen Dreieckssysteme leicht berechnen, wie gross die Zahl der einer Curve einbeschriebenen Dreiecke des Systems ist, wenn man für dieses System die Zahlen $a\alpha^2$, $b\beta^2$, $c\gamma^2$, abc, τs^2, εg^2 angeben kann.

Die dual entsprechende Betrachtung ergiebt für die dreifache Bedingung u, dass ein Dreieck einer Curve $r$ten Ranges umbeschrieben sein soll:

(78) $$u = r(r-1)(a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma + \varepsilon g^2)$$
$$+ r(r-1)(r-2) \cdot \alpha\beta\gamma + r \cdot \tau s^2.$$

Will man nach Formel (77) die Zahl x derjenigen Dreiecke berechnen, welche einer Curve $n$ter Ordnung und zugleich einer Curve $m$ter Ordnung einbeschrieben sind, so hat man für das System aller der letztgenannten Curve einbeschriebenen Dreiecke die in Formel (77) erschienenen Symbole zu berechnen. Dann ergiebt sich

$$a\alpha^2 = b\beta^2 = c\gamma^2 = m(m-1) \cdot m, \quad \tau s^2 = 0,$$
$$abc = m^3, \quad \varepsilon g^2 = m(m-1)(m-2).$$

Setzt man diese Werthe in Formel (77) ein, so erhält man für die gesuchte Zahl

$$x = n(n-1) \cdot 3 \cdot m^2(m-1)$$
$$+ n(n-1)(n-2) \cdot m^3 + n \cdot m(m-1)(m-2),$$

oder vereinfacht:

$$x = mn(mn-1)(mn-2),$$

was man von vornherein wissen konnte, weil eine Curve $n$ter Ordnung eine Curve $m$ter Ordnung in $m \cdot n$ Punkten schneidet. Will man die Unterscheidung der Ecken a, b, c fallen lassen, so hat man das Resultat durch die Zahl 6 der Permutationen von 3 Elementen zu dividiren.

Will man zweitens nach Formel (78) die Zahl y derjenigen Dreiecke berechnen, welche einer Curve $r$ten Ranges umbeschrieben und zugleich einer Curve $n$ter Ordnung einbeschrieben sind, so hat man in dieser Formel zu setzen:

$$a^2\alpha = b^2\beta = c^2\gamma = 0, \quad \varepsilon g^2 = n(n-1)(n-2),$$
$$\alpha\beta\gamma = n(n-1)(2n-3), \quad \tau s^2 = 0.$$

Dann kommt für die gesuchte Zahl y:

$$y = r(r-1)\cdot n(n-1)(n-2) + r(r-1)(r-2)\cdot n(n-1)\cdot(2n-3)$$

oder:

$$(79) \qquad y = r(r-1).n(n-1)\cdot(2\cdot nr - 3\cdot n - 3\cdot r + 4).$$

Dieser Ausdruck verschwindet ausser in den Fällen $n = 1$ und $r = 1$ nur noch in dem Falle, wo $n = 2$ und $r = 2$ ist. *Die Zahl der einer Curve einbeschriebenen und zugleich einer andern Curve umbeschriebenen Dreiecke ist also nur dann gleich Null, wenn beide Curven Kegelschnitte sind.*

III) Für die Bedingung j, dass ein Dreieck in Bezug auf einen festen Kegelschnitt sich selbst conjugirt sei, ergiebt sich aus der Productenformel (74):

$$(80) \quad j = b^2\alpha + c^2\alpha + a^2\beta + c^2\beta + a^2\gamma + b^2\gamma + 2\cdot\varepsilon g^2 + 2\cdot\tau s^2,$$

weil $a'^2\beta'$ und die analogen Symbole gleich 1, $a'b'c' = 2$, $\alpha'\beta'\gamma = 2$ und die übrigen Symbole gleich Null zu setzen sind. Aus Formel (80) erhält man also für die Zahl der in Bezug auf 2 feste Kegelschnitte sich selbst conjugirten Dreiecke den Werth 6, also den Werth 1, wenn die Ecken nicht unterschieden werden.

§ 7.

Productenformeln für das unendlich kleine Dreieck.

Das unendlich kleine Dreieck ψ (§ 1.) ist dadurch charakterisirt, dass seine drei Ecken, wie drei aufeinanderfolgende Punkte einer Curve, unendlich nahe liegen. Es hat die Constantenzahl 4, besitzt einen besonderen Punkt, den wir auch hier s nennen wollen, und einen besonderen Strahl, der auch hier g heissen soll. Die oben mit η und ζ bezeichneten dreistufigen Ausartungen des allgemeinen Dreiecks sind als einstufige Ausartungen des unendlich kleinen Dreiecks ψ zu betrachten, und sollen auch in dieser Hinsicht η und ζ genannt werden. Zwischen den 4 einfachen Bedingungen des Dreiecks ψ

$$s,\ g,\ \eta,\ \zeta$$

besteht eine Gleichung, welche schon oben (Nr. 41.) abgeleitet ist, und hier, wie folgt, zu schreiben ist:

$$3\cdot s + \eta = 3\cdot g + \zeta.$$

Die Productenformeln des Dreiecks ψ ergeben sich aus den Formeln

(72) und (73), wenn man noch die nichtgestrichelten Coefficienten der gestrichelten Symbole so umformt, dass auch sie sämmtlich ψ oder η oder ζ als Factor erhalten. Dies gelingt auf folgende Weise. Es ist:

$$\varepsilon a^2 b^2 + \varepsilon b^2 c^2 + \varepsilon c^2 a^2 = \varepsilon g^2 (ab + bc + ca)$$
$$= \varepsilon g^2 (a+b-g)(a+c-g) = \eta g^2,$$

ebenso:

$$\tau \alpha^2 \beta^2 + \tau \beta^2 \gamma^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 = \zeta s^2$$

Demnach folgt aus (72):

(81) $$x = s' \cdot \eta g^2 + g' \cdot \zeta s^2 + d' \cdot s^2 g$$

als die Zahl x derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche einem gegebenen einstufigen Systeme Σ' und einem davon unabhängigen, dreistufigen Systeme Σ gemeinsam sind. Hier bedeutet d' die einfache Bedingung, dass ein Σ' angehöriges unendlich kleines Dreieck einem der ∞^2 Kegelschnitte einbeschrieben ist, welche durch 3 gegebene Punkte gehen.

Um analog bei Formel (73) zu verfahren, wenden wir Formel (46) an, und erhalten:

$$\beta^2\gamma^2 - \varepsilon g^2 a + \tau s^2 \alpha + \vartheta_a s^2 g + \gamma^2 \alpha^2 - \varepsilon g^2 b + \tau s^2 \beta + \vartheta_b s^2 g$$
$$+ \alpha^2 \beta^2 - \varepsilon g^2 c + \tau s^2 \gamma + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi g^2$$
$$= \tau s \beta\gamma + \tau s \gamma \alpha + \tau s \alpha \beta - \tau s^2 \alpha - \tau s^2 \beta - \tau s^2 \gamma$$
$$= \tau s (\alpha + \beta - s)(\alpha + \gamma - s) = \zeta s;$$

und dual entsprechend:

$$b^2 c^2 - \tau s^2 \alpha + \varepsilon g^2 a + \vartheta_a s^2 g + c^2 a^2 - \tau s^2 \beta + \varepsilon g^2 b + \vartheta_b s^2 g$$
$$+ a^2 b^2 - \tau s^2 \gamma + \varepsilon g^2 c + \vartheta_c s^2 g - 3 \cdot \psi s^2 = \eta g.$$

Demnach folgt aus (73)

(82) $$y = s'^2 \cdot \eta g + g'^2 \cdot \zeta s + f' \cdot \frac{2s^2 - g^2}{3} + e' \cdot \frac{2g^2 - s^2}{3}$$

als die Zahl y derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche zweien von einander unabhängigen, zweistufigen Systemen Σ' und Σ gemeinsam sind. Hier bedeutet e' die zweifache Bedingung, dass ein Σ' angehöriges Dreieck einem der ∞^1 Kegelschnitte einbeschrieben sein soll, welche durch 4 gegebene Punkte gehen, und f' die dual entsprechende Bedingung.

Es liegt nahe, die Productenformeln (81) und (82) so umzugestalten, dass sie nur die auf s', g', η', ζ' bezüglichen Symbole enthalten. Um zunächst d' zu entfernen, gehen wir auf die oben für das allgemeine Dreieck entwickelten Formeln zurück. In § 4. ergab sich:

$$d' - a' - b' - c' = \varepsilon'.$$

Ferner folgt aus (71a):

$$\psi' + \tau' s' + \varepsilon' g' = \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2$$
$$+ b'c' + c'a' + a'b' - a'^2 - b'^2 - c'^2 - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma'.$$

Multiplicirt man die linken Seiten dieser beiden Formeln mit einander, ebenso die rechten Seiten, und setzt dann die erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man:

$$\psi' d' - 3\cdot\psi' s' + \tau' s' d' + \varepsilon' g' d' - 3\cdot\tau' s'^2 - \varepsilon' g' a' - \varepsilon' g' b' - \varepsilon' g' c'$$
$$= \varepsilon' b' c' + \varepsilon' c' a' + \varepsilon' a' b' - \varepsilon' a'^2 - \varepsilon' b'^2 - \varepsilon' c'^2 - \varepsilon' g' a' - \varepsilon' g' b' - \varepsilon' g' c'$$

oder:

$$(83)\qquad \psi' d' = 3\cdot\psi' s' - \tau' s' d' - \varepsilon' g' d' + 3\cdot\tau' s'^2 + 3\cdot\varepsilon' g'^2$$
$$+ \varepsilon'(a'+b'-g')(a'+c'-g').$$

Nun ist $\varepsilon'(a'+b'-g')(a'+c'-g') = \eta'$. Um auch $\varepsilon' g' d'$ und $\tau' s' d'$ zu bestimmen, beachten wir, dass ein die Definition von ε erfüllendes Dreieck nur dann einem Kegelschnitte einbeschrieben sein kann, wenn derselbe ausgeartet ist, dass also bei einem $\varepsilon' g' d'$ erfüllenden Dreiecke die drei Ecken a, b, c nothwendig irgendwo auf einer der drei Geraden liegen müssen, welche den Punkt der Bedingung g' mit einem der drei Punkte verbinden, die von der Bedingung d' als gegeben vorausgesetzt werden; dann besteht nämlich der durch die 3 Punkte von d' gehende Kegelschnitt aus der erwähnten Geraden und der die beiden übrigen Punkte von d' verbindenden Geraden. Folglich ist:

$$\varepsilon' g' d' = 3\cdot\varepsilon g'^2 \quad\text{und ebenso:}\quad \tau' s' d' = 3\cdot\tau' s'^2.$$

Folglich ergiebt sich aus (83) die Formel:

$$(84)\qquad \psi' d' = 3\cdot\psi' s' + \eta'.$$

Ebenso oder auch durch Formel (41) erhält man:

$$(85)\qquad \psi' d' = 3\cdot\psi' g' + \zeta'.$$

Aus (84) und (85) ergeben sich durch Multiplication mit s', g', s'^2, g'^2 und Benutzung der Incidenzformeln:

$$(86)\qquad \psi' d' s' = 3\cdot\psi' s'^2 + \eta' s' = 3\cdot\psi' s'^2 + 3\cdot\psi' g'^2 + \zeta' s',$$
$$(87)\qquad \psi' d' g' = 3\cdot\psi' s'^2 + 3\cdot\psi' g'^2 + \eta' g' = 3\cdot\psi' g'^2 + \zeta' g',$$
$$(88)\qquad \psi' d' s'^2 = \eta' s'^2 = 3\cdot\psi' s'^2 g' + \zeta' s'^2,$$
$$(89)\qquad \psi' d' g'^2 = 3\cdot\psi' s'^2 g' + \eta' g'^2 = \zeta' g'^2.$$

Um zweitens auch $\psi' e'$ auszudrücken, schreiben wir die Formel (68), wie folgt:

$$e' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma' = \varepsilon' g' + 2\cdot\tau' s',$$

und die Formel (71a) folgendermassen:

$$\psi' + \tau' s' + \varepsilon' g' = \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2$$
$$+ b'c' + c'a' + a'b' - a'^2 - b'^2 - c'^2 - a'\alpha' - b'\beta' - c'\gamma'.$$

Dann multipliciren wir sowohl die linken Seiten, wie auch die rechten Seiten mit einander, und erhalten:

$$\psi' e' - 6\cdot\psi' g'^2 - 3\cdot\psi' s'^2 + \tau' s' e' + \varepsilon' g' e'$$
$$- 2\cdot\tau' s'^2\alpha' - 2\cdot\tau' s'^2\beta' - 2\cdot\tau' s'^2\gamma' - \varepsilon' g'^2 a' - \varepsilon' g'^2 b' - \varepsilon' g'^2 c'$$
$$= \varepsilon' g' b' c' + \varepsilon' g' c' a' + \varepsilon' g' a' b' - 2\cdot\varepsilon' g'^2 a' - 2\cdot\varepsilon' g'^2 b' - 2\cdot\varepsilon' g'^2 c'$$
$$+ 2\cdot\tau' s'\beta'\gamma' + 2\cdot\tau' s'\gamma'\alpha' + 2\cdot\tau' s'\alpha'\beta' - 4\cdot\tau' s'^2\alpha' - 4\cdot\tau' s'^2\beta' - 4\cdot\tau' s'^2\gamma',$$

oder:

$$\psi' e' = 6\cdot\psi' g'^2 + 3\cdot\psi' s'^2 - \tau' s' e' - \varepsilon' g' e' + \varepsilon g'(a' + b' - g')(a' + c' - g') + 2\cdot\tau' s'(\alpha' + \beta' - s')(\alpha' + \gamma' - s'). \tag{90}$$

Von den 6 Gliedern auf der rechten Seite dieser Gleichung sind das fünfte und sechste bezüglich $\eta' g'$ und $2\cdot\zeta' s'$. Es handelt sich also nur noch darum, $\tau' s' e'$ und $\varepsilon' g' e'$ zu bestimmen. Ein durch die 4 Punkte der Bedingung e' gehender Kegelschnitt kann nur dann ein einbeschriebenes Dreieck von der Definition τ' oder ε' enthalten, wenn er zu einem der drei durch die 4 Punkte bestimmten Geradenpaare wird. Dann muss aber der Punkt s' des Dreiecks τ' in den Schnittpunkt des Geradenpaares fallen, und die Gerade g' des Dreiecks ε' in eine der beiden Geraden. Folglich kann keine der beiden dreifachen Bedingungen $\tau' s' e'$ und $\varepsilon' g' e'$ jemals erfüllt werden. Deshalb ergiebt sich aus (90):

$$\psi' e' = 6\cdot\psi' g'^2 + 3\cdot\psi' s'^2 + \eta' g' + 2\cdot\zeta' s'. \tag{91}$$

Die dual entsprechende Betrachtung liefert:

$$\psi' f' = 6\cdot\psi' s'^2 + 3\cdot\psi' g'^2 + \zeta' s' + 2\cdot\eta' g'. \tag{92}$$

Die in den eben abgeleiteten Gleichungen (84), (85), (91), (92) gefundenen Ausdrücke für $\psi' d'$, $\psi' e'$, $\psi' f'$ setzen wir nun in die beiden Productenformeln (81) und (82) ein. Dadurch erhalten wir die folgenden Resultate:

I) *Die Zahl x_{13} der unendlich kleinen Dreiecke, welche einem einstufigen Systeme Σ' und einem davon unabhängigen, dreistufigen Systeme Σ gemeinsam sind, ergiebt sich aus:*

$$x_{13} = s'\cdot\eta g^2 + g'\cdot\zeta s^2 + (3\cdot s' + \eta')\cdot s^2 g = s'\cdot\eta g^2 + g'\cdot\zeta s^2 + (3\cdot g' + \zeta')\cdot s^2 g. \tag{93}$$

II) *Die Zahl x_{22} der unendlich kleinen Dreiecke, welche zweien von einander unabhängigen, zweistufigen Systemen Σ' und Σ von unendlich kleinen Dreiecken gemeinsam sind, ergiebt sich aus:*

$$x_{22} = s'^2\cdot\eta g + g'^2\cdot\zeta s + \eta' g'\cdot s^2 + \zeta' s'\, g^2 + 3\cdot s'^2\cdot s^2 + 3\cdot g'^2\cdot g^2. \tag{94}$$

Wegen der durch die Formeln (86) bis (89) ausgedrückten Beziehungen kann man diese Productenformeln noch in vielen anderen Formen schreiben, z. B. Formel (93) in den beiden Formen:

(95) $$x_{13} = s' \cdot g^2\eta + g' \cdot s^2\eta + \zeta' \cdot s^2 g,$$

(96) $$x_{13} = s' \cdot g^2\zeta + g' \cdot s^2\zeta + \eta' \cdot s^2 g.$$

Von den abgeleiteten Productenformeln erwähnen wir diejenigen, welche auf die Fälle Bezug nehmen, wo das eine gegebene System zweistufig, das andere dreistufig ist und wo beide Systeme dreistufig sind. Multiplicirt man (93) mit s' oder (94) mit s, so ergiebt sich beide Mal nach Benutzung der Formeln (86) bis (89) ein und derselbe Ausdruck für *die Zahl sx_{23} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche einem zweistufigen Systeme Σ' und einem dreistufigen Systeme Σ gemeinsam sind, und welche dabei ihren Punkt s auf einer gegebenen Geraden haben. Diese Zahl erhält man nämlich aus:*

(97) $$sx_{23} = s'^2 \cdot \eta g^2 + (s'^2 + g'^2) \cdot \zeta s^2 + (3 \cdot s'^2 + 3 \cdot g'^2 + \zeta' s') \cdot s^2 g.$$

Die dual entsprechende Zahl gx_{23} ergiebt sich aus:

(98) $$gx_{23} = g'^2 \cdot \zeta s^2 + (s'^2 + g'^2) \cdot \eta g^2 + (3 \cdot s'^2 + 3 \cdot g'^2 + \eta' g') \cdot s^2 g.$$

Multiplicirt man ferner (93) mit s'^2 oder (94) mit $s's$, so erhält man beide Mal einen und denselben Ausdruck *für die Zahl s^2x_{33} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, welche zwei dreistufigen Systemen Σ und Σ' gemeinsam sind, und welche dabei ihren Punkt s in einem gegebenen Punkte haben. Für diese Zahl ergiebt sich nämlich:*

(99) $$s^2x_{33} = s'^2 g' \cdot \zeta s^2 + \zeta' s'^2 \cdot s^2 g + 3 \cdot s'^2 g' \cdot s^2 g.$$

Für die dual entsprechende Zahl g^2x_{33} erhält man:

(100) $$g^2x_{33} = s'^2 g' \cdot \eta g^2 + \eta' g'^2 \cdot s^2 g + 3 \cdot s'^2 g' \cdot s^2 g.$$

Es gelingt auch, in dem Falle, wo das eine System zweistufig, das andere dreistufig ist, die Zahl ηx_{23} auszudrücken, welche angeben soll, wie oft es bei den ∞^1 gemeinsamen, unendlich kleinen Dreiecken vorkommt, dass die drei unendlich nahen gemeinsamen Punkte in gerader Linie liegen. Zu diesem Zwecke gehen wir auf die Formel (81) zurück, weil bei dieser keins der gestrichelten Symbole ein Ausartungssymbol ist, und multipliciren dieselbe mit η'. Dann kommt:

$$\eta x_{23} = \eta' s' \cdot \eta g^2 + \eta' g' \cdot \zeta s^2 + \eta' d' \cdot s^2 g.$$

Dann ersetzen wir gemäss Formel (86) $\eta' s'$ durch $3g'^2 + \zeta' s'$ und $\eta' d'$ durch $3 \cdot \eta' g'$. Dass $\eta' d' = 3 \cdot \eta' g'$ ist, ergiebt sich direct geometrisch aus dem Umstande, dass die Erfüllung der Bedingung $\eta' d'$ nur durch einen in ein Geradenpaar zerfallenen Kegelschnitt ermöglicht wird. Daher kommt:

(101) $$\eta x_{23} = \zeta' s' \cdot \eta g^2 + \eta' g' \cdot \zeta s^2 + 3 \cdot g'^2 \cdot \eta g^2 + 3 \cdot \eta' g' \cdot s^2 g,$$

und dual entsprechend:

(102) $$\zeta x_{23} = \eta' g' \cdot \zeta s^2 + \zeta' s' \cdot \eta g^2 + 3 \cdot s'^2 \cdot \zeta s^2 + 3 \cdot \zeta' s' \cdot s^2 g.$$

Multiplicirt man dann (101) mit g', so gelangt man zu der Zahl $\eta g x_{33}$, welche angiebt, wie oft es bei den ∞^2 gemeinsamen unendlich kleinen Dreiecken von zwei dreistufigen Systemen vorkommt, dass die drei unendlich nahen, gemeinsamen Punkte in einer geraden Linie liegen, welche einen gegebenen Punkt trifft. Man erhält:

$$(103)\quad \eta g x_{33} = \eta g^2 \cdot \eta' g'^2 + \zeta s^2 \cdot \eta' g'^2 + \eta g^2 \cdot \zeta' s'^2 + 3 \cdot s^2 g \cdot \eta' g'^2 + 3 \cdot \eta g^2 \cdot s'^2 g',$$

und dual entsprechend:

$$(104)\quad \zeta s x_{33} = \zeta s^2 \cdot \zeta' s'^2 + \eta g^2 \cdot \zeta' s'^2 + \zeta s^2 \cdot \eta' g'^2 + 3 \cdot s^2 g \cdot \zeta' s'^2 + 3 \cdot \zeta s^2 \cdot s'^2 g'.$$

§ 8.

Lösung der Anzahlprobleme der dreipunktigen Berührung durch die Formeln des § 7.*).

Fasst man auf einer Plancurve immer je 3 consecutive Punkte oder Tangenten zu einem unendlich kleinen Dreieck zusammen, so erhält man ein einstufiges System solcher Dreiecke, dessen Punkte s die Curve selbst beschreiben, dessen Strahlen g dieselbe einhüllen, dessen Ausartungen von der Definition η in den Wendetangenten liegen, und dessen Ausartungen ζ durch die Spitzen der Curve erzeugt werden. Demnach ist für ein solches einstufiges System zu setzen:

$$s = n, \quad g = n', \quad \eta = \varkappa', \quad \zeta = \varkappa$$

wo n die Ordnung der Curve bezeichnet, n' ihren Rang, $\varkappa'$ die Zahl ihrer Wendetangenten, $\varkappa$ die Zahl ihrer Spitzen. Die zwischen s, g, η, ζ bestehende Gleichung liefert für das durch die Curve erzeugte, specielle System eine Plücker'sche Formel, wie schon in dem ersten Beispiele zu § 2. erkannt ist.

Hat man nun ein einstufiges Curvensystem, so erhält man ein zweistufiges System von unendlich kleinen Dreiecken, wenn man in derselben Weise auf jeder der ∞^1 Curven je drei consecutive Punkte zu einem unendlich kleinen Dreieck zusammenfasst. Für ein so definirtes zweistufiges System von Dreiecken ψ bekommen die Symbole des § 7. die folgenden Werthe:

$$s^2 = \mu, \quad g^2 = \mu', \quad \eta g = k', \quad \zeta s = k,$$

wo μ angiebt, wieviel Curven des Curvensystems durch einen gegebenen Punkt gehen, μ', wieviel eine gegebene Gerade berühren, wo ferner k' den Rang der von den Wendetangenten eingehüllten Curve und k die Ordnung der von den Spitzen beschriebenen Curve bezeichnen.

*) Diese Anwendung habe ich inzwischen schon durch die Gött. Nachr. (Juniheft 1880) publicirt.

In derselben Weise erhält man aus einem zweistufigen Curvensysteme ein dreistufiges System von unendlich kleinen Dreiecken, für welches man zu setzen hat:

$$s^2 g = M, \quad \eta g^2 = K', \quad \zeta s^2 = K,$$

wo M angiebt, wieviel Curven des zweistufigen Systems eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, wo K' angiebt, wieviel Curven eine gegebene Wendetangente haben, und wo K angiebt, wieviel Curven eine gegebene Spitze haben. Man bemerke noch, dass andere auf η und ζ bezügliche Symbole, als die angeführten ηg, ζs, ηg^2, ζs^2 auch von Ausartungen erfüllt werden können. Beispielsweise würde die Bedingung ηs^2 erstens von jeder Curve erfüllt werden, von welcher ein Wendepunkt in den durch die Bedingung s^2 gegebenen Punkt fällt, zweitens aber auch von jeder ausgearteten Curve, welche eine einfache oder mehrfache Ordnungsgerade durch den gegebenen Punkt der Bedingung s^2 schickt.

Wenn nun die von zwei Curven in der erörterten Weise erzeugten Systeme von unendlich kleinen Dreiecken *ein unendlich kleines Dreieck gemeinsam haben*, so heisst dies nichts anderes, als dass die beiden Curven *sich dreipunktig berühren*. Deshalb erhält man aus den Formeln (93), (94) und (97) bis (104) unmittelbar die auf dreipunktige Berührung bezüglichen Anzahlen, sobald man nur die soeben für die Symbole s, g, η, ζ, s^2, g^2, ηg, ζs, $s^2 g$, ηg^2, ζs^2 erkannten Werthe n, n', $\varkappa'$, $\varkappa$, μ, μ', k', k, M, K', K einsetzt. Die letztgenannten Buchstaben sollen dabei immer den Index i bekommen, wenn sie sich auf eine Curve oder ein Curvensystem beziehen, welches schon mit Σ_i bezeichnet ist. Aus Formel (93) ergiebt sich also das Resultat:

93a) *Ein gegebenes, zweistufiges Curvensystem Σ_2 enthält immer*

$$n_1 \cdot K_2' + n_1' \cdot K_2 + (3 \cdot n_1 + \varkappa_1') \cdot M_2$$

*Curven, welche eine gegebene Curve Σ_1 dreipunktig berühren.**)

Ebenso folgt aus (94) unmittelbar der Satz:

(94a) *Wenn zwei einstufige Curvensysteme Σ_1 und Σ_2 gegeben sind, so kommt es*

$$\mu_1 \cdot k_2' + \mu_1' \cdot k_2 + k_1' \cdot \mu_2 + k_1 \cdot \mu_2' + 3 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 + 3 \cdot \mu_1' \cdot \mu_2'$$

*Male vor, dass eine Curve des einen Systems eine Curve des andern Systems dreipunktig berührt.***)

---

*) Diese Anzahl bestimmte zuerst Halphen im Bull de la Soc math., tome 5, p. 14, durch Correspondenzbetrachtungen, dann auch Zeuthen in. d. Comptes rendus, tome 89, p. 901 durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl.

**) Diese Anzahl bestimmte Zeuthen durch dieselbe Methode, wie die vorhergehende in den Comptes rendus, tome 89, p. 917.

Aus (97) und (98) folgt:

(97a) *Sind ein einstufiges Curvensystem* Σ_1 *und ein zweistufiges* Σ_2 *gegeben, so kommt es* ∞^1 *Male vor, dass zwei den beiden Systemen angehörige Curven sich in denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren. Die dadurch hervorgerufenen* ∞^1 *Berührungspunkte bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$\mu_1 \cdot (K_2 + K_2' + 3 \cdot M_2) + \mu_1' \cdot (K_2 + 3 \cdot M_2) + k_1 \cdot M_2,\text{*)}$$

und die Tangenten in den Berührungspunkten hüllen eine Curve ein vom Range:

$$\mu_1 \cdot (K_2' + 3 \cdot M_2) + \mu_1' \cdot (K_2 + K_2' + 3 \cdot M_2) + k_1' \cdot M_2.$$

Aus (99) und (100) folgt:

(99a) und (100a) *Sind zwei zweistufige Curvensysteme* Σ_1 *und* Σ_2 *gegeben, so kommt es* ∞^2 *Male vor, dass zwei den beiden Systemen angehörige Curven sich in denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren, und zwar geschieht dies in jedem Punkte der Ebene so oft, wie die folgende Anzahl angiebt:*

$$M_1 \cdot K_2 + K_1 \cdot M_2 + 3 \cdot M_1 \cdot M_2.$$

Ferner tritt dabei jeder Strahl der Ebene so oft als Berührungstangente auf, wie die folgende Zahl angiebt:

$$M_1 \cdot K_2' + K_1' \cdot M_2 + 3 \cdot M_1 \cdot M_2.$$

Endlich liefern die Formeln (101) bis (104) die folgenden Sätze.

(101a) und (102a). *Bei den* ∞^1 *dreipunktigen Berührungen zwischen einer Curve eines gegebenen einstufigen Curvensystems* Σ_1 *und einer Curve eines gegebenen zweistufigen Curvensystems* Σ_2 *kommt es eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei unendlich nahen Schnittpunkte in gerader Linie liegen, und zwar so oft, wie die folgende Zahl angiebt:*

$$k_1 \cdot K_2' + k_1' \cdot K_2 + 3\mu_1' \cdot K_2' + 3 \cdot k_1' \cdot M_2.$$

Es kommt ferner auch eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei an einer Berührungsstelle unendlich nahen gemeinsamen Tangenten sich in demselben Punkte schneiden, und zwar so oft, wie die folgende Zahl angiebt:

$$k_1' \cdot K_2 + k_1 \cdot K_2' + 3\mu_1 \cdot K_2 + 3 \cdot k_1 \cdot M_2.$$

(103a) u. (104a). *Bei den* ∞^2 *dreipunktigen Berührungen zwischen zwei Curven zweier zweistufiger Curvensysteme* Σ_1 *und* Σ_2 *kommt es* ∞^1 *mal vor, dass die drei unendlich nahen Schnittpunkte in einer geraden Linie liegen. Die so erzeugten* ∞^1 *geraden Linien hüllen eine Curve ein vom Range:*

---

*) Diese Anzahl, sowie alle folgenden Anzahlen dieses Paragraphen dürften neu sein. Die Formeln (97a) und (99a) theilte ich Herrn Zeuthen brieflich mit, er fand dieselben dann auch durch seine Methode.

$$K_1' \cdot K_2' + K_1 \cdot K_2' + K_1' \cdot K_2 + 3 \cdot M_1 \cdot K_2' + 3 \cdot K_1' \cdot M_2 .$$

Es kommt ferner auch ∞^1 mal vor, dass die drei an einer Berührungsstelle unendlich nahen gemeinsamen Tangenten sich in demselben Punkte schneiden. Die so erzeugten ∞^1 Punkte bilden eine Curve von der Ordnung

$$K_1 \cdot K_2 + K_1' \cdot K_2 + K_1 \cdot K_2' + 3 \cdot M_1 \cdot K_2 + 3 \cdot K_1 \cdot M_2 .$$

Aus den Formeln des § 7. resultiren unmittelbar auch alle diejenigen Zahlen, welche sich auf die gemeinsamen unendlich kleinen Dreiecke von *mehr als zwei* Systemen beziehen. Der Kürze wegen haben wir diese Zahlen selbst nicht angeführt. Statt dessen wollen wir aber hier diejenigen Zahlen schreiben, welche sich aus ihnen für die dreipunktige Berührung zwischen Curven ergeben. Wenn zunächst ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und zwei zweistufige Curvensysteme Σ_2 und Σ_3 als gegeben vorliegen, so kann man durch Formel (94) die Zahl aller unendlich kleinen Dreiecke finden, die sowohl in dem durch Σ_1 erzeugten zweistufigen Systeme, wie auch in demjenigen zweistufigen Systeme liegen, welches den durch Σ_2 und Σ_3 erzeugten Systemen gemeinsam ist. Man hat also in Formel (94) statt der gestrichelten Symbole s'^2, g'^2, $\zeta' s'$, $\eta' g'$ die Zahlen μ_1, μ_1', k_1, k_1' einzusetzen, und die Werthe der nicht-gestrichelten Symbole aus (99a), (100a), (103a), (104a) zu entnehmen. So gelangt man zu folgendem Satze:

(105) *Sind ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und zwei zweistufige Curvensysteme Σ_2 und Σ_3 gegeben, so kommt es eine endliche Anzahl mal vor, dass sich drei den drei Systemen angehörige Curven in denselben drei unendlich nahen Punkten berühren,* und zwar ist diese Anzahl gleich:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \cdot (K_2 K_3' + K_2' K_3 + K_2' K_3' + 3 M_2 K_3 + 3 M_2 K_3' + 3 K_2 M_3 \\ &\qquad\qquad + 3 K_2' M_3 + 9 M_2 M_3) \\ &+ \mu_1' \cdot (K_2' K_3 + K_2 K_3' + K_2 K_3 + 3 M_2 K_3' + 3 M_2 K_3 + 3 K_2' M_3 \\ &\qquad\qquad + 3 K_2 M_3 + 9 M_2 M_3) \\ &+ k_1 \cdot (M_2 K_3' + K_2' M_3 + 3 M_2 M_3) \\ &+ k_1' \cdot (M_2 K_3 + K_2 M_3 + 3 M_2 M_3). \end{aligned}$$

Zu ganz demselben Ausdrucke gelangt man auch, wenn man die Curvensysteme Σ_1 und Σ_2 zusammenfasst, und dann mit Σ_3 durch die Formel (93) verbindet.

Sind drei zweistufige Curvensysteme Σ_1, Σ_2, Σ_3 gegeben, so benutzt man zunächst (99a), (100a), (103a), (104a), und darauf (97), (98), (101), (102). Dadurch kommt man zu folgendem Satze:

(106) *Bei drei gegebenen zweistufigen Systemen Σ_1, Σ_2, Σ_3 kommt es ∞^1 mal vor, dass sich drei den drei Systemen angehörige Curven in*

denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren. Die ∞^1 *Berührungspunkte bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$M_1 \cdot (K_2 K_3 + K_2 K_3' + K_2' K_3) + M_2 \cdot (K_3 K_1 + K_3 K_1' + K_3' K_1) + M_3 \cdot (K_1 K_2 + K_1 K_2' + K_1' K_2) + 3 M_2 M_3 \cdot (2 K_1 + K_1') + 3 M_3 M_1 (2 K_2 + K_2') + 3 M_1 M_2 (2 K_3 + K_3') + 18 M_1 M_2 M_3.$$

Die ∞^1 *Berührungstangenten hüllen eine Curve ein, deren Rang sich ergiebt, wenn man in diesem Ausdruck immer K mit K' vertauscht.*

Ferner kommt es bei den ∞^1 *Berührungen eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei unendlich nahen Schnittpunkte in gerader Linie liegen, und zwar ist diese Anzahl gleich*

$$K_1' K_2 K_3 + K_1 K_2' K_3 + K_1 K_2 K_3' + K_1 K_2' K_3' + K_1' K_2 K_3' + K_1' K_2' K_3 + 3 M_1 \cdot (K_2 K_3' + K_2' K_3 + K_2' K_3') + 3 M_2 \cdot (K_3 K_1' + K_3' K_1 + K_3' K_1') + 3 M_3 (K_1 K_2' + K_1' K_2 + K_1' K_2') + 9 M_2 M_3 K_1' + 9 M_3 M_1 K_2' + 9 M_1 M_2 K_3'.$$

Ebenso kommt es eine endliche Anzahl mal vor, dass die drei an einer Berührungsstelle unendlich nahen Tangenten sich in demselben Punkte schneiden, und zwar erhält man diese Anzahl, wenn man in dem vorstehenden Ausdruck immer K mit K' vertauscht.

(107) *Sind endlich vier zweistufige Curvensysteme* Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 *gegeben, so gelangt man auf mehreren Wegen zu dem folgenden Ausdruck für die Zahl, welche angiebt, wie oft sich vier den vier Systemen angehörige Curven in denselben drei unendlich nahen Punkten dreipunktig berühren:*

$$M_1 \cdot (K_2' K_3 K_4 + K_2 K_3' K_4 + K_2 K_3 K_4' + K_2 K_3' K_4' + K_2' K_3 K_4' + K_2' K_3' K_4) + M_2 \cdot (\cdots\cdots) + M_3 \cdot (\cdots\cdots) + M_4 \cdot (\cdots\cdots) + 3 M_1 M_2 \cdot (K_3 K_4 + K_3' K_4' + 2 K_3 K_4' + 2 K_3' K_4) + 3 M_1 M_3 \cdot (\cdots) + 3 M_1 M_4 \cdot (\cdots) + 3 M_2 M_3 \cdot (\cdots) + 3 M_2 M_4 \cdot (\cdots) + 3 M_3 M_4 \cdot (\cdots) + 18 M_2 M_3 M_4 \cdot (K_1 + K_1') + 18 M_1 M_3 M_4 \cdot (K_2 + K_2') + 18 M_1 M_2 M_4 \cdot (K_3 + K_3') + 18 M_1 M_2 M_3 \cdot (K_4 + K_4') + 54 M_1 M_2 M_3 M_4,$$

wo, der Kürze wegen, einige Male Punkte für Ausdrücke gesetzt sind, welche sich durch Analogie leicht bilden lassen. Der Umstand, dass die Ausdrücke in (106) und (107) durch Vertauschung der Indices in sich selbst übergehen, liefert eine Controle der Berechnung.

§ 9.

Vermuthete Formeln für die zweimalzweipunktige Berührung.

Nach Ableitung der Anzahlen für die dreipunktige Berührung aus den Formeln des § 7. liegt es nahe, daran zu denken, ob man nicht auch zu den Anzahlen für die zweimalzweipunktige Berührung auf folgendem Wege gelangen kann. Man fasst auf einer Plancurve je 2 Punkte b und c und den Schnittpunkt a ihrer beiden Tangenten β und γ zu einem Dreieck zusammen. Dadurch ordnet man jeder Plancurve ein zweistufiges Dreieckssystem, jedem i-stufigen Curvensystem ein $(2+i)$-stufiges Dreieckssystem zu, und man erkennt, dass, wenn zwei Curven sich zweimalzweipunktig berühren, ihre so erzeugten Dreieckssysteme ein gemeinsames Dreieck besitzen, dessen Ecken b und c die Berührungspunkte, und dessen Seiten γ und β die Berührungstangenten sind. Gegen die Anwendbarkeit der Formeln der §§ 4., 5., 6. auf solche Dreieckssysteme spricht aber der Umstand, dass wir bei der Ableitung jener Formeln den Systemen die am Schluss von § 1. besprochene Beschränkung auferlegt haben, *gewöhnliche* Systeme zu sein, und dass das durch eine Curve in angegebener Weise erzeugte zweistufige Dreieckssystem kein gewöhnliches ist, weil es nicht eine endliche Anzahl, sondern ∞^1 Dreiecke enthält, welche die in § 1. für ψ, ω_a, ω_α ausgesprochenen Definitionen erfüllen. Ein Dreieck von der Definition ψ wird nämlich durch je zwei unendlich nahe Punkte erzeugt, ferner ein Dreieck ω_a auf jeder Wendetangente durch die beiden unendlich nahen Berührungspunkte b und c und jeden beliebigen Punkt a auf der Wendetangente, endlich ein Dreieck ω_α in jedem Rückkehrpunkte durch die beiden unendlich nahen Tangenten β und γ und jeden beliebigen Strahl α, der durch den Rückkehrpunkt geht. Wenn nun aber auch die Formeln der §§ 2. bis 6. auf solche Systeme von uns nicht angewendet werden dürfen, so kann man doch speciell für solche Systeme alle die Betrachtungen anstellen, welche den in § 6. angestellten analog sind. Analog den Formeln zweiter Dimension des § 2. erhält man dann mit vielen Bestätigungen die Plücker'schen Formeln für eine feste Curve, und man erkennt, dass die Anwendung der Formeln des § 2. auf die Dreieckssysteme, welche in der angegebenen Weise durch je 2 Tangenten einer Plancurve hervorgerufen werden, richtige Resultate liefert, sobald man die Formeln, welche zweistufige Ausartungssymbole enthalten, ausschliesst, und bei der Deutung der einstufigen Ausartungssymbole die folgenden, einleuchtenden Annahmen macht:

1) Die Ausartungsbedingung ϑ_b oder ϑ_c wird durch jedes aus drei consecutiven Punkten der Curve bestehende Dreieck erfüllt, und ausserdem durch jedes Dreieck, welches aus einer Tangente und einer von ihrem Berührungspunkte ausgehenden, anderswo berührenden Tangente besteht, wobei der Berührungspunkt zum Punkte s, die zweitgenannte Tangente zum Strahle g, ihr Berührungspunkt zum Punkte b resp. c, und die erstgenannte Tangente zum Strahle β resp. γ wird.

2) Die Ausartungsbedingung ϑ_a wird in drei Fällen erfüllt, erstens

durch jedes aus drei consecutiven Punkten bestehende Gebilde, zweitens durch jedes Dreieck, bei welchem a ein beliebiger Punkt einer Wendetangente ist und b und c auf ihr im Berührungspunkte unendlich nahe liegen, drittens durch jedes Dreieck, bei welchem α ein beliebiger Strahl durch einen Rückkehrpunkt ist, β und γ in der zugehörigen Rückkehrtangente unendlich nahe liegen.

3) Die Ausartungsbedingung ε wird zweimal durch jedes Dreieck erfüllt, bei welchem a ein beliebiger Punkt einer Doppeltangente oder einer Wendetangente ist, b und c die zugehörigen, getrennten resp. unendlich nahen Berührungspunkte sind.

4) Die Ausartungsbedingung τ wird zweimal durch jedes Dreieck erfüllt, bei welchem α ein beliebiger Strahl durch einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt ist, β und γ die zugehörigen, getrennten resp. unendlich nahen Tangenten sind.

Hiernach erhält man für die in § 2. auftretenden, zweifachen Symbole die folgenden Werthe, wenn n die Ordnung der vorliegenden Curve bedeutet, n' ihren Rang, δ die Zahl ihrer Doppelpunkte, $\varkappa$ die Zahl ihrer Spitzen, δ' die Zahl ihrer Doppeltangenten, $\varkappa'$ die Zahl ihrer Wendetangenten.

$$a^2 = n'(n'-1),\quad b^2 = c^2 = 0,\quad \alpha^2 = n(n-1),\quad \beta^2 = \gamma^2 = 0,$$
$$b\beta = c\gamma = nn',\quad ab = ac = n(n'-1),\quad bc = n^2,$$
$$\alpha\beta = \alpha\gamma = n'(n-1),\quad \beta\gamma = n'^2,\quad \varepsilon g = 0,\quad \varepsilon b = \varepsilon c = 0,\quad \tau s = 0,$$
$$\tau\beta = \tau\gamma = 0,$$

aber

$$\varepsilon a = 2\cdot(\delta' + \varkappa'),\quad \tau\alpha = 2\cdot(\delta + \varkappa),\quad \vartheta_a a = n + \varkappa',\quad \vartheta_a \alpha = n' + \varkappa,$$

ferner

$$\vartheta_a s = n,\quad \vartheta_a g = n',$$
$$\vartheta_b s = \vartheta_c s = n + n(n'-2),\quad \vartheta_b g = \vartheta_c g = n' + n'(n-2),$$
$$\vartheta_b b = \vartheta_c c = n + n(n-2),\quad \vartheta_b \beta = \vartheta_b \gamma = n' + n'(n'-2).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln zweiter Dimension des § 2. erhält man entweder Identitäten oder Plücker'sche Formeln, und ausserdem das Resultat:

$$a\alpha = 2nn' - (3n + \varkappa') = 2nn' - (3n' + \varkappa). \tag{108}$$

Zu diesem Werthe für $a\alpha$ kann man auch direct durch das Correspondenzprincip auf folgendem Wege gelangen. Man nehme eine feste Gerade und einen festen Punkt P, ziehe dann von irgend einem Punkt A der festen Geraden die n' Tangenten, verbinde jeden ihrer n' Berührungspunkte mit P, bestimme auf jeder Verbindungsgeraden die $n-1$ sonstigen Schnittpunkte, ziehe in jedem Schnittpunkte die Tangente, und bestimme den Schnittpunkt B der festen Geraden mit jeder der so entstandenen $n'(n-1)$ Tangenten. Dann erhält man, dass dem Punkte A $n'(n-1)$ Punkte B entsprechen. Ebenso erhält man umgekehrt, dass dem Punkte B $n'(n-1)$ Punkte A entsprechen. Zu einer Coincidenz von A und B geben Veranlassung erstens die n' von P ausgehenden Tangenten, zweitens die $\varkappa$ Rückkehrtangenten der Curve, drittens jedes Dreieck, welches dem oben betrachteten, zweistufigen Systeme angehört, dabei seine Ecke a auf der festen Geraden hat, und seine Seite α durch den Punkt P schickt. Also ist:

$$2n'(n-1) = n' + \varkappa + a\alpha,$$

oder

$$a\alpha = 2nn' - (3n' + \varkappa).$$

Will man auf die Unterscheidung der Ecken b und c, sowie der Seiten β und γ keine Rücksicht nehmen, so hat man das Resultat durch 2 zu dividiren. Man kann also den Satz aussprechen:

Wenn man aus einem Punkte P in der Ebene einer Curve $n$ter Ordnung, n'ten Ranges mit $\varkappa$ Spitzen einen Strahl zieht, in den n Schnittpunkten dieses Strahls mit der Curve Tangenten zieht, und die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte solcher Tangenten bestimmt, so beschreiben diese Schnittpunkte eine Curve von der Ordnung $nn' - \frac{1}{2}(3n' + \varkappa)$, während jener Strahl sich um P dreht.

Ueberträgt man die oben erwähnten 4 Annahmen über die Deutung der Symbole ε, τ, ϑ_a, ϑ_b, ϑ_c auf ein einstufiges Curvensystem, so kommt man zu folgenden Werthen für die in § 2. auftretenden dreifachen Symbole. Es bezeichne n die Ordnung jeder Curve des Systems, n' ihren Rang, μ die Zahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Curven des Systems, μ' die Zahl der eine gegebene Gerade berührenden Curven, d die Ordnung der von den Doppelpunkten gebildeten Curve, k die Ordnung der von den Spitzen gebildeten Curve, d' und k' die dual entsprechenden Zahlen. Dann ist:

$$a^2\beta = a^2\gamma = \mu'(n'-1),\ b^2\gamma = c^2\beta = 0,\ b^2\alpha = c^2\alpha = \mu\cdot(n-1),$$
$$\vartheta_a s^2 = \mu,\ \vartheta_b s^2 = \vartheta_c s^2 = \mu\cdot(n'-1),\ \vartheta_a g^2 = \mu',\ \vartheta_b g^2 = \vartheta_c g^2 = \mu'(n-1),$$
$$\varepsilon a^2 = 2d' + 2k',\ \varepsilon b^2 = \varepsilon c^2 = 0,\ \tau\alpha^2 = 2d + 2k,\ \tau\beta^2 = \tau\gamma^2 = 0,$$
$$\varepsilon g^2 = 0,\ \tau s^2 = 0,\ abc = \mu\cdot(2n-1) + 2\cdot\mu'\cdot n,\ \alpha\beta\gamma = \mu'\cdot(2n'-1) + 2\mu\cdot n';$$

ferner erwähnen wir noch:

$$b^2c = bc^2 = \mu\cdot n,\quad \beta^2\gamma = \beta\gamma^2 = \mu'\cdot n',$$

und

$$\vartheta_a\alpha^2 = \mu' + k + X,$$

wo X die Zahl aller derjenigen hinlänglich oft gerechneten ausgearteten Curven des Systems bedeutet, welche einen vielfachen Curvenzweig besitzen. Durch Einsetzung dieser Werthe in die Formeln des § 2. erhält man theils Identitäten, theils aber auch Formeln, welche, den Plücker'schen analog, sich auf einstufige Systeme beziehen, aber dann immer Ausartungszahlen mit enthalten*).

Bei zweistufigen Curvensystemen erhält man, gemäss den obigen 4 Annahmen, die folgenden Werthe für die vierfachen Symbole des § 2., wenn n die Ordnung jeder Curve des Systems bezeichnet, μ^2 die Zahl der durch zwei gegebene Punkte gehenden Curven, $\mu\mu'$ die Zahl der einen gegebenen Punkt treffenden und eine gegebene Gerade berührenden Curven, M die Zahl der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührenden Curven, D die Zahl derjenigen Curven, welche einen gegebenen Punkt als Doppelpunkt haben, K die Zahl derjenigen, welche einen gegebenen Punkt als Spitze haben:

$$b^2c^2 = \mu^2, \; a^2b^2 = a^2c^2 = M\cdot(n'-1),$$
$$\beta^2\gamma^2 = \mu'^2, \; \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\gamma^2 = M\cdot(n-1),$$
$$\vartheta_a s^2 g = M, \; \vartheta_b s^2 g = \vartheta_c s^2 g = \mu\mu' - M,$$
$$\varepsilon g^2 a = 2D' + 2K', \; \varepsilon g^2 b = \varepsilon g^2 c = 0,$$
$$\tau s^2 \alpha = 2D + 2K, \; \tau s^2\beta = \tau s^2 \gamma = 0,$$

ψs^2 und ψg^2 sind Symbole, welche wir ausschliessen müssen, statt ihrer wählen wir a^2bc und $\alpha^2\beta\gamma$, für welche sich leicht direct ergiebt:

$$a^2bc = \mu^2 + 2\mu\mu' + \mu'^2 - M, \quad \alpha^2\beta\gamma = \mu^2 + 2\mu\mu' + \mu'^2 - M.$$

Ausserdem erwähnen wir $b^2\beta^2 = c^2\gamma^2 = \mu\mu'$, wodurch die der Formel (42) analoge Formel verificirt wird.

Obwohl in den Entwickelungen der §§ 3. bis 6. die Anwendbarkeit der dort aufgestellten Productenformeln auf solche Systeme, wie sie eben besprochen sind, *nicht bewiesen* ist, so wollen wir dennoch die eben aufgestellten Werthe der zweifachen, dreifachen und vierfachen Symbole in die Formel (67) des § 5. und in die Formel (74) des § 6. einsetzen, und die erhaltenen Resultate prüfen. Dabei bezeichnen wir wieder die gegebene Curve oder die gegebenen Curvensysteme durch Σ_1 und Σ_2, ferner die auf solche Systeme bezüglichen Anzahlen durch die oben eingeführten, aber mit dem Index 1 resp. 2 versehenen Buchstaben. Man erhält so bei einer gegebenen festen Curve Σ_1 und einem gegebenen, zweistufigen Curvensysteme Σ_2 für die Anzahl der ihnen gemeinsamen, aus je zwei Tangenten mit Berührungspunkten gebildeten Dreiecke, nach einiger Umformung:

$$[n_1'(n_1'-1)\cdot\mu_2^2 + 2n_1 n_1'\cdot(\mu\mu')_2 + n_1(n_1-1)\cdot\mu_2'^2 + 2n_1\cdot D_2' + 2n_1'\cdot D_2'$$
$$-3\cdot(3n_1+\varkappa_1')\cdot M_2] + [2\cdot(3n_1+\varkappa_1')\cdot M_2 + 2n_1\cdot K_2' + 2n_1'\cdot K_2].$$

Die zweite eckige Klammer enthält nun aber das Doppelte der in Formel (93a) berechneten Anzahl derjenigen Curven von Σ_2, welche

*) Solche Formeln gab Zeuthen in den Almind. Egensk. ved Systemer af plane Kurver (Kopenh. Acad. 1873).

die feste Curve Σ_1 dreipunktig berühren. Dagegen enthält die erste eckige Klammer das Doppelte der von Zeuthen in den Comptes rendus, tome 89, p. 900 bewiesenen *Anzahl für diejenigen Curven in Σ_2, welche die feste Curve Σ_1 zweimal zweipunktig berühren.* Der Coefficient 2 bei der letztgenannten Anzahl rechtfertigt sich dadurch, dass bei einer Doppelberührung zwischen 2 Curven jeder der beiden Berührungspunkte als Punkt b resp. c eines gemeinsamen Dreiecks aufzufassen ist. Dass der obige Ausdruck auch die auf die dreipunktige Berührung bezügliche Anzahl enthält, erklärt sich dadurch, dass auch zwei sich *dreipunktig* berührende Curven ein aus zwei Punkten und dem Schnittpunkt ihrer Tangenten bestehendes Dreieck gemeinsam haben. Wir können daher das folgende Ergebniss constatiren:

Wenn man die oben besprochenen Werthe für die zweifachen und vierfachen Bedingungssymbole in die Formel (67) *des* § 5. *substituirt, und von dem erhaltenen Ausdruck das Doppelte der auf die dreipunktige Berührung bezüglichen Anzahl subtrahirt* (93a), *so erhält man das Doppelte der Zeuthen'schen Anzahl derjenigen Curven eines zweistufigen Systems, welche eine feste Curve zweimal zweipunktig berühren.*

Nach diesem Ergebniss darf man vermuthen, dass man in ähnlicher Weise durch Einsetzung der Werthe der dreifachen Symbole in die Formel (74) des § 6. zu der Zahl gelangt, welche angiebt, wie oft es vorkommt, dass *zwei Curven, die zwei gegebenen einstufigen Systemen Σ_1 und Σ_2 angehören, sich zweimal zweipunktig berühren.* Man erhält aus Formel (74) nach einiger Umformung:

$$\begin{aligned}&[2\cdot(n_1'n_2'-4)\mu_1\cdot\mu_2+2\cdot(n_1-1)(n_1'-1)\mu_1\cdot\mu_2'+2\cdot(n_1'-1)(n_2-1)\mu_1'\cdot\mu_2\\&\quad+2\cdot(n_1n_2-4)\mu_1'\cdot\mu_2'+2d_1\cdot\mu_2'+2d_1'\cdot\mu_2+2\mu_1'\cdot d_2+2\mu_1 d_2']\\&\quad+[2\mu_1\cdot k_2'+2\mu_1'\cdot k_2+2k_1\cdot\mu_2'+2k_1'\mu_2+6\mu_1\cdot\mu_2+6\mu_1'\cdot\mu_2'].\end{aligned}$$

Subtrahirt man dann das Doppelte der in Formel (94a) berechneten, auf die dreipunktige Berührung bezüglichen Anzahl, und dividirt durch 2, so erhält man in der That die von Zeuthen in den Comptes rendus, tome 89, p. 947 berechnete Anzahl.

Diese Uebereinstimmung legt den Gedanken nahe, in ähnlicher Weise zu den Anzahlen zu gelangen, welche sich auf die ∞^1 doppelten Berührungen zwischen den Curven eines gegebenen einstufigen und eines gegebenen zweistufigen Systems beziehen. Hierzu brauchen wir aber die Formeln für die Anzahlen, welche sich auf die ∞^1 gemeinsamen Dreiecke eines dreistufigen und eines vierstufigen Dreieckssystems beziehen. Diese erhalten wir, wenn wir entweder Formel (67) mit a', b', c', α', β', γ' oder Formel (74) mit a, b, c, α, β, γ multipliciren. Der Analogie und des Dualismus wegen brauchen wir nur mit a' resp. mit a zu multipliciren. Auf beiden Wegen erhält man nach geschickter Benutzung der Formeln des § 2:

$$
\begin{aligned}
(109)\quad xa = {} & b'^2\gamma'^2\cdot c^2a^2 + c'^2\beta'\cdot a^2b^2 + a'^2\beta'\cdot\alpha^2\gamma^2 + a'^2\gamma'\cdot\alpha^2\beta^2 \\
& + \vartheta'_b s'^2\cdot a^2b^2 + \vartheta'_c s'^2\cdot a^2c^2 + \vartheta'_b g'^2\cdot\beta^2\gamma^2 + \vartheta'_c g'^2\cdot\beta^2\gamma^2 \\
& + a'^2\gamma'\cdot\vartheta_b s^2 g + a'^2\beta'\cdot\vartheta_c s^2 g + \tau' s'^2\cdot c^2a^2 + \tau' s'^2\cdot a^2b^2 \\
& + \tau'\alpha'^2\cdot\beta^2\gamma^2 + \varepsilon' g'^2\cdot\beta^2\gamma^2 + a'b'c'\cdot\varepsilon g^2 a + a'^2\beta'\cdot\tau s^2\alpha + a'^2\gamma'\cdot\tau s^2\alpha \\
& + \tau' s'^2\cdot\vartheta_a s^2 g + \varepsilon' a'^2\cdot\vartheta_a s^2 g + \vartheta'_b s'^2\cdot\vartheta_a s^2 g + \vartheta'_c s'^2\cdot\vartheta_a s^2 g \\
& + \vartheta'_c s'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \vartheta'_b s'^2\cdot\vartheta_c s^2 g + \tau'\beta'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \tau'\gamma'^2\cdot\vartheta_c s^2 g \\
& + \vartheta'_a g'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \vartheta'_a g'^2\cdot\vartheta_c s^2 g + \vartheta'_c g'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \vartheta'_b g'^2\cdot\vartheta_c s^2 g \\
& + \tau' s'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \tau' s'^2\cdot\vartheta_c s^2 g + \varepsilon' g'^2\cdot\vartheta_b s^2 g + \varepsilon' g'^2\cdot\vartheta_c s^2 g \\
& + \vartheta'_b s'^2\cdot\varepsilon g^2 b + \vartheta'_c s'^2\cdot\varepsilon g^2 c + \vartheta'_b s'^2\cdot\tau s^2\beta + \vartheta'_c s'^2\cdot\tau s^2\gamma \\
& + \vartheta'_b g'^2\cdot\tau s^2\beta + \vartheta'_c g'^2\cdot\tau s^2\gamma + \vartheta'_a g'^2\cdot\tau s^2\alpha + \varepsilon' a'^2\cdot\tau s^2\beta + \varepsilon' a'^2\cdot\tau s^2\gamma \\
& + \varepsilon' g'^2\cdot\tau s^2\alpha + \varepsilon' g'^2\cdot\tau s^2\beta + \varepsilon' g'^2\cdot\tau s^2\gamma + \tau' s'^2\cdot\varepsilon g^2 b + \tau' s'^2\cdot\varepsilon g^2 c \\
& + \varepsilon' a'^2\cdot\psi s^2 + \varepsilon' g'^2\cdot\psi s^2 + \tau' s'^2\cdot\psi g^2 - \tau'\alpha'^2\cdot\varepsilon g^2 a \\
& + \vartheta'_b g'^2\cdot\varepsilon g^2 a - \vartheta'_c g'^2\cdot\varepsilon g^2 a - \varepsilon' g'^2\cdot\varepsilon g^2 a.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck giebt also in den Symbolen des § 5. und § 6. die Ordnung der Curve der Punkte a aller derjenigen ∞^1 Dreiecke an, welche einem gegebenen, dreistufigen Systeme Σ' und einem gegebenen, vierstufigen Systeme Σ gemeinsam sind. Wenn man dann aus diesem Ausdruck die nicht deutbaren Symbole ψs^2 und ψg^2 durch die Formel (47) und die ihr dual entsprechende Formel herausschafft, und darauf für die auftretenden Symbole die oben angegebenen Werthe einsetzt, so gelangt man zu einem Ausdruck, aus welchem man nach Abzug der analogen Zahl für dreipunktige Berührung (97a) und Division durch 2 einen Satz erhält, *den wir zwar nicht als von uns bewiesen, aber als sehr wahrscheinlich hinstellen können.*

(110) *Wenn ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und ein zweistufiges Curvensystem Σ_2 gegeben ist, so kommt es ∞^1 mal vor, dass sich zwei den beiden Systemen angehörige Curven zweimal zweipunktig berühren. Wenn man dann bei jeder solchen Doppelberührung den Schnittpunkt der Tangenten in den beiden Berührungspunkten bestimmt, so erhält man ∞^1 solcher Tangentenschnittpunkte. Dieselben bilden eine Curve von der Ordnung:*

$$
\begin{aligned}
& \mu_1\cdot[M_2\cdot(n_1'n_2' - n_1' - n_2' - 2) + (\mu\mu')_2\cdot(n_1' - 1) + D_2'\cdot(2n_1 - 1) \\
& \qquad + 2K_2'\cdot(n_1 - 1) - K_2] \\
& + \mu_1'\cdot[M_2\cdot(n_1'n_2 - 2n_1' - n_1 - n_2 - 1) + \mu_2'^2\cdot(n_1 - 1) + (\mu\mu')_2\cdot(n_1 + n_1' - 1) \\
& \qquad + 2D_2' + 2K_2' + D_2\cdot(2n_1' - 1) + 2\cdot K_2\cdot(n_1' - 1)] \\
& + d_1\cdot[\mu_2'^2 - 2D_2' - 2K_2'] + k_1\cdot[\mu_2'^2 - 2D_2' - 2K_2' - M_2] \\
& + d_1'\cdot[\mu_2^2 + 2M_2 - 2D_2 - 2K_2] + k_1'\cdot[\mu_2^2 + 2M_2 - 2D_2 - 2K_2].
\end{aligned}
$$

Wenn man ferner die obigen Werthe an die Stelle der Symbole der Formel für xb setzt, welche aus der für xa entwickelten durch cyklische Vertauschung hervorgeht, und wenn man dann das Doppelte*) des Ausdrucks in (97a) subtrahirt, so gelangt man zu der folgenden Anzahl:

(111) *Wenn ein einstufiges Curvensystem Σ_1 und ein zweistufiges Σ_2 gegeben sind, so kommt es ∞^1 mal vor, dass sich zwei den beiden Systemen angehörige Curven zweimal zweipunktig berühren. Dabei bilden die Berührungspunkte eine Curve von der Ordnung:*

$$\mu_1 \cdot [\mu_2{}^2 \cdot (n_1'-1) + \mu_2'{}^2 \cdot (n_1-1) + (\mu\mu')_2 \cdot (n_1+n_1') + M_2 \cdot (n_1 n_2' - 2n_1 - 7) + 2D_2 + 2D_2']$$
$$+ \mu_1' \cdot [\mu_2{}^2 \cdot (n_1'-1) + (\mu\mu')_2 \cdot n_1 + M_2 \cdot (n_1 n_2 - 8) + 2D_2] + 2d_1 \cdot M_2.$$

Um auch die entsprechenden Zahlen für zwei gegebene, zweistufige Curvensysteme zu bestimmen, hat man aus den Formeln des § 5. und und § 6. die Zahlen b^2, bc u. s. w. für die ∞^2 Dreiecke abzuleiten, welche zwei gegebenen, vierstufigen Dreieckssystemen gemeinsam sind, und darauf wieder für die erhaltenen, vierstufigen Symbole die oben besprochenen Werthe einzusetzen. Auf diesem Wege kommt man zu folgendem, als sehr wahrscheinlich hinzustellenden Resultate:

(112) und (113) *Wenn zwei zweistufige Curvensysteme Σ_1 und Σ_2 gegeben sind, so kommt es ∞^2 mal vor, dass sich zwei den beiden Systemen angehörige Curven zweimal zweipunktig berühren, und zwar ist jeder Punkt der Ebene so oft einer der beiden Berührungspunkte von zwei solchen Curven, wie die folgende Zahl angiebt:*

$$M_1 \cdot [\mu_2{}^2 \cdot (n_1'-1) + (\mu\mu')_2 \cdot n_1 + 2D_2]$$
$$+ [\mu_1{}^2 \cdot (n_2'-1) + (\mu\mu')_1 \cdot n_2 + 2D_1] \cdot M_2$$
$$- 8M_1 \cdot M_2.$$

Wenn ferner der eine der beiden Berührungspunkte sich auf einer Geraden bewegt, so beschreibt der andere eine Curve von der Ordnung:

$$\mu_1{}^2 \cdot \mu_2{}^2 + \mu_1{}^2 \cdot \mu_2'{}^2 + \mu_1'{}^2 \cdot \mu_2{}^2$$
$$+ 2\mu_1{}^2 \cdot (\mu\mu')_2 + 2 \cdot (\mu\mu')_1 \cdot \mu_2{}^2 + 2(\mu\mu')_1 \cdot (\mu\mu')_2 - \mu_1{}^2 \cdot M_2 - M_1 \cdot \mu_2{}^2$$
$$+ 2M_1 \cdot D_2 + 2D_1 \cdot M_2 + 2M_1 M_2 \cdot (n_1 n_2 - 4).$$

---

*) Dass das Doppelte, und nicht der in (97a) gegebene Ausdruck selbst zu subtrahiren ist, ersah ich erst aus einem Briefe des Herrn **Zeuthen**, welcher, auf Verabredung gleichzeitig mit mir, die in (111) und (112) angegebenen beiden Anzahlen durch das Princip von der Erhaltung der Anzahl bestimmt hat. Die Formeln (110) und (113) aber sind bis jetzt nur durch die obige Methode gefunden.

§ 10.

Correspondenzen zwischen 3 Punkten einer Curve.

In § 18. meines Kalküls habe ich aus den Coincidenzformeln für Punktepaare die Cayley-Brill'sche Correspondenzformel für Plancurven abgeleitet. Die oben entwickelten Formeln für Punkttripel ermöglichen es, auch eine Correspondenzformel für den Fall aufzustellen, wo immer zwei beliebig gewählten Punkten einer Plancurve eine endliche Anzahl dritter Punkte entspricht, und wo man danach fragt, wie oft es auf der Plancurve vorkommt, dass drei durch die Correspondenz zusammengehörige Punkte zugleich drei consecutive, unendlich nahe Punkte der Curve sind. Diese Frage können wir auch aussprechen, wie folgt:

Gegeben ist in fester Ebene eine Plancurve, und ausserdem ein fünfstufiges Dreieckssystem. In letzterem liegt ein dreistufiges System Σ unendlich kleiner Dreiecke, die Plancurve dagegen erzeugt durch alle möglichen Tripel consecutiver Punkte (§ 7. *und* § 8.) *ein einstufiges System Σ' unendlich kleiner Dreiecke. Wie lässt sich die Zahl der Σ und Σ' gemeinsamen unendlich kleinen Dreiecke als Function von Anzahlen darstellen, welche sich auf die Correspondenz beziehen, die durch das fünfstufige Dreieckssystem auf der Plancurve hervorgerufen wird?*

Die auf das fünfstufige Dreieckssystem bezüglichen Punkte, Strahlen, Ausartungen und Bedingungen bezeichnen wir mit den § 1. eingeführten Symbolen. Nimmt man nun auf der festen Curve irgend zwei Punkte als Punkte b und c an, so liegen die zugehörigen Punkte a auf einer Curve, welche nach unserer Bezeichnung den Grad ab^2c^2 hat, und deshalb die feste Curve in $n \cdot (ab^2c^2)$ Punkten schneidet. Zu diesen Punkten gehören erstens *die μ_a Punkte, welche den angenommenen Punkten b und c auf der Plancurve entsprechen,* zweitens aber auch der Punkt b so oft, wie das Symbol $\vartheta_c s^2 c^2$ angiebt, und drittens der Punkt c $\vartheta_b s^2 b^2$ mal. Wir bezeichnen diese durch $\vartheta_c s^2 c^2$ und $\vartheta_b s^2 b^2$ dargestellten Zahlen, welche der von Herrn Brill „Werthigkeit" genannten Zahl analog sind, mit w_c resp. w_b. Also erhalten wir:

$$(114) \qquad n \cdot (ab^2c^2) = \mu_a + w_b + w_c,$$

und analog:

$$(114a) \qquad \begin{aligned} n \cdot (a^2bc^2) &= \mu_b + w_c + w_a, \\ n \cdot (a^2b^2c) &= \mu_c + w_a + w_b. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet w_a, wie oft man von zwei auf der Plancurve beliebig gewählten Punkten den einen als Punkt a ansehen kann, und von dem andern annehmen darf, dass ihm die zugehörigen Punkte b und c unendlich nahe liegen jedoch ohne im Allgemeinen eine Verbindungslinie zu haben, die mit der Tangente übereinstimmt. Ferner bedeuten μ_b und μ_c die μ_a analogen Zahlen, w_b und w_c die w_a analogen Werthigkeitszahlen.

Zu den eingeführten 6 Zahlen:

$$\mu_a, \; \mu_b, \; \mu_c, \; w_a, \; w_b, \; w_c$$

müssen wir noch eine siebente hinzufügen, um die gesuchte Zahl der Coincidenzen ausdrücken zu können, weil die Productenformel zwischen einem einstufigen und einem fünfstufigen Dreieckssysteme 7 Bedingungen aus jedem Systeme enthält. Wir wählen die Zahl w, welche angeben soll, wie oft es in einem beliebigen Punkte der Plancurve vorkommt, dass drei durch die Correspondenz zusammengehörige Punkte jenem Curvenpunkte derartig unendlich nahe liegen, dass eine beliebige durch die 3 Correspondenzpunkte gelegte Curve die feste Curve in jenem Curvenpunkte zweipunktig berührt. Nur in einer endlichen Anzahl von Curvenpunkten wird es im Allgemeinen vorkommen können, dass die eben erwähnte Berührung eine *dreipunktige* wird, und die Anzahl x solcher Curvenpunkte wollen wir gerade bestimmen. Man sieht sofort, dass die vierte Werthigkeitszahl w nichts anderes ist, als der Werth unseres Symbols $\psi s^2 g$.

Um nun die gesuchte Zahl x durch μ_a, μ_b, μ_c, w_a, w_b, w_c, w darzustellen, wenden wir die Formel (93) an. Wir erhalten aus derselben, wenn wir die Ordnung der festen Curve mit n, ihren Rang mit n', die Zahl ihrer Spitzen mit $\varkappa$ bezeichnen:

$$x = n \cdot \eta g^2 + n' \cdot \zeta s^2 + (3n' + \varkappa) \cdot \psi s^2 g.$$

Nun ist aber nach unseren Formeln in § 2.:

$$\begin{aligned} \eta g^2 &= \varepsilon b^2 c^2 + \varepsilon c^2 a^2 + \varepsilon a^2 b^2 \\ &= (a b^2 c^2 - \vartheta_b s^2 b^2 - \vartheta_c s^2 c^2) + (a^2 b c^2 - \vartheta_c s^2 c^2 - \vartheta_a s^2 a^2) \\ &\qquad + (a^2 b^2 c - \vartheta_a s^2 a^2 - \vartheta_b s^2 b^2), \\ \zeta s^2 &= \tau \beta^2 \gamma^2 + \tau \gamma^2 \alpha^2 + \tau \alpha^2 \beta^2 = \vartheta_a s^2 a^2 - \psi s^2 g + \vartheta_b s^2 b^2 - \psi s^2 g \\ &\qquad + \vartheta_c s^2 c^2 - \psi s^2 g, \end{aligned}$$

oder, nach Einführung der Zahlen μ und w:

$$\begin{aligned} n \cdot \eta g^2 &= \mu_a + \mu_b + \mu_c - 2 \cdot (n-1)\,(w_a + w_b + w_c), \\ \zeta s^2 &= w_a + w_b + w_c - 3 \cdot w. \end{aligned}$$

Folglich ergiebt sich die Correspondenzformel:

$$(115) \quad x = \mu_a + \mu_b + \mu_c + (w_a + w_b + w_c) \cdot (n' - 2n + 2) + w \cdot \varkappa.$$

Setzt man dann noch $n' - 2n + 2 + \varkappa$ gleich dem doppelten Geschlechte $2p$ der Curve, so kommt:

$$(116) \; x = \mu_a + \mu_b + \mu_c + 2p \cdot (w_a + w_b + w_c) - \varkappa \cdot (w_a + w_b + w_c - w),$$

Man bemerke, dass bei unserer Auffassung die Zahl x nur solche Coincidenzen zählt, bei denen die durch die drei unendlich nahen Punkte der Correspondenz dargestellte Krümmung mit der durch die drei unendlich nahen Punkte der Curve hervorgerufenen Krümmung übereinstimmt. Man vergleiche die Bemerkung bei der Ableitung der Brill'schen Correspondenzformel im „Kalkül" (p. 88).

Es liegt nahe, die Formel (115) zur Auffindung der Zahl aller derjenigen Curven zu verwenden, welche, einem zweistufigen Curvensysteme angehörig, die feste Curve dreipunktig berühren. Will man jedoch diese schon in Formel (93a) allgemein berechnete Anzahl durch die Correspondenz zwischen je drei Schnittpunkten auf der festen Curve erzielen, so ist man genöthigt, Anzahlen mit einzuführen, welche sich auf ausgeartete Curven des Systems beziehen. Nehmen wir der Einfachheit halber das zweistufige Curvensystem als aus lauter Kegelschnitten bestehend an, so ist zu setzen:

$$\mu_a = \mu_b = \mu_c = \mu^2 \cdot (2n-2), \quad w_a = w_b = w_c = \mu^2, \quad w = M,$$

wo μ^2 angiebt, wieviel Kegelschnitte durch zwei gegebene Punkte gehen, M angiebt, wieviel eine gegebene Gerade in einem Punkte berühren. Durch Einsetzung dieser Werthe ergiebt sich aus (116):

$$x = \mu^2 \cdot 3n' + M \cdot \varkappa.$$

Formel (93a) aber ergiebt für die Zahl der die feste Curve dreipunktig berührenden Kegelschnitte:

$$M \cdot (3n' + \varkappa),$$

also eine um $3(\mu^2 - M) \cdot n'$ kleinere Zahl. Dies kann sich nur daraus erklären, dass das zweistufige Kegelschnittsystem $\mu^2 - M$ in eine Doppelgerade ausgeartete Kegelschnitte besitzt, welche diese Doppelgerade durch einen gegebenen Punkt schicken, dass also die feste Curve $(\mu^2 - M) \cdot n'$ Tangenten besitzt, welche Doppelgeraden des Kegelschnittsystems sind, und dass jede dieser Tangenten bei der Zahl x dreifach mitgerechnet ist.

Liegen drei von einander unabhängige Tripelcorrespondenzen auf der Curve, d. h. sind ihr 3 zweistufige Dreieckssysteme einbeschrieben, so kann man nach der Zahl y *derjenigen Punkttripel fragen, welche gleichzeitig den drei Correspondenzen angehören.* Um die Zahl y für den Fall zu finden, dass die Curve keine Doppel- und Rückkehrpunkte habe, müssen wir den Zahlenwerth der sechsfachen Bedingung

$$D\, Z_1\, Z_2\, Z_3$$

berechnen, wo D die dreifache Bedingung bedeutet, dass ein Dreieck einer Curve $n$ter Ordnung einbeschrieben sei, und Z_1, Z_2, Z_3 beziehungsweise die einfachen Bedingungen bezeichnen, dass das Dreieck einem der drei fünfstufigen Systeme angehöre, durch welche die 3 Correspondenzen auf der Curve hervorgerufen werden. Wir bezeichnen die auf jede der 3 Correspondenzen bezüglichen 7 Zahlen, wie oben, durch

$$\mu_a,\ \mu_b,\ \mu_c,\ w_a,\ w_b,\ w_c,\ w$$

und unterscheiden dieselben durch die Indices 1, 2, 3. Ausserdem setzen wir, der Kürze wegen:

$$Z_i a b^2 c^2 = x_{ia}, \quad Z_i a^2 b c^2 = x_{ib}, \quad Z_i a^2 b^2 c = x_{ic}.$$

Die Bedingung D ist schon durch Formel (77) ausgedrückt, und zwar in der Form:

$$\begin{aligned} D = n \cdot (n-1) \cdot (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \tau s^2) \\ + n(n-1)(n-2) \cdot abc + n \cdot \varepsilon g^2. \end{aligned}$$

Um auf y zu kommen, haben wir also zunächst die Zahlen

$$a\alpha^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ b\beta^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ c\gamma^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ \tau s^2 Z_1 Z_2 Z_3,\ abc Z_1 Z_2 Z_3,\ \varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3$$

zu berechnen. Um jede der 3 Bedingungen Z auszudrücken, entnehmen wir der Formel (61) die für unser Ziel bequemere Formel:

$$\begin{aligned} Z = a \cdot x_a + b \cdot x_b + c \cdot x_c - w_a \cdot (b+c-\alpha) - w_b \cdot (c+a-\beta) \\ - w_c \cdot (a+b-\gamma) + \tau \cdot w. \end{aligned}$$

Hiernach ist:

$$\begin{aligned}
a\alpha^2 Z_1 Z_2 Z_3 &= \tau s^2 \alpha Z_1 Z_2 \cdot w_3 + a^2\alpha^2 Z_1 Z_2 \cdot x_{3a} + ab^2\alpha Z_1 Z_2 \cdot x_{3b} \\
&\quad + ac^2\alpha Z_1 Z_2 \cdot x_{3c} - (ab^2\alpha + ac^2\alpha) Z_1 Z_2 \cdot w_{3a} \\
&\quad - (ac^2\alpha - \alpha^2\beta^2) Z_1 Z_2\, w_{3b} - (ab^2\alpha - \alpha^2\gamma^2) Z_1 Z_2 \cdot w_{3c} \\
&= \tau s^2 \alpha Z_1 Z_2 \cdot w_3 + x_{3a} \cdot [a^2\alpha b^2 Z_1 . x_{2b} + a^2\alpha c^2 Z_1 \cdot x_{2c} \\
&\qquad - (a^2\alpha b^2 + a^2\alpha c^2) Z_1 \cdot w_{2a}] \\
&\quad + x_{3b} \cdot [a^2 b^2 \alpha Z_1 \cdot x_{2a} + ab^2c^2 Z_1 \cdot x_{2c} - ab^2c^2 Z_1 \cdot w_{2a} \\
&\qquad - (ab^2c^2 - b^2c^2\beta) \cdot w_{2b}] \\
&\quad + x_{3c} \cdot [a^2c^2\alpha Z_1 \cdot x_{2a} + ab^2c^2 Z_1 \cdot x_{2b} - ab^2c^2 Z_1 \cdot w_{2a} \\
&\qquad - (ab^2c^2 - b^2c^2\gamma) \cdot w_{2c}] \\
&\quad - w_{3a} \cdot [(a^2b^2\alpha + a^2c^2\alpha) Z_1 \cdot x_{2a} + ab^2c^2 Z_1 \cdot x_{2b} + ab^2c^2 Z_1 \cdot x_{2c} \\
&\qquad - 2 \cdot ab^2c^2 Z_1 \cdot w_{2a} \\
&\qquad - (ab^2c^2 - b^2c^2\beta) Z_1 \cdot w_{2b} - (ab^2c^2 - b^2c^2\gamma) Z_1 \cdot w_{2c}] \\
&\quad - w_{3b} \cdot [(ab^2c^2 - b^2c^2\beta) Z_1 \cdot x_{2b} - (ab^2c^2 - b^2c^2\beta) Z_1 \cdot w_{2a} + a^2c^2\alpha Z_1 \cdot w_{2b} \\
&\qquad - w_1 \cdot w_{2c} - \tau s^2 \alpha\beta Z_1 \cdot w_2] \\
&\quad - w_{3c} \cdot [ab^2c^2 - b^2c^2\gamma) Z_1 \cdot x_{2c} - (ab^2c^2 - b^2c^2\gamma) Z_1 \cdot w_{2a} + a^2b^2\alpha Z_1 \cdot w_{2c} \\
&\qquad - w_1 \cdot w_{2b} - \tau s^2 \alpha\gamma Z_1 \cdot w_2]
\end{aligned}$$

$$= w_3 \cdot [(w_{1c} - w_1)(w_{2b} - w_2) + (w_{1b} - w_1)(w_{2c} - w_2)]$$
$$+ x_{3a} \cdot [x_{2b} \cdot (x_{1c} - w_{1a}) + x_{2c} \cdot (x_{1b} - w_{1a}) - w_{2a} \cdot (x_{1b} + x_{1c} - 2 \cdot w_{1a})]$$
$$+ x_{3b} \cdot [x_{2a} \cdot (x_{1c} - w_{1a}) + x_{2c} \cdot x_{1a} - w_{2a} \cdot x_{1a} - w_{2b} \cdot w_{1c}]$$
$$+ x_{3c} \cdot [x_{2a} \cdot (x_{1b} - w_{1a}) + x_{2b} \cdot x_{1a} - w_{2a} \cdot x_{1a} - w_{2c} \cdot w_{1c}]$$
$$- w_{3a} \cdot [x_{2a} \cdot (x_{1b} + x_{1c} - 2 w_{1a}) + x_{2b} \cdot x_{1a} + x_{2c} \cdot x_{1a} - 2 \cdot w_{2a} \cdot x_{1a}$$
$$- w_{2b} \cdot w_{1b} - w_{2c} \cdot w_{1c}]$$
$$- w_{3b} \cdot [x_{2b} \cdot w_1 - w_{2a} \cdot w_{1b} + w_{2b} \cdot (x_{1b} - w_{1a}) - w_{2c} \cdot w_1 - w_2 \cdot (w_{1c} - w_1)]$$
$$- w_{3c} \cdot [x_{2c} \cdot w_1 - w_{2a} \cdot w_{1c} + w_{2c} \cdot (x_{1c} - w_{1a}) - w_{2b} \cdot w_1 - w_2 (w_{1b} - w_1)].$$

Einen analogen Ausdruck ergeben die Bedingungen $b\beta^2 Z_1 Z_2 Z_3$ und $c\gamma^2 Z_1 Z_2 Z_3$. Ebenso ergiebt sich:

$$abc Z_1 Z_2 Z_3 = x_{3a} \cdot x_{2b} \cdot x_{1c} + x_{3a} \cdot x_{2c} \cdot x_{1b} + x_{3b} \cdot x_{2c} \cdot x_{1a}$$
$$+ x_{3b} \cdot x_{2a} \cdot x_{1c} + x_{3c} \cdot x_{2a} \cdot x_{1b} + x_{3c} \cdot x_{2b} \cdot x_{1a}$$
$$- x_{1a} \cdot w_{2a} \cdot w_{3a} - x_{1b} \cdot w_{2b} \cdot w_{3b} - x_{1c} \cdot w_{2c} \cdot w_{3c}$$
$$- x_{2a} \cdot w_{1a} \cdot w_{3a} - x_{2b} \cdot w_{1b} \cdot w_{3b} - x_{2c} \cdot w_{1c} \cdot w_{3c}$$
$$- x_{3a} \cdot w_{1a} \cdot w_{2a} - x_{3b} \cdot w_{1b} \cdot w_{2b} - x_{3c} \cdot w_{1c} \cdot w_{2c}.$$

Die Werthe von $\tau s^2 Z_1 Z_2 Z_3$ und $\varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3$ findet man am kürzesten direct durch Correspondenzen im Strahlbüschel resp. auf einer Geraden, nämlich:

$$\tau s^2 Z_1 Z_2 Z_3 = (w_{3a} - w_3) \cdot [(w_{2b} - w_2)(w_{1c} - w_1) + (w_{2c} - w_2)(w_{1b} - w_1)]$$
$$+ (w_{3b} - w_3) \cdot [(w_{2c} - w_2)(w_{1a} - w_1) + (w_{2a} - w_2)(w_{1c} - w_1)]$$
$$+ (w_{3c} - w_3) \cdot [(w_{2a} - w_2)(w_{1b} - w_1) + (w_{2b} - w_2)(w_{1a} - w_1)],$$

$$\varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3 = (x_{3a} - w_{3b} - w_{3c}) \cdot [(x_{2b} - w_{2a} - w_{2c}) \cdot (x_{1c} - w_{1a} - w_{1b})$$
$$+ (x_{2c} - w_{2a} - w_{2b}) \cdot (x_{1b} - w_{1a} - w_{1c})]$$
$$+ (x_{3b} - w_{3c} - w_{3a}) \cdot [(x_{2c} - w_{2b} - w_{2a}) \cdot (x_{1a} - w_{1b} - w_{1c})$$
$$+ (x_{2a} - w_{2b} - w_{2c})(x_{1c} - w_{1b} - w_{1a})]$$
$$+ (x_{3c} - w_{3a} - w_{3b}) \cdot [(x_{2a} - w_{2c} - w_{2b})(x_{1b} - w_{1c} - w_{1a})$$
$$+ (x_{2b} - w_{2c} - w_{2a})(x_{1a} - w_{1c} - w_{1b})].$$

Wir setzen nun die berechneten Ausdrücke an die Stelle der Symbole der Formel:

$$D Z_1 Z_2 Z_3 = n(n-1) \cdot (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \tau s^2) Z_1 Z_2 Z_3$$
$$+ n(n-1)(n-2) \cdot abc Z_1 Z_2 Z_3 + n \cdot \varepsilon g^2 Z_1 Z_2 Z_3,$$

und schreiben gemäss der Formel (114):

$$\mu_{ia} + w_{ib} + w_{ic} \quad \text{statt} \quad x_{ia}.$$

Dadurch erhalten wir schliesslich:

$$(117)\quad y = DZ_1Z_2Z_3 = \mu_{1a}\cdot\mu_{2b}\cdot\mu_{3c} + \mu_{1a}\cdot\mu_{2c}\cdot\mu_{3b}$$
$$+ \mu_{1b}\cdot\mu_{2a}\cdot\mu_{3c} + \mu_{1b}\cdot\mu_{2c}\cdot\mu_{3a} + \mu_{1c}\cdot\mu_{2a}\cdot\mu_{3b} + \mu_{1c}\cdot\mu_{2b}\cdot\mu_{3a}$$
$$-(n-1)(n-2)\ (\mu_{1a}w_{2a}w_{3a} + \mu_{1b}w_{2b}w_{3b} + \mu_{1c}w_{2c}w_{3c}$$
$$+ w_{1a}\mu_{2a}w_{3a} + w_{1b}\mu_{2b}w_{3b} + w_{1c}\mu_{2c}w_{3c}$$
$$+ w_{1a}w_{2a}\mu_{3a} + w_{1b}w_{2b}\mu_{3b} + w_{1c}w_{2c}\mu_{3c})$$
$$+(n-1)(n-2)\cdot(w_{1a}w_{2b}w_{3c} + w_{1a}w_{2c}w_{3b} + w_{1b}w_{2a}w_{3c}$$
$$+ w_{1b}w_{2c}w_{3a} + w_{1c}w_{2a}w_{3b} + w_{1c}w_{2b}w_{3a}).$$

Dieser Ausdruck für die Zahl der auf einer Plancurve liegenden und drei gegebenen Correspondenzen zwischen je drei Punkten gemeinsamen Punkttripel, ist auf ganz anderen Wegen schon von Brill, (Math. Ann. Bd. VI, p. 56) und später von Lindemann (Clebsch's Vorles. p. 748) berechnet. Wenn schon unsere Auffindung dieses Ausdrucks viel Rechnung erforderte, so war es doch auch andererseits bei der Aufstellung der Formeln für *gemeinsame Dreiecke von Dreieckssystemen* geboten, den Ausdruck auch auf dem neu eröffneten Wege aufzufinden.

§ 11.

Die Erweiterung der Formeln auf Dreiecke in nicht fester Ebene.

Die Formeln für das Dreieck im Raume, welches die Constantenzahl 9 hat, müssen so beschaffen sein, dass die Formeln der vorangehenden Paragraphen aus ihnen hervorgehen, wenn man sie mit der dreifachen Bedingung, dass das Dreieck in einer gegebenen Ebene liegen soll, multiplicirt. Es treten also zu den entwickelten Formeln nur noch Glieder hinzu, welche sich auf die Lage der Ebene des Dreiecks beziehen. Wir bezeichnen demgemäss die Ecken, Seiten und Ausartungen für das Dreieck im Raume gerade so, wie für das Dreieck in fester Ebene, und fügen nur hinzu, dass seine Ebene μ heissen soll. Die Bezeichnung der Lagebedingungen ergiebt sich dann sehr leicht aus den allgemeinen Bezeichnungsregeln für die Grundbedingungen des Punktes, des Strahls und der Ebene. (Math. Ann. Bd. X, p. 25 u. f., Kalkül, § 2., § 6.) Es bezeichnet z. B.

1) B die vierfache Bedingung, dass die Seite β gegeben sein soll,

2) $\mu\beta_p b^2$ die fünffache Bedingung, dass die Ebene des Dreiecks durch einen gegebenen Punkt gehe, dass zugleich die Seite β einen gegebenen Punkt enthalte und ausserdem die Ecke b auf einer gegebenen Geraden liege,

3) $\tau s^3\alpha$ die vierfache Bedingung, dass das Dreieck nach der Definition von τ (§ 1.) ausgeartet sei, dass dabei sein Punkt s gegeben sei und seine Seite α eine gegebene Gerade schneide,

4) ηg_s die sechsfache Bedingung, dass das Dreieck zu einer Ausartung η werde, und dabei seinen Strahl g in einem gegebenen Strahlbüschel besitze.

Die den Formeln des § 2. entsprechenden Formeln für das Dreieck im Raume ergeben sich durch blosse symbolische Multiplication aus den Formeln, welche den mit (1) bis (6), (17) bis (20) und (37), (38) bezeichneten analog sind. Die 6 ersten Formeln heissen z. B.

$$b + c - \alpha = \tau + \vartheta_a, \quad c + a - \beta = \tau + \vartheta_b, \quad a + b - \gamma = \tau + \vartheta_c$$
$$\beta + \gamma - a - \mu = \varepsilon + \vartheta_a, \quad \gamma + \alpha - b - \mu = \varepsilon + \vartheta_b,$$
$$\alpha + \beta - c - \mu = \varepsilon + \vartheta_c.$$

Aus ihnen ergeben sich z. B.

$$a + b + c + \mu + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \tau,$$
$$a\alpha + \alpha_e - \mu^2 = \tau\alpha + \varepsilon g + \vartheta_b g + \vartheta_c g,$$
$$b^3 c\gamma - b^3 \alpha\gamma = \tau s^3 \gamma + \vartheta_a s^3 g \text{ u. s. w.}$$

Auch die Aufstellung der Productenformeln für die Zahl der gemeinsamen Dreiecke von Dreieckssystemen (§ 4. bis § 6.) bietet keine sachliche Schwierigkeit. Man erhält diese Formeln z. B. aus folgender Stammformel (cf. F. 59):

$$(B + \beta_s\beta' + \beta_e\beta_e' + \beta_p\beta_p' + \beta\beta_s' + B')\,(\mu + \mu' - \beta')\,(a + a' - \beta')$$
$$\text{mal } [(c + c' - \beta)\,(\gamma + \gamma' - a')\,(\alpha + \alpha' - b') - \vartheta_b\vartheta_b'(\gamma + \gamma' - a')$$
$$- \varepsilon\varepsilon'(c + c' - \beta')].$$

Wir entnehmen dieser Stammformel nur die Erkenntniss, dass die Productenformeln für das Dreieck im Raume die in den §§ 4. bis 6. erschienenen Bedingungssymbole und ausserdem nur noch auf μ bezügliche Symbole enthalten, z. B. von einfachen Bedingungssymbolen:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \tau,\ \mu,$$

von zweifachen:

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ \alpha_e,\ \beta_e,\ \gamma_e,\ a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ \vartheta_a s,\ \vartheta_b s,\ \vartheta_c s,$$
$$\vartheta_a g,\ \vartheta_b g,\ \vartheta_c g,\ \tau s,\ \varepsilon g \text{ und } \mu a,\ \mu b,\ \mu c,\ \alpha_p \cdot \beta_p,\ \gamma_p,\ \tau\mu,\ \mu^2.$$

Die Gestalt der Productenformeln lässt sich dann durch das von mir in den Math. Ann. Bd. X, p. 355 zuerst angewandte Eliminationsverfahren erkennen.

Wir wollen jedoch hier nur *die auf das unendlich kleine Dreieck bezüglichen Formeln* entwickeln, wobei wir wie in § 7. das Symbol ψ immer fortlassen können. An die Stelle der Formeln (84) und (85) haben wir zu setzen:

$$d = \eta + 3 \cdot s + x \cdot \mu$$

und

$$d = \xi + 3 \cdot g + y \cdot \mu,$$

wo x und y noch unbekannte Coefficienten sind, und d jetzt die einfache Bedingung bedeutet, dass ein unendlich kleines Dreieck auf einem der ∞^5 Kegelschnitte liegen soll, welche drei gegebene Gerade schneiden. Zur Bestimmung der Coefficienten x und y kommen wir auf folgendem Wege. Wir multipliciren die rechten und die linken Seiten der Gleichungen:

$$\eta = d - 3 \cdot s - x \cdot \mu$$

$$d - 3 \cdot g - y \cdot \mu = \zeta,$$

wodurch wir erhalten:

$$\eta d - 3 \cdot \eta g - y \cdot \eta\mu = \zeta d - 3 \cdot \zeta s - x \cdot \zeta\mu.$$

Diese Gleichung multipliciren wir nun so mit fünffachen Bedingungen, dass siebenfache Bedingungen entstehen, deren Zahlenwerthe leicht zu bestimmen sind. Multipliciren wir mit Gs, so bekommen wir:

$$2 - 3 \cdot 0 - y \cdot 1 = 3 - 3 \cdot 0 - x \cdot 1.$$

Ferner eignet sich die fünffache Bedingung Gd, dann kommt nämlich links Null, weil ein auf η bezügliches siebenfaches Symbol den Werth Null hat, wenn keine auf den Punkt s bezügliche Bedingung darin steckt. Rechts bekommen wir die Symbole $\zeta G d^2$, $\zeta G s d$, $\zeta G \mu d$. Um $\zeta G d^2$ zu bestimmen, beachten wir, dass auf dem durch die Bedingung G gegebenen Strahle ein Punkt zu bestimmen ist, von welchem zwei Geradenpaare so ausgehen, dass sie mit dem Strahle in einer und derselben Ebene liegen, und dass jedes Geradenpaar drei gegebene Gerade schneidet. Also ist, nach den Incidenzformeln, $\zeta G d^2 = 2 \cdot 3_2 \cdot 3_2 = 18$. Ebenso ergiebt sich leicht $\zeta G s d = 3$ und $\zeta G \mu d = 3$. Folglich ist:

$$0 = 18 - 3 \cdot 3 - x \cdot 3.$$

Endlich multipliciren wir noch mit $s^3 \mu d$. Dann kommt auf der rechten Seite Null, weil keins der dort erscheinenden Symbole eine auf g bezügliche Bedingung enthält. Links haben wir die Werthe von $\eta s^3 \mu d^2$, $\eta g s^3 \mu d$, $\eta s^3 \mu^2 d$ zu bestimmen. Bei $\eta s^3 \mu d^2$ kann der Strahl g von η sowohl dadurch festgestellt werden, dass er aus jedem der beiden durch d^2 gegebenen Geradentripel eine Gerade schneidet, wie auch dadurch, dass er nur eine Gerade des einen Tripels schneidet, während alle drei Geraden des andern Tripels zur Feststellung des zweiten Strahls des in ein Strahlenpaar ausgearteten Kegelschnitts verwandt werden. Also ist:

$$\eta s^3 \mu d^2 = 3_1 \cdot 3_1 + 2 \cdot 3_1 \cdot 2 = 21.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\eta s^3 \mu^2 d = 3, \quad \eta g s^3 \mu d = \eta g_p s^3 d + \eta \mu^2 s^3 d = 2 + 3.$$

Demnach erhalten wir:

$$21 - 3 \cdot 5 - y \cdot 3 = 0.$$

Die 3 Gleichungen, welche wir für x und y aufgestellt haben, ergeben mit Bestätigung:

$$x = 3, \quad y = 2.$$

Also ist:

(118) $$d = \eta + 3 \cdot s + 3 \cdot \mu$$

und

(119) $$d = \zeta + 3 \cdot g + 2 \cdot \mu,$$

woraus folgt:

(120) $$\eta + 3 \cdot s + \mu = \zeta + 3 \cdot g.$$

Die Anwendung der Formel (120) auf das durch je 3 consecutive Punkte einer Raumcurve erzeugte, einstufige System von unendlich kleinen Dreiecken ergiebt eine der bekannten Formeln zwischen den Charakteren einer Raumcurve.

Zur Ableitung der Productenformeln benutzen wir das in den Math. Ann. Bd. X, p. 355 allgemein auseinandergesetzte Eliminationsverfahren. Um z. B. die Zahl x_{16} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke zu bestimmen, *welche einem gegebenen einstufigen Systeme Σ und einem gegebenen, sechsstufigen Systeme Σ' gemeinsam sind*, gehen wir davon aus, dass die gesuchte Formel von den auf Σ bezüglichen Symbolen ausser s, g, ζ nur noch μ enthalten kann. Wir können also schreiben:

$$x_{16} = s \cdot y + g \cdot v + (3g + \zeta) \cdot w + \mu \cdot u,$$

wo y, v, w, u noch zu bestimmende Coefficienten sind, welche auf Σ' bezügliche, sechsfache Bedingungen darstellen. Um sie zu bestimmen, multipliciren wir die Formel nach einander etwa mit $d'G'\mu'$, $d's'^3\mu'^2$, $G'\mu's'$, $d'G's'$. Dadurch kommt:

$$d'G'\mu' = y + 3w, \quad d's'^3\mu'^2 = v + 3w,$$
$$G'\mu's' = w, \quad d'G's' = 3 \cdot w + u,$$

also:

$$w = G'\mu's, \quad u = d'G's' - 3 \cdot G'\mu's', \quad v = d's'^3\mu'^2 - 3 \cdot G'\mu's',$$
$$y = d'G'\mu' - 3G'\mu's',$$

woraus sich nach Anwendung der Formeln (118) und (119) ergiebt:

$$w = G'\mu's', \quad u = \eta'G's', \quad v = \zeta's'^3\mu'^2, \; y = \eta'G'\mu'.$$

Hiernach kommt für die gesuchte Zahl:

(121) $$x_{16} = s \cdot \eta'G'\mu' + g \cdot \zeta's'^3\mu'^2 + (3g + \zeta) \cdot G'\mu's' + \mu \cdot \eta'G's'.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für die Zahl x_{25} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, *welche einem gegebenen, zweistufigen Systeme Σ und einem gegebenen, fünfstufigen Systeme Σ' gemeinsam sind*, die Formel:

$$(122)\quad x_{25} = s^2\cdot(\eta'\mu'^3 g' + 3\cdot\mu'^3 s'^2) + g_e\cdot(\zeta'\mu'^3 s' + 3\cdot G'\mu') + \eta g\cdot\mu'^3 s'^2 + \zeta s\cdot G'\mu' + g_p\cdot\zeta'\mu' s'^3 + \mu s\cdot(\eta' G' + 3\cdot G' s') + \eta\mu\cdot G' s' + \mu^2\cdot\zeta' s'^3 g'.$$

Drittens erhält man für die Zahl x_{34} derjenigen unendlich kleinen Dreiecke, *welche einem gegebenen dreistufigen Systeme Σ und einem gegebenen, vierstufigen Systeme Σ' gemeinsam sind*, die Formel:

$$\begin{aligned}(123)\quad x_{34} = {} & \zeta s^2\cdot\mu'^3 g' + \eta g_e\cdot\mu'^3 s' + s g_e\cdot(\mu'^3\zeta' + 3\cdot\mu'^3 g') \\ & + \eta g_p\cdot\mu' s'^3 + \zeta\mu s\cdot G' + (\mu s^2 - s^3)\cdot\eta' g_s' \\ & + \mu g_p\cdot(\zeta' s'^3 + 3\cdot s'^3 g') \\ & + s^3\cdot(\eta'\mu' g_p' + 3\cdot\mu' s'^3) + \mu^3\cdot(\eta' s' g_e' + \mu'^3 s') + \zeta\mu^2\cdot s'^3 g' \\ & + g_s\cdot(\zeta'\mu' s'^2 - \zeta' s'^3 + 3\cdot G').\end{aligned}$$

Von den abgeleiteten Productenformeln entwickeln wir durch Multiplication der Formel für x_{34} diejenigen, welche sich auf *zwei gegebene vierstufige Systeme von unendlich kleinen Dreiecken Σ und Σ' beziehen.* Zwei solche Systeme haben ∞^1 unendlich kleine Dreiecke gemeinsam. Die ihnen angehörigen ∞^1 Punkte s bilden eine Curve von der Ordnung:

$$\begin{aligned}(124)\quad s x_{34} = {} & \eta s g_e\cdot\mu'^3 s' + \mu^3 s\cdot\eta' s' g_e' + \zeta s^3\cdot\mu'^3 g' + \mu^3 g\cdot\zeta' s'^3 \\ & + s^3 g\cdot\zeta'\mu'^3 \\ & + \zeta\mu^3\cdot s'^3 g' + 3\cdot s^3 g\cdot\mu'^3 g' + 3\cdot\mu^3 g\cdot s'^3 g' + \eta g_s\cdot\mu' s'^3 \\ & + \mu s^3\cdot\eta' g_s' \\ & + 3\cdot s^3 g\cdot\mu' s'^3 + 3\cdot\mu s^3\cdot s'^3 g' + \zeta s^3\cdot\mu' s'^3 + \mu s^3\cdot\zeta' s'^3 \\ & + \zeta s^3\cdot G' + G\cdot\zeta' s'^3 \\ & + (\zeta\mu s^2 - \zeta s^3)\cdot G' + G\cdot(\zeta'\mu' s'^2 - \zeta' s'^3) \\ & + s^3 g\cdot(\zeta'\mu' s'^2 - \zeta' s'^3) + (\zeta\mu s^2 - \zeta s^3)\cdot s'^3 g' \\ & + 3\cdot G\cdot s'^3 g' + 3\cdot s^3 g\cdot G' + 3\cdot G\cdot G' + \mu^3 s\cdot\mu'^3 s' \\ & - \mu s^3\cdot\mu' s'^3;\end{aligned}$$

die ihnen angehörigen Strahlen g bilden eine Linienfläche vom Grade:

$$\begin{aligned}(125)\quad g x_{34} = {} & \eta g_s\cdot\mu'^3 s' + \mu^3 s\cdot\eta' g' s' + G\cdot\mu'^3\zeta' + \mu^3\zeta\cdot G' + \eta g_s\cdot\mu' s'^3 \\ & + \mu s^3\cdot\eta' g_s' + (\zeta\mu s^2 - \zeta s^3)\cdot G' + G\cdot(\zeta'\mu' s'^2 - \zeta' s'^3) \\ & + G\cdot\eta' g_s' + \eta g_s\cdot G' \\ & + G\cdot\zeta' s'^3 + \zeta s^3\cdot G' + \zeta\mu^3\cdot s'^3 g' + s^3 g\cdot\zeta'\mu'^3 \\ & + 3\cdot G\cdot s'^3 g' + 3\cdot s^3 g\cdot G' \\ & + 4\cdot\mu^3 g\cdot s'^3 g' + 4\cdot s^3 g\cdot\mu'^3 g' + s^3 g\cdot\eta'\mu' g_p' + \eta\mu g_p\cdot s'^3 g' \\ & + 3\cdot s^3 g\cdot\mu' s'^3 + 3\mu s^3\cdot s'^3 g' \\ & + 4 G\cdot G' + \mu^3 g\cdot\eta' s' g_e' + \eta s g_e\cdot\mu'^3 g' + \mu^3 g\cdot\mu'^3 s' + \mu^3 s\cdot\mu'^3 g' \\ & + \mu^3 g\cdot\zeta' s'^3 + \zeta s^3\cdot\mu'^3 g' + G\cdot\mu'^3 g' + \mu^3 g\cdot G';\end{aligned}$$

endlich gehen von den ihnen angehörigen ∞^1 Ebenen durch einen gegebenen Punkt:

$$
\begin{aligned}
(126)\quad \mu x_{34} = {} & \zeta s^3 \cdot \mu'^3 g' + \mu^3 g \cdot \zeta' s'^3 + \eta g_s \cdot \mu'^3 s' + \mu^3 s \cdot \eta' g_s' \\
& \qquad + 3 \cdot \mu^3 s \cdot \mu'^3 s' \\
& + \mu^3 s \cdot \eta' \mu'^3 + \eta \mu^3 \cdot \mu'^3 s' + \eta \mu g_p \cdot \mu' s'^3 + \mu s^3 \cdot \eta' \mu' g_p' \\
& \qquad + 3 \cdot G \cdot G' \\
& + (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot G' + G \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3) + 3 \cdot \mu^3 g \cdot s'^3 g' \\
& \qquad + 3 \cdot s^3 g \cdot \mu'^3 g' \\
& + \zeta \mu^3 \cdot s'^3 g' + s^3 g \cdot \zeta' \mu'^3 + \mu^3 g \cdot (\zeta' \mu' s'^2 - \zeta' s'^3) \\
& \qquad + (\zeta \mu s^2 - \zeta s^3) \cdot \mu'^3 g' \\
& + 3 \cdot \mu^3 g \cdot G' + 3 \cdot G \cdot \mu'^3 g' + G \cdot \mu'^3 \zeta' + \mu^3 \zeta \cdot G' + 3 \mu s^3 \cdot \mu' s'^3.
\end{aligned}
$$

Der Umstand, dass die drei abgeleiteten Formeln durch Vertauschung der gestrichelten Symbole mit den nichtgestrichelten Symbolen in sich selbst übergehen, liefert eine Controle der Berechnung.

Es liegt nahe, die Productenformeln (121) bis (126) auf die Systeme anzuwenden, welche auf Flächen und auf Raumcurven durch je drei unendlich nahe Punkte gebildet werden. Die Deutung der Symbole für eine Fläche ist sehr leicht, wenn man beachtet, dass jede Haupttangente durch ihren Berührungspunkt und durch jede sie enthaltende Ebene ein Dreieck η erzeugt, und dass jeder Punkt der Rückkehrcurve auf jeder ihn treffenden Ebene ein Dreieck ζ erzeugt. Das durch eine Raumcurve erzeugte, einstufige System kann eine endliche Anzahl von Dreiecken η überhaupt nicht enthalten. Denn, wenn die Curve stationäre Erzeugende d. h. Stellen besitzt, wo 3 consecutive Punkte in gerader Linie liegen, so enthält sie ein Dreieck η in jeder durch diese gerade Linie gelegten Ebene, also ∞^1 Dreiecke η, und ein solcher Fall macht unsere Fragestellungen überhaupt illusorisch. Ein Dreieck ζ aber treffen wir auf einer Raumcurve in jedem stationären Punkte, d. h. wo drei consecutive Tangenten sich in demselben Punkte schneiden. Bei *Systemen* von Flächen oder von Curven könnte die Deutung der auf η oder ζ bezüglichen Symbole Ausartungsanzahlen einführen. Ersetzt man jedoch dann das auf η resp. ζ bezügliche Symbol vermittelst der Formel (120) durch ein auf ζ resp. η bezügliches Symbol, so bekommt man immer eine Deutung, welche von Ausartungsanzahlen frei ist. Hiernach findet man:

1) für eine feste Fläche:

$\mu^3 s = n,\ \mu^3 g = a,\ \eta \mu^3 = \varkappa',\ \eta \mu g_p = \varkappa,\ \eta \mu s^2 = 2 \cdot n,\ \zeta \mu s^2 = 0,$

wo, nach der Bezeichnung von Salmon-Fiedler, n die Ordnung der Fläche und a ihren Rang bedeutet, wo ferner $\varkappa'$ angiebt, wieviel Haupttangenten in einer gegebenen Ebene liegen, $\varkappa$ angiebt, wieviel durch einen gegebenen Punkt gehen;

2) für ein einstufiges System von Flächen:

$$\mu^3 s^2 = \mu, \quad \mu G = \nu, \quad \eta G = 0, \quad \zeta \mu^3 s = k, \quad \eta \mu^3 g = k',$$

wo μ angiebt, wieviel Flächen durch einen gegebenen Punkt gehen, ν, wieviel eine gegebene Gerade berühren, und wo k den Grad der von den ∞^1 Rückkehrcurven gebildeten Fläche, k' den Grad des von den ∞^3 Haupttangenten gebildeten Complexes bezeichnen;

3) für ein zweistufiges Flächensystem:

$$\mu G s = T, \quad \eta G s = 0, \quad \eta \mu G = K', \quad \zeta \mu^3 s^2 = K,$$

wo T angiebt, wieviel Flächen eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, K', wieviel Flächen eine gegebene Gerade als Haupttangente haben, K, wieviel Flächen durch einen gegebenen Punkt ihre Rückkehrcurve schicken;

4) für eine feste Raumcurve:

$$s = m, \quad g = r, \quad \mu = n, \quad \zeta = \beta, \quad \eta = 0,$$

wo, nach der Bezeichnung von Salmon-Fiedler, m die Ordnung der Raumcurve, r ihren Rang, n ihre Classe, β die Zahl ihrer stationären Punkte bedeutet;

5) für ein einstufiges System von Raumcurven:

$$s^2 = \nu, \quad g_e = \varrho, \quad g_p = \varrho', \quad \mu^2 = \nu', \quad \mu s = \sigma, \quad \eta g = 0, \quad \zeta s = b,$$

wo ν angiebt, wieviel Raumcurven eine gegebene Gerade schneiden, ϱ, wieviel eine gegebene Ebene berühren, ϱ', wieviel eine Tangente durch einen gegebenen Punkt schicken, ν', wieviel eine Schmiegungsebene durch eine gegebene Gerade schicken, σ, wieviel eine Schmiegungsebene durch einen gegebenen Punkt schicken, während ihr Berührungspunkt auf einer gegebenen Ebene liegt, und wo ζs die Ordnung der von den stationären Punkten gebildeten Curve bezeichnet;

6) für ein zweistufiges System von Raumcurven:

$$s^3 = P, \quad \mu^3 = P', \quad s g_e = t, \quad \zeta s^2 = B,$$

wo P angiebt, wieviel Raumcurven durch einen gegebenen Punkt gehen, P', wieviel eine gegebene Schmiegungsebene haben, t, wieviel eine gegebene Ebene auf einer in ihr gegebenen Geraden berühren, und wo B der Grad der von den stationären Punkten gebildeten Fläche ist.

Die in den 6 Fällen *nicht* angeführten Symbole sind entweder Null, oder lassen sich bei der Anwendung der Formeln (121) bis (126) vermeiden.

Wir bezeichnen nun eine gegebene Raumcurve oder Fläche oder ein gegebenes System solcher Gebilde immer durch S mit einem angefügten Index, und die auf S_i bezüglichen Anzahlen durch die eben eingeführten Buchstaben, aber versehen mit dem Index i. Dann können wir den aus F. (121) folgenden Satz für die dreipunktige Berührung zwischen einer Raumcurve und einer Fläche eines zweistufigen Flächensystems so aussprechen:

(121a) *Die Zahl derjenigen Flächen eines zweistufigen Flächensystems S_2, welche eine gegebene Raumcurve S_1 dreipunktig berühren, beträgt:*

$$m_1 \cdot K_2' + r_1 \cdot K_2 + (3 \cdot r_1 + \beta_1) \cdot T_2.$$

Aus (122) folgt:

(122a) *Unter den Raumcurven eines einstufigen Systems S_1 von Raumcurven giebt es*

$$\nu_1 \cdot (k_2' + 3 \cdot \mu_2) + \varrho_1 \cdot (k_2 + 3 \cdot \nu_2) + b_1 \cdot \nu_2,$$

welche eine Fläche eines gegebenen einstufigen Flächensystems S_2 dreipunktig berühren.

Aus (123) ergiebt sich:

(123a) *Die Zahl derjenigen Raumcurven eines gegebenen zweistufigen Systems S_1, welche eine gegebene Fläche S_2 dreipunktig berühren, beträgt:*

$$P_1 \cdot \varkappa_2 + P_1' \cdot n_2 + B_1 \cdot a_2 + t_1 \cdot (\varkappa_2' + 3 \cdot n_2).$$

Wendet man schliesslich die Formeln (124), (125), (126) auf zwei gegebene Flächen S_1 und S_2 an, so werden alle Glieder der rechten Seiten Null mit Ausnahme von

$$\mu^3 s \cdot \mu'^3 s', \quad \mu^3 g \cdot \mu'^3 s', \quad \mu^3 s \cdot \mu'^3 g', \quad \mu^3 s \cdot \eta' \mu'^3, \quad \eta \mu^3 \cdot \mu'^3 s',$$

welche beziehungsweise liefern:

$$n_1 \cdot n_2, \quad a_1 \cdot n_2, \quad n_1 \cdot a_2, \quad n_1 \cdot \varkappa_2', \quad \varkappa_1' \cdot n_2.$$

Die Zahlen $s x_{34}$, $g x_{34}$, μx_{34} sind aber nichts anderes, als Ordnung, Rang und Classe der Durchschnittscurve der beiden Flächen S_1 und S_2, so dass unsere Anwendung zu folgendem Satze führt:

(124a), (125a), (126a). *Die Schnittcurve zweier Flächen S_1 und S_2 besitzt ∞^1 Punkte, von denen jede Ebene $n_1 \cdot n_2$ enthält, ferner ∞^1 Tangenten, von denen*

$$n_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot n_2$$

eine gegebene Gerade schneiden, endlich ∞^1 Schmiegungsebenen, von denen

$$3 \cdot n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot \varkappa_2' + \varkappa_1' \cdot n_2$$

durch einen gegebenen Punkt gehen.

Die beiden letzten Zahlen ergeben bekannte Resultate für die speciellen Fälle, wo beide Flächen abwickelbar sind, oder wo beide punktallgemein sind, also $a = n \cdot (n-1)$, $\varkappa' = 3 \cdot n(n-2)$ ist. (Vergl. Salmon-Fiedler's Raumgeometrie, Art. 439 und 83.)

Hamburg, Juni 1880.