Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die lineare homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten, die zuerst von Euler*) mittelst bestimmter Integrale gelöst worden ist, lässt sich bekanntlich auf die Normalform**)

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = (x - \varrho) \frac{dy}{dx} + \alpha y \tag{1}$$

bringen, woselbst α und ϱ Constanten bedeuten. Die Gleichung (1), für welche, abgesehen von $x = \infty$, nur $x = 0$ ein singulärer Punkt ist, wird einerseits durch eine transcendente ganze Function von x befriedigt, andererseits durch ein Product aus der Potenz $x^{1-\varrho}$ und einer transcendenten ganzen Function von x. Diese zwei particulären Integrale, welche die Hauptintegrale oder Hauptlösungen der Gleichung (1) genannt werden, lauten in ihrer Darstellung durch Potenzreihen

$$F(\alpha;\ \varrho;\ x) \tag{2}$$

und

$$x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1;\ 2 - \varrho;\ x), \tag{3}$$

wo zur Abkürzung

$$F(a;\ r;\ x) = 1 + \frac{a}{1 \,.\, r} x + \frac{a(a+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, r(r+1)} x^2 + \cdots \text{inf.} \tag{4}$$

gesetzt ist. Es wird angenommen, dass die Constante ϱ nicht ganzzahlig sei; die logarithmischen Fälle der Gleichung (1) werden dem-

*) Institutiones calculi integralis, Vol. II, Cap. X, art. 1036.

**) Cfr. J. A. Weiler: „Integration der linearen Differentialgleichungen etc." in Crelle's Journal, Bd. 51. Die einzelnen Fälle sind ausführlicher behandelt in Simon Spitzer's „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" (Wien, C. Gerold's Sohn). Die Reduction der genannten Differentialgleichung auf die Normalform findet sich übersichtlich dargestellt in Schlömilch's „Compendium der höheren Analysis", Bd. II.

gemäss hier nicht in Betracht gezogen. In Folge dieser Voraussetzung kann keine der Reihen (2) und (3) illusorisch werden; dieselben convergiren für jeden endlichen Werth von x. Substituirt man in (1)

$$y = x^{1-\varrho}\,\eta, \tag{5}$$

so wird für η die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2\eta}{dx^2} = (x - [2-\varrho])\frac{d\eta}{dx} + (\alpha - \varrho + 1)\,\eta \tag{6}$$

erhalten, deren Coefficienten aus denen der Gleichung (1) entstehen, wenn α und ϱ durch $\alpha - \varrho + 1$ und $2 - \varrho$ ersetzt werden.

Die Reihen (2) und (3) gehen, wenn sie mit passenden Constanten multiplicirt werden, in bestimmte Integrale über. Bezeichnet man durch $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$E(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du, \tag{7}$$

so ist bekanntlich

$$\int_0^1 e^{ux}\,u^{\alpha-1}(1-u)^{\varrho-\alpha-1}\,du = E(\alpha, \varrho-\alpha)\,F(\alpha;\varrho;x), \tag{8}$$

wie durch Entwickelung der Grösse e^{ux} in die Reihe $1 + \frac{ux}{1} + \cdots$ und durch Anwendung der Formel

$$E(a+m, b) = \frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+m-1)}\,E(a, b) \tag{9}$$

bewiesen wird. Aus (8) folgt für die in (3) angeführte particuläre Lösung die Gleichung

$$\begin{cases} x^{1-\varrho}\displaystyle\int_0^1 e^{ux}\,u^{\alpha-\varrho}(1-u)^{-\alpha}\,du = \\ = E(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha)\,x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1;\, 2-\varrho;\, x), \end{cases} \tag{10}$$

deren linke Seite sich durch die Substitution $u = \frac{v}{x}$ in den Ausdruck

$$\int_0^x e^v(x-v)^{-\alpha}\,v^{\alpha-\varrho}\,dv \tag{11}$$

verwandelt.

Die Auflösung der Differentialgleichung (1) durch die obigen bestimmten Integrale ist insofern eine unvollkommene, als diese Integrale nur für gewisse Werthgebiete der Constanten α und ϱ convergiren. In (8) müssen die reellen Bestandtheile von α und $\varrho - \alpha$, in (10) und (11) die reellen Bestandtheile von $\alpha - \varrho + 1$ und $1 - \alpha$ als positiv vorausgesetzt werden. Damit also die Integrale (8) und (10), resp. (11) gleichzeitig convergent seien, muss sowohl der reelle Theil von α als auch der reelle Theil von $\varrho - \alpha$ zwischen 0 und 1 liegen. In den Fällen, wo α und ϱ diese Bedingung nicht erfüllen, kann man nach Spitzer, l. c., ein Reductionsverfahren (wiederholte Differentiation der Gleichung (1) und Substitutionen) zu Hülfe zu nehmen, welches jedoch meistens ziemlich weitläuftige Rechnungen erfordert.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass man zu einer allgemein gültigen Lösung der Differentialgleichung (1) mittelst bestimmter Integrale gelangt, wenn man geschlossene Integrationscurven für die letzteren anwendet. Das Verfahren ist dem analog, welches der Verfasser für die Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung 2[ter] Ordnung angegeben hat*). Bei dem Uebergang von den bestimmten Integralen zu den Potenzreihen treten dann als constante Factoren die vom Verfasser definirten Integrale $\mathfrak{E}(a,b)$, $\overline{E}(a,b)$ und $\overline{\Gamma}(a)$ auf**), die den Euler'schen Integralen $E(a,b)$ und $\Gamma(a)$ verwandt sind.

Es ist ferner zu bemerken, dass nach der bisherigen Methode der Auflösung der Gleichung (1) durch bestimmte Integrale zunächst immer nur eins der obengenannten Hauptintegrale gefunden wird, während das zweite sich durch die Substitution (5) ergiebt. Bei den im Folgenden angestellten Rechnungen gelangt man dagegen unmittelbar zu beiden Hauptintegralen. Die zu integrirende Function stimmt bei diesen Integralen mit der des Integrals (11) überein, und zwar wird, um die eindeutige particuläre Lösung von (1) zu erhalten, eine von $-\infty$ ausgehende und dorthin zurückkehrende Integrationscurve gewählt, welche die Punkte 0 und x umschliesst.

§ 2.

In die Differentialgleichung (1) möge für y das bestimmte Integral

$$\int_g^h (u-x)^{-\alpha}\,\mathfrak{U}\,du \tag{12}$$

substituirt werden, in welchem $\mathfrak{U}$ eine Function von u allein, und g, h Constante bedeuten. Dann entsteht die Gleichung

$$\int_g^h (u-x)^{-\alpha-2}\{(\alpha+1)\,x-(u-\varrho)\,(u-x)\}\,\mathfrak{U}\,du=0,$$

oder, wenn der neben $\alpha+1$ stehende Factor x durch $u-(u-x)$ ersetzt wird,

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha+1)\displaystyle\int_g^h (u-x)^{-\alpha-2}\,u\,\mathfrak{U}\,du\\ -\displaystyle\int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}(u+\alpha-\varrho+1)\,\mathfrak{U}\,du\end{array}\right\}=0.$$

Nach der Formel der theilweisen Integration ist aber

---

*) Man vergleiche § 3 des Aufsatzes „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", diese Annalen, Bd. 35, p. 470 und § 4 des Aufsatzes „Zur Theorie der Euler'schen Integrale", diese Annalen, Bd. 35, p. 495.

**) §§ 1—3 der genannten Arbeit „Zur Theorie der Euler'schen Integrale".

$$(\alpha+1)\int_g^h (u-x)^{-\alpha-2}\,u\,\mathfrak{U}\,du =$$
$$= -\left[(u-x)^{-\alpha-1}\,u\,\mathfrak{U}\right]_{u=g}^{u=h} + \int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}\,\frac{d(\mathfrak{U}u)}{du}\,du,$$

so dass man die Gleichung

$$-[M]_{u=h}+[M]_{u=g}+\int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}\left[\frac{d(u\mathfrak{U})}{du}-(u+\alpha-\varrho+1)\,\mathfrak{U}\right]du=0$$

erhält, in der M das Product

$$M=(u-x)^{-\alpha-1}\,u\,\mathfrak{U}$$

bedeutet. Der Ausdruck (12) ist demnach eine particuläre Lösung von (1), wenn man die Grösse $\mathfrak{U}$ als Function von u durch die Differentialgleichung

$$\frac{d(u\mathfrak{U})}{du}-(u+\alpha-\varrho+1)\,\mathfrak{U}=0 \tag{13}$$

bestimmt und die Grenzen g, h so wählt, dass

$$[M]_{u=h}=[M]_{u=g} \tag{14}$$

ist. Aus (13) folgt, abgesehen von einem willkürlichen constanten Factor, für $\mathfrak{U}$ der Werth

$$\mathfrak{U}=e^u\,u^{\alpha-\varrho},$$

so dass für M die Function

$$M=e^u(u-x)^{-\alpha-1}\,u^{\alpha-\varrho+1} \tag{15}$$

zu setzen ist. Auf diese Weise findet man für y das bestimmte Integral

$$y=\int_g^h e^u\,(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du, \tag{16}$$

dessen Grenzen g, h der Bedingung (14) genügen müssen.

Für die Grenze h darf statt eines constanten Werthes auch der Werth x genommen werden, wenn der reelle Theil von $\alpha+1$ negativ ist. Denn es gelten, wie man leicht beweist, für die Differentialquotienten von y dann die früheren Ausdrücke.

Die Gleichung (14) kann auf zwei verschiedene Arten befriedigt werden. Ist die Integrationscurve des Integrals (16) keine geschlossene Curve, also g nicht gleich h, so muss M sowohl für $u=g$ als für $u=h$ verschwinden, da die in M enthaltene Potenz $(u-x)^{-\alpha-1}$ die wesentlich von einander verschiedenen Functionen $(g-x)^{-\alpha-1}$ und $(h-x)^{-\alpha-1}$ liefert. Fällt dagegen in (16) die obere Integralgrenze mit der unteren zusammen, so braucht die Grösse M für $u=g=h$ nicht den Werth Null zu haben; denn der Gleichung (14) wird genügt, sobald der geschlossene Integrationsweg von (16) so beschaffen ist, dass die zum Endpunkte desselben gehörigen Werthe der Potenzen $(u-x)^{-\alpha-1}$ und $u^{\alpha-\varrho+1}$ mit den anfänglichen Werthen übereinstimmen.

Es soll zunächst angenommen werden, dass g und h von einander verschieden seien. Die Grösse M verschwindet für $u = 0$ und für $u = x$, wenn der reelle Theil von $\alpha - \varrho + 1$ positiv, bezw. wenn der reelle Theil von $\alpha + 1$ negativ ist. Ausserdem wird $M = 0$ für $u = -\infty$. Indem man zur Abkürzung $\Phi(u, x)$ die Function

$$(17) \qquad \Phi(u, x) = e^u (u - x)^{-\alpha} u^{\alpha - \varrho}$$

nennt und die auf die reellen Bestandtheile zu beziehenden Ungleichheiten

$$(18) \qquad \alpha + 1 < 0, \quad \alpha - \varrho + 1 > 0$$

als erfüllt voraussetzt, erhält man die particulären Integrale der Differentialgleichung (1)

$$(19) \qquad \int^x \Phi(u, x)\, du, \quad \int_0^{-\infty} \Phi(u, x)\, du, \quad \int_{-\infty}^x \Phi(u, x)\, du,$$

deren jedes durch die beiden übrigen linear ausdrückbar ist.

Das erste der Integrale (19) ist, nach Hinzufügung eines Factors $(-1)^{-\alpha}$, das in (11) angegebene Hauptintegral. Man bemerke, dass die in § 1 erwähnte Identität

$$\int_0^x e^u (x-u)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho} du = E(\alpha - \varrho + 1, 1 - \alpha) x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1; 2 - \varrho; x)$$

zu einer Erweiterung der Ungleichheiten (18) führt. Denn das obige bestimmte Integral stellt, da es gleich der Reihe ist, eine particuläre Lösung von (1) dar, sobald es convergirt. Letzteres findet aber nicht allein für $\alpha < -1$, sondern auch für $-1 < \alpha < 1$ statt, falls ausserdem $\alpha - \varrho + 1 > 0$ ist. Daher sind an Stelle von (18) die Ungleichheiten

$$(20) \qquad 1 - \alpha > 0, \quad \alpha - \varrho + 1 > 0$$

zu nehmen.

Das eindeutige Hauptintegral der Gleichung (1) wird durch keins der Integrale (19) dargestellt. Das zweite und das dritte Integral (19) setzen sich vielmehr linear aus der eindeutigen und der mehrdeutigen Hauptlösung zusammen. Dagegen kann man, wenn $g = h$ gewählt wird, sowohl das eindeutige Hauptintegral aus (16) ableiten, als auch in Bezug auf die mehrdeutige Hauptlösung die nothwendigen Ergänzungen für diejenigen Fälle gewinnen, wo die Ungleichheiten (20) nicht erfüllt sind.

§ 3.

In der u-Ebene werde um $u = 0$ als Mittelpunkt ein Kreis geschlagen, der den betrachteten Punkt x umschliesst. Der Radius desselben heisse k. Man wählt nun, indem man

$$g = h = -\infty$$

setzt, wodurch der Bedingung (14) genügt ist, den Integrationsweg des Integrals (16) in der Art, dass die Variable u zunächst die negative reelle Axe von $u = -\infty$ bis $u = -k$, hierauf den genannten Kreis im positiven Sinne, endlich wiederum den Abschnitt der reellen Axe von $u = -k$ bis $u = -\infty$ durchläuft. Das hierdurch definirte Integral, für welches, nach § 1 der erwähnten Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", die abgekürzte Bezeichnung

$$(21) \qquad \overline{\int}_{-\infty}^{(x,\,0)} e^u (u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho}\, du$$

angewendet wird, befriedigt die Differentialgleichung (1). Man erkennt leicht, dass dasselbe, nachdem Anfangswerthe der Potenzen $(u-x)^{-\alpha}$ und $u^{\alpha-\varrho}$ fixirt worden sind, eine eindeutige Function von x ist. Für die particulären Lösungen der Gleichung (1) kommt nur der Punkt $x = 0$ als Verzweigungspunkt in Betracht. Führt aber die Variable x, ohne die Kreisfläche zu verlassen, einen Umlauf um den Punkt 0 aus, so tritt in (21) keinerlei Aenderung des Integrationsweges ein, und es nimmt bei einem beliebigen Integralelement, da keiner der Punkte u von x umkreist wird, die Potenz $(u-x)^{-\alpha}$ im Endpunkte der geschlossenen x-Curve denselben Werth an wie im Ausgangspunkte. Hieraus folgt, dass das Integral (21) in der Umgebung des Punktes $x = 0$, und daher auch in der ganzen Ebene, eine eindeutige Function von x ist.

Um das Integral (21), welches für alle endlichen Werthe von x, α, ϱ einen bestimmten Sinn behält, nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln, setzt man für $(u-x)^{-\alpha}$ die Reihe

$$u^{-\alpha}\left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-\alpha} = u^{-\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{1}\,\frac{x}{u} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{u^2} + \cdots\right)$$

ein. Dieselbe convergirt, da für alle Elemente des Integrals (21), gemäss der Definition des Integrationsweges, mod. $u >$ mod. x ist. Die in der Reihe vorkommenden Potenzen von x treten vor die Integralzeichen, so dass für die zu integrirenden Functionen nur der Punkt $u = 0$ als ein singulärer, von der Integrationscurve umschlossener Punkt übrig bleibt. Man findet auf diese Weise für das Integral (21) den Ausdruck

$$(22) \qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho}\, du + \frac{\alpha}{1}\, x \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho-1}\, du + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1\,.\,2\ldots\nu}\, x^\nu \overline{\int}_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho-\nu}\, du + \cdots. \end{array}\right.$$

Es wird nun, wie in § 3 der obengenannten Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale", durch $\overline{\Gamma}(a)$ das bestimmte Integral

$$(23)\qquad \overline{\Gamma}(a)=\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}du$$

bezeichnet, welches den nämlichen Integrationsweg wie die in (22) vorkommenden Integrale hat (unter Hinzufügung der Bedingung, dass für das reelle positive Argument $u=k$ die Potenz u^{a-1} den Werth $e^{(a-1)\log k}$, wo $\log k$ reell ist, annehmen soll). Für ein positives ganzzahliges ν besteht dann die Gleichung (l. c. (38))

$$(24)\qquad \overline{\Gamma}(a-\nu)=\frac{(-1)^\nu\,\overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-\nu)}.$$

Also kann man in (22)

$$\int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-\varrho-\nu}du=\overline{\Gamma}(1-\varrho-\nu)=$$

$$=\frac{(-1)^\nu\,\overline{\Gamma}(1-\varrho)}{(-\varrho)(-\varrho-1)\dots(-\varrho-\nu+1)}=\frac{\overline{\Gamma}(1-\varrho)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+\nu-1)}$$

substituiren. Hierdurch wird aus (22) die Reihe

$$\overline{\Gamma}(1-\varrho)\left\{1+\frac{\alpha}{1\,.\,\varrho}\,x+\dots+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\nu!\,\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+\nu-1)}\,x^\nu+\dots\right\}$$

erhalten; folglich ist

$$(25)\qquad \int_{-\infty}^{(x,0)} e^u(u-x)^{-\alpha}u^{\alpha-\varrho}du=\overline{\Gamma}(1-\varrho)\;F(\alpha;\varrho;x).$$

Die Constante ϱ wurde als nicht ganzzahlig vorausgesetzt. Indessen behält das Integral (21) auch in dem Falle, wo ϱ eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, einen bestimmten Sinn. Für ein positives ganzzahliges ϱ bleibt die soeben angestellte Rechnung, welche zur Gleichung (25) führte, vollständig in Kraft. Ist dagegen ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl $-m$, einschliesslich des Werthes $\varrho=0$, so hat man die Gleichungen

$$\overline{\Gamma}(\nu)=0,\quad \overline{\Gamma}(0)=2\pi i,\quad \overline{\Gamma}(-\nu)=\frac{2\pi i}{1\,.\,2\dots\nu}$$

(l. c. (39) und (40)), in denen ν eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, zu berücksichtigen. Da die einzelnen Glieder der Reihe (22) die respectiven Factoren

$$\overline{\Gamma}(1-\varrho),\ \overline{\Gamma}(-\varrho),\ \overline{\Gamma}(-\varrho-1),\dots$$

enthalten, so sind im Falle $\varrho=-m$, wo diese Factoren

$$\overline{\Gamma}(m+1),\ \overline{\Gamma}(m),\dots\overline{\Gamma}(1),\ \overline{\Gamma}(0),\ \overline{\Gamma}(-1)\dots$$

lauten, die $m+1$ ersten Summanden von (22) gleich Null. Die im allgemeinen Term vorkommende Constante $\overline{\Gamma}(1-\varrho-\nu)$ wird, wenn man $\varrho=-m$, $\nu=m+1+\mu$ setzt, gleich dem Ausdruck

$$\overline{\Gamma}(1-\varrho-\nu)=\overline{\Gamma}(-\mu)=\frac{2\pi i}{1.2\ldots\mu},$$

wodurch die Reihe (22), nach Abtrennung des constanten Factors

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)}{1.2\ldots(m+1)}\,2\pi i,$$

in

$$x^{m+1}\,F(\alpha+m+1;\,m+2;\,x)=x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1;\,2-\varrho;\,x)$$

übergeht. Das Integral (21) stellt also, wenn ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist, die in (3) angegebene particuläre Lösung der Gleichung (1), sonst aber immer die particuläre Lösung (2) dar. Für $\varrho=1$ sind die Ausdrücke (2) und (3) identisch.

§ 4.

In den Fällen, wo die Constanten α und ϱ den Ungleichheiten (20)

$$1-\alpha>0,\quad \alpha-\varrho+1>0$$

nicht genügen, wo also das bestimmte Integral

$$\int_0^x e^u(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du$$

divergent ist, erhält man einen Ersatz für letzteres, indem man die Variable u einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0 ausführen lässt. Es werde auf der Verbindungslinie der Punkte 0 und x ein beliebiger Punkt c angenommen, und durch diesen einerseits ein Kreis $\mathfrak{P}$ mit dem Mittelpunkte 0, andererseits ein Kreis $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte x gezogen, so dass die zwei Kreise sich im Punkte c berühren. Ein Umlauf längs $\mathfrak{P}$, resp. $\mathfrak{Q}$ soll kurz durch $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{Q}^+$ oder $\mathfrak{P}^-$, $\mathfrak{Q}^-$ bezeichnet werden, jenachdem derselbe im positiven oder im negativen Sinne erfolgt. Man bildet nun (nach § 1 der Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf") das Integral

$$\text{(26)}\qquad \overline{\int_c}^{(x,\,0,\,x-,\,0-)} e^u(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du,$$

dessen Integrationsweg im Punkte c beginnt und endigt und sich aus den Umläufen

$$\mathfrak{Q}^+,\ \mathfrak{P}^+,\ \mathfrak{Q}^-,\ \mathfrak{P}^-$$

zusammensetzt. Die Gleichung (14) ist bei dieser Wahl des Integrationsweges erfüllt, da nach (15) die Grösse M keine anderen (endlichen) Verzweigungspunkte als $u=0$ und $u=x$ besitzt, und jeder dieser zwei Punkte von der Variable u zuerst in positiver, dann in negativer Drehungsrichtung umkreist wird. Das Integral (26) genügt in Folge dessen der Differentialgleichung (1). Dasselbe convergirt für beliebige Werthe der Constanten α und ϱ und für jeden endlichen, von Null verschiedenen Werth von x. Führt man in (26) eine neue Variable t durch die Gleichung

$$u = tx$$

ein, so geht die von $u = 0$ nach $u = x$ gezogene Gerade in die Verbindungslinie der Punkte $t = 0$ und $t = 1$ über. Es sei $t = c_1$ derjenige Punkt dieser Verbindungslinie, welcher dem Punkte $u = c$ entspricht. Dann macht die Variable t vom Punkte c_1 aus einen Doppelumlauf um die Punkte 1 und 0, und man erhält aus (26) den Ausdruck

$$(-1)^\alpha\, x^{1-\varrho} \overline{\int_{c_1}^{(1,\,0,\,1-,\,0-)}} e^{tx}\, t^{\alpha-\varrho}(1-t)^{-\alpha}\, dt.$$

Wird hierin

$$e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1} + \frac{t^2x^2}{1\,.\,2} + \cdots + \frac{t^\nu x^\nu}{\nu!} + \cdots$$

gesetzt, so ergiebt sich eine Reihe, deren allgemeiner Term

$$(27) \qquad (-1)^\alpha \frac{x^{1-\varrho+\nu}}{\nu!} \overline{\int_{c_1}^{(1,\,0,\,1-,\,0-)}} t^{\alpha-\varrho+\nu}(1-t)^{-\alpha}\, dt$$

lautet. Nun wurde in § 1 der erwähnten Abhandlung „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" $\mathfrak{E}(a,\, b)$ als die Grösse

$$(28) \qquad \mathfrak{E}(a,\, b) = e^{-\pi i(a+b)} \overline{\int_{\mathfrak{c}}^{(1,\,0,\,1-,\,0-)}} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

definirt, in welcher t (wie bei obigem Integral) abwechselnd die Punkte 1 und 0, und zwar erst in positiver, dann in negativer Drehungsrichtung umkreist, während die untere Integralgrenze $\mathfrak{c}$ ein beliebiger reeller Werth zwischen 0 und 1 ist. Als Anfangswerthe der Potenzen t^{a-1} und $(1-t)^{b-1}$ für $t = \mathfrak{c}$ sind in (28) die Ausdrücke $e^{(a-1)\log \mathfrak{c}}$ und $e^{(b-1)\log(1-\mathfrak{c})}$ zu nehmen, in denen $\log \mathfrak{c}$ und $\log(1-\mathfrak{c})$ die reellen Logarithmen bedeuten. Indem man $\mathfrak{c} = c_1$ wählt und bei dem in (27) vorkommenden Integral die Anfangswerthe der Potenzen $t^{\alpha-\varrho+\nu}$, $(1-t)^{-\alpha}$ in der soeben bezeichneten Art bestimmt, hat man

$$(29) \quad \overline{\int_{c_1}^{(1,\,0,\,1-,\,0-)}} t^{\alpha-\varrho+\nu}(1-t)^{-\alpha} dt = e^{\pi i(2-\varrho+\nu)}\, \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+\nu+1,\, 1-\alpha),$$

wofür, da $e^{\pi i(2+\nu)} = (-1)^\nu$, und (l. c. (11))

$$\mathfrak{E}(a+\nu,\, b) = (-1)^\nu \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\, \mathfrak{E}(a,\, b)$$

ist, auch

$$e^{-\pi i\varrho} \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\, \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha)$$

gesetzt werden kann. Der Term (27) verwandelt sich hierdurch in das Product aus der von ν unabhängigen Grösse

$$e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\, x^{1-\varrho}\, \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\, 1-\alpha)$$

und dem Ausdrucke

$$\frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{1.2\ldots\nu.(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\,x^\nu.$$

Demnach besteht für das Integral (26) die Identität

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}&\overline{\int_c}^{(x,0,x-,0-)} e^u(u-x)^{-\alpha}\,u^{\alpha-\varrho}\,du=\\&=e^{\pi i(\alpha-\varrho)}\,\mathfrak{C}(\alpha-\varrho+1,\ 1-\alpha)\,x^{1-\varrho}\,F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x),\end{aligned}\right.$$

deren rechte Seite sich von der Reihe (3) nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Die mehrdeutige Hauptlösung der Gleichung (1) wird also im allgemeinen Falle durch das bestimmte Integral (26) dargestellt.

Es möge erwähnt sein, dass die obige Entwickelung des Integrals (26) auch in dem (hier ausgeschlossenen) Falle, wo ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich 0 oder 1 ist, gültig bleibt. Dagegen geht für $\varrho=2,3,4,\ldots$, wo die Reihe $F(\alpha-\varrho+1;2-\varrho;x)$ aufhört, einen bestimmten Sinn zu haben, das Integral (26) in die eindeutige particuläre Lösung der Gleichung (1)

$$\text{Const. } F(\alpha;\ \varrho;\ x)$$

über. Ist nämlich ϱ gleich der positiven ganzen Zahl m, die $\geqq 2$ vorausgesetzt wird, so nimmt die in (29) vorkommende Constante

$$\mathfrak{C}(\alpha-\varrho+\nu+1,\ 1-\alpha),$$

welche man wegen der Gleichung (l. c. (20))

$$\mathfrak{C}(a,b)=\mathfrak{C}(1-a-b,\ b)$$

auch

$$\mathfrak{C}(\varrho-1-\nu,\ 1-\alpha)=\mathfrak{C}(m-1-\nu,\ 1-\alpha)$$

schreiben kann, für $\nu=0,1,2,\ldots m-2$ den Werth Null an. Denn $\mathfrak{C}(a,b)$ verschwindet, wenn eins der Argumente a, b (oder $1-a-b$) eine positive ganze Zahl ist. Es fallen auf diese Weise die $m-1$ ersten Glieder der Reihenentwickelung des Integrals (26) fort und der erste von Null verschiedene Summandus derselben, der aus (27) für $\nu=m-1=\varrho-1$ entsteht, ist eine Constante. Die Substitution $\nu=m-1+\mu$ formt den allgemeinen Term (27) in das Product

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^\alpha x^\mu}{(m+\mu-1)!}(-1)^{\mu-1}\,\mathfrak{C}(\alpha+\mu,\ 1-\alpha)=\\&=\frac{(-1)^{\alpha-1}x^\mu}{(m+\mu-1)!}\,\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\mu-1)}{1.2\ldots\mu}\,\mathfrak{C}(\alpha,\ 1-\alpha)\end{aligned}$$

um, und da $\mu=0,1,2,\ldots$ zu setzen ist, so ergiebt sich im genannten Falle für das Integral (26) die Reihe

$$\frac{(-1)^{\alpha-1}}{(m-1)!}\,\mathfrak{C}(\alpha,\,1-\alpha)\left\{1+\frac{\alpha}{1\,.\,m}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,m(m+1)}\,x^2+\cdots\right\}$$
$$=\text{Const.}\ F(\alpha;\,m;\,x)=\text{Const.}\ F(\alpha;\,\varrho;\,x),$$

wie behauptet wurde. Man schliesst hieraus, indem man die Rechnung am Ende des § 3 berücksichtigt, dass, von constanten Factoren abgesehen, die zwei Integrale (21) und (26) identisch werden, sobald ϱ ganzzahlig ist. Denn beide liefern die Reihe (2), wenn ϱ gleich einer positiven, und die Reihe (3), wenn ϱ gleich einer negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist. Als weiteres particuläres Integral der Gleichung (1) tritt in diesen Fällen bekanntlich ein logarithmischer Ausdruck hinzu.

§ 5.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) im allgemeinen Falle (unter der Voraussetzung, dass die Constante ϱ nicht ganzzahlig ist) durch die Summe

$$(31)\qquad y=C_1\overline{\int}_{-\infty}^{(x,\,0)}\Phi(u,\,x)\,du+C_2\overline{\int}_{c}^{(x,\,0,\,x-,\,0-)}\Phi(u,\,x)\,du,$$

in welcher $\Phi(u, x)$ die Function (17), und C_1, C_2 willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt wird.

Der Ausdruck (31) gestattet eine Vereinfachung, sobald eine der Ungleichheiten (20)

$$1-\alpha>0,\quad \alpha-\varrho+1>0$$

erfüllt ist, indem das Integral (26)

$$\overline{\int}_{c}^{(x\ 0,\,x-,\,0-)}\Phi(u,\,x)\,du$$

dann durch ein anderes, dessen Integrationsweg aus einem einmaligen Umlauf um den Punkt x, resp. um den Punkt 0 besteht, ersetzt werden kann. Im Falle $\alpha-\varrho+1>0$ ist das Integral

$$(32)\qquad \overline{\int}_{0}^{(x)}\Phi(u,\,x)\,du$$

und im Falle $1-\alpha>0$ das Integral

$$(33)\qquad \overline{\int}_{x}^{(0)}\Phi(u,\,x)\,du$$

convergent, bei denen die Variable u vom Punkte 0 aus den Punkt x, bezw. vom Punkte x aus den Punkt 0 umkreist. Die Integrale (32) und (33) unterscheiden sich aber von der Reihe (3) wiederum nur durch einen constanten Factor. Man entwickelt, um dies zu zeigen, die genannten Integrale nach steigenden Potenzen von x.

Aus dem Integral (32) ergiebt sich, wenn (wie in (26)) $u = tx$, und $e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1} + \cdots$ gesetzt wird, der Ausdruck

$$x^{1-\varrho} \overline{\int_0^{(1)}} e^{tx}\, t^{\alpha-\varrho} (t-1)^{-\alpha}\, dt =$$

$$= x^{1-\varrho} \overline{\int_0^{(1)}} \left(1 + \frac{tx}{1} + \cdots + \frac{t^\nu x^\nu}{\nu!} + \cdots\right) t^{\alpha-\varrho} (t-1)^{-\alpha}\, dt.$$

Man nennt nun $\overline{E}(a, b)$ das Integral („Zur Theorie der Euler'schen Integrale", Gleichung (24))

$$\overline{E}(a, b) = \overline{\int_0^{(1)}} t^{a-1} (t-1)^{b-1}\, dt, \tag{34}$$

dessen Integrationsweg einen positiven, bei 0 beginnenden Umlauf um den Punkt 1 darstellt. Der reelle Theil des Argumentes a wird in $\overline{E}(a, b)$ als positiv vorausgesetzt; die Zweige der Potenzen t^{a-1}, $(t-1)^{b-1}$ sind durch die Bedingung bestimmt, dass sie in dem Schnittpunkte $t = \lambda$ des Integrationsweges mit der positiven reellen Axe die Werthe $e^{(a-1)\log\lambda}$, $e^{(b-1)\log(\lambda-1)}$, in denen $\log \lambda$ und $\log(\lambda - 1)$ reell sind, annehmen. Der Factor von $x^{\nu+1-\varrho}$ in der obigen Entwickelung des Integrals (32) ist demnach (wenn man im Punkte $t = \lambda$ für die Potenzen von t und von $t - 1$ die soeben erwähnte Bedingung gelten lässt) gleich der Grösse

$$\frac{1}{\nu!} \overline{E}(\alpha - \varrho + \nu + 1,\ 1 - \alpha),$$

die durch die Formel (l. c. (27))

$$\overline{E}(a + \nu,\ b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)} \overline{E}(a, b)$$

in

$$\frac{1}{\nu!} \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)} \overline{E}(\alpha - \varrho + 1,\ 1 - \alpha)$$

übergeht. Auf diese Weise findet man für das Integral (32) die Identität

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\int_0^{(x)}} e^u (u - x)^{-\alpha} u^{\alpha-\varrho}\, du = \\ &= \overline{E}(\alpha - \varrho + 1,\ 1 - \alpha)\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha - \varrho + 1;\ 2 - \varrho;\ x). \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Das Integral (33) verwandelt sich durch die Substitution $u = x(1-t)$, welche die Werthe $u = x$, $u = 0$ den Werthen $t = 0$, $t = 1$ zuordnet, in das Product

$$e^{\pi i(1-\varrho)}\, x^{1-\varrho} \int_0^{\overline{(1)}} e^{x(1-t)}\, t^{-\alpha}(t-1)^{\alpha-\varrho}\, dt =$$

$$= e^{\pi i(1-\varrho)}\, x^{1-\varrho} \int_0^{\overline{(1)}} \left[1 - \frac{x(t-1)}{1} + \cdots + (-1)^\nu \frac{x^\nu (t-1)^\nu}{\nu!} + \cdots\right] t^{-\alpha}(t-1)^{\alpha-\varrho}\, dt$$

$$= e^{\pi i(1-\varrho)}\, x^{1-\varrho} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\, x^\nu\, \overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+\nu+1).$$

Da aber für ein positives ganzzahliges ν

$$\overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+\nu+1) =$$

$$= (-1)^\nu \frac{(\alpha-\varrho+1)(\alpha-\varrho+2)\ldots(\alpha-\varrho+\nu)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\, \overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+1)$$

ist, so entsteht die Gleichung

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_x^{\overline{(0)}} e^u (u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho}\, du = \\ &e^{\pi i(1-\varrho)}\, \overline{E}(1-\alpha,\ \alpha-\varrho+1)\, x^{1-\varrho}\, F(\alpha-\varrho+1;\ 2-\varrho;\ x), \end{aligned} \right.$$

in welcher der reelle Bestandtheil der Constante $1-\alpha$ als positiv vorausgesetzt wird.

Die Fälle, in denen $\alpha-\varrho+1$ oder $1-\alpha$ ganzzahlig und positiv ist, erfordern eine besondere Erwähnung, weil dann das Integral (26) identisch verschwindet. Sind beide Constanten $\alpha-\varrho+1$ und $1-\alpha$ positive ganze Zahlen, in welchem Falle auch ϱ ganzzahlig ist (s. den Schluss des § 4), so kann das Integral (26) durch das in (19) genannte Integral

$$\int_0^x e^u (u-x)^{-\alpha}\, u^{\alpha-\varrho}\, du$$

ersetzt werden. Ist aber nur $\alpha-\varrho+1$, bezw. nur $1-\alpha$ eine positive ganze Zahl, so wendet man an Stelle von (26) die Integrale (32), bezw. (33) an, deren Reihenentwickelungen in (35) und (36) angegeben wurden. Mit dieser Modification bleibt die Gleichung (31) auch in den genannten speciellen Fällen gültig.